ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

# Sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre dépendant d'un paramètre

par Z. Mikołajska (Kraków)

**1. Énoncé du problème.** Dans le présent travail je donne la démonstration du théorème suivant sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle

$$X'' = g(t; X, X', \lambda):$$

Théorème 1. *Admettons les hypothèses suivantes:*

(1) *les fonctions* $g(t, X, Y, \lambda)$, $g'_X(t, X, Y, \lambda)$, $g'_Y(t, X, Y, \lambda)$, $g'_\lambda(t, X, Y, \lambda)$ *sont continues dans tout l'espace à quatre dimensions* $R_4$ *des variables* $(t, X, Y, \lambda)$,

(2) $g(t+T, X, Y, \lambda) = g(t, X, Y, \lambda)$ (*où* $T = \mathrm{const} > 0$) dans $R_4$,

(3) $$\psi_0''(t) = g\big(t, \psi_0(t), \psi_0'(t), 0\big) \quad \textit{pour} \quad -\infty < t < +\infty,$$

(4) $$\big|g'_X\big(t, \psi_0(t), \psi_0'(t), 0\big)\big| < M, \quad \big|g'_Y\big(t, \psi_0(t), \psi_0'(t), 0\big)\big| < M,$$
$$\big|g'_\lambda\big(t, \psi_0(t), \psi_0'(t), 0\big)\big| < M$$
$$\textit{pour} \quad -\infty < t < +\infty \quad (\textit{où } M = \mathrm{const} > 0),$$

(5) $$\Big|\int_0^T g'_X\big(t, \psi_0(t), \psi_0'(t), 0\big)\,dt\Big| > m \quad (\textit{où } m = \mathrm{const} > 0),$$

(6) $$m > (MT)^2[3T+\tfrac{7}{2}],$$

(7) $$\psi_0(t+T) = \psi_0(t).$$

*Dans ces conditions, il existe un nombre* $L > 0$ *tel que pour tout* $\lambda$ *satisfaisant à l'inégalité* $|\lambda| \leqslant L$, *l'équation*

$$\frac{\partial^2\psi(t, \lambda)}{\partial t^2} = g\left(t, \psi(t, \lambda), \frac{\partial\psi(t, \lambda)}{\partial t}, \lambda\right)$$

*a au moins une solution périodique* $\psi(t, \lambda)$ *de période* $T$. *Cette solution dépend de* $\lambda$ *d'une manière continue.*

Plus précisément, *il existe une fonction* $\psi(t,\lambda)$ *définie et continue dans le domaine* $-\infty<t<+\infty$, $|\lambda|<L$ *de classe* $C^2$ *par rapoprt à* $t$, *et une constante* $\varkappa>0$ *telles que*

$$\psi(t,0)\equiv\psi_0(t),\qquad \psi(t+T,\lambda)\equiv\psi(t,\lambda),$$

$$|\psi(t,\bar{\lambda})-\psi(t,\bar{\bar{\lambda}})|\leqslant\varkappa|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|.$$

Nous appuierons la démonstration de ce théorème sur le théorème du point invariant de Schauder et nous utiliserons à cet effet la méthode de A. Bielecki [1].

Le problème de l'existence de solutions périodiques pour de petites valeurs du paramètre $\lambda$ a déjà été le sujet d'un nombre considérable de travaux (voir p. ex. [2], [3], [4]). Mais les auteurs dont je connais les travaux supposaient toujours que la fonction $g(t,X,Y,\lambda)$ était analytique (p. ex. A. M. Kac [2]) ou même linéaire (voir H. Morimoto [3]) par rapport à $\lambda$. On supposait de plus que $g(t,X,Y,\lambda)$ était ou bien analytique (Kac) ou bien de classe $C^2$ au moins (Morimoto) par rapport aux variables $(X,Y)$. Pareillement, au lieu de nos conditions (5) et (6) on admettait différentes hypothèses plus ou moins générales.

Envisageons la transformation

$$x=X-\psi_0(t)$$

qui, appliquée à l'équation différentielle considérée dans l'énoncé du théorème 1, conduit à l'équation

$$x''=f(t,x,x',\lambda),$$

où

$$f(t,x,y,\lambda)=g\big(t,x+\psi_0(t),y+\psi_0'(t),\lambda\big)-\psi_0''(t).$$

Ainsi, la démonstration du théorème 1 se ramène à celle du théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Admettons l'hypothèse suivante:*

Hypothèse H.

(1.1) *les fonctions* $f(t,x,y,\lambda)$, $f_x'(t,x,y,\lambda)$, $f_y'(t,x,y,\lambda)$, $f_\lambda'(t,x,y,\lambda)$ *sont continues dans tout l'espace à quatre dimensions* $R_4$ *des variables* $(t,x,y,\lambda)$,

(1.2) $$f(t,0,0,0)=0\quad\textit{pour}\quad -\infty<t<+\infty,$$

(1.3) $$f(t+T,x,y,\lambda)=f(t,x,y,\lambda)\quad\textit{dans}\quad R_4\quad(\textit{où}\ T=\mathrm{const}>0),$$

(1.4) $$|f_x'(t,0,0,0)|<M,\quad |f_y'(t,0,0,0)|<M,\quad |f_\lambda'(t,0,0,0)|<M\quad \textit{pour}\quad -\infty<t<+\infty\quad(\textit{où}\ M=\mathrm{const}>0),$$



(1.5) $$\Big|\int_0^T f_x'(t,0,0,0)\,dt\Big|>m\qquad(\textit{où}\ m=\mathrm{const}>0),$$

(1.6) $$m>(MT)^2(3T+\tfrac{7}{2}).$$

*Dans ces conditions, il existe un nombre* $L>0$ *tel que pour tout* $\lambda$ *satisfaisant à l'inégalité* $|\lambda|\leqslant L$, *l'équation*

(1.7) $$\frac{\partial^2\varphi(t,\lambda)}{\partial t^2}=f\Big(t,\varphi(t,\lambda),\frac{\partial\varphi(t,\lambda)}{\partial t},\lambda\Big)$$

*admet au moins une solution périodique de période* $T$ *et cette solution dépend de* $\lambda$ *d'une manière continue.*

Plus précisément, *il existe une fonction* $\varphi(t,\lambda)$ *définie et continue dans le domaine* $-\infty<t<+\infty$, $|\lambda|\leqslant L$, *de classe* $C^2$ *par rapport à* $t$, *et une constante* $\varkappa>0$ *telles que*

(1.8) $$\varphi(t,0)\equiv 0,$$

(1.9) $$\varphi(t+T,\lambda)\equiv\varphi(t,\lambda),$$

(1.10) $$|\varphi(t,\bar{\lambda})-\varphi(t,\bar{\bar{\lambda}})|\leqslant\varkappa|\bar{\lambda}-\lambda|.$$

Avant de passer à la démonstration du théorème 2 remarquons que, sans restreindre la généralité, l'hypothèse H peut être remplacée par l'hypothèse $\mathrm{H}_a^*$.

Hypothèse $\mathrm{H}_a^*$.

($1.1_a$) *la fonction* $f(t,x,y,\lambda)$ *et ses dérivées du premier ordre par rapport aux variables* $(x,y)$ *et* $\lambda$ *sont continues dans le domaine* $D_a$:

($D_a$) $$-\infty<t<+\infty,\quad |x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant a,\quad |\lambda|\leqslant a,\quad \textit{où}\ a=\mathrm{const}>0,$$

($1.3_a$) $$f(t+T,x,y,\lambda)=f(t,x,y,\lambda)\quad\textit{dans}\quad D_a,$$

($1.4_a$) $$|f_x'(t,x,y,\lambda)|\leqslant M,\quad |f_y'(t,x,y,\lambda)|\leqslant M,\quad |f_\lambda'(t,x,y,\lambda)|\leqslant M\quad\textit{dans}\quad D_a,$$

($1.5_a$) $$0<m\leqslant\Big|\int_0^T f_x'\big(t,x(t),y(t),\lambda\big)\,dt\Big|\quad \textit{pour}\quad |x(t)|\leqslant a,\quad |y(t)|\leqslant a,\quad |\lambda|\leqslant a.$$

*De plus, la fonction* $f(t,x,y,\lambda)$ *satisfait aux conditions* (1.2), (1.6) *et* (1.7).

Évidemment, de H résulte l'existence d'une constante $a>0$ pour laquelle on a l'hypothèse $\mathrm{H}_a^*$. Par conséquent, au lieu du théorème 2 il suffit de démontrer le suivant:

THÉORÈME $2_a^*$. *L'hypothèse* $H_a^*$ *étant admise, il existe un nombre* $L>0$, *une fonction* $\varphi(t,\lambda)$ *définie et continue dans le domaine* $-\infty<t<+\infty$, $|\lambda|\leqslant L$, *de classe* $C^2$ *par rapport à* $t$, *et une constante* $\varkappa>0$ *satisfaisant aux conditions* (1.8), (1.9) *et* (1.10).

La démonstration du notre théorème se décomposera en plusieurs étapes sous forme de quelques lemmes.

**2. Un système auxiliaire d'équations fonctionnelles.**

LEMME 1. *Admettons l'hypothèse* $H_a^*$. *Supposons, de plus, que le couple des fonctions* $\{a(\lambda),\psi(t,\lambda)\}$ *soit pour* $|\lambda|\leqslant L$ *la solution du système d'équations fonctionnelles*

$$\psi(t,\lambda)=-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\tau f\Big(s,a(\lambda)+\int_0^s\psi(w,\lambda)dw,\psi(s,\lambda),\lambda\Big)dsd\tau+\int_0^t f\Big(s,a(\lambda)+\int_0^s\psi(w,\lambda)dw,\psi(s,\lambda),\lambda\Big)ds, \tag{2.1}$$

$$\int_0^T f\Big(s,a(\lambda)+\int_0^s\psi(w,\lambda)dw,\psi(s,\lambda),\lambda\Big)ds=0,\qquad |\lambda|\leqslant L, \tag{2.2}$$

$$a(0)=0,\qquad \psi(t,0)\equiv 0\quad pour\quad t\in\langle 0,T\rangle. \tag{2.3}$$

*Dans ces hypothèses, toute fonction* $\varphi(t,\lambda)$ *satisfaisant aux conditions*

$$\varphi(t,\lambda)\equiv a(\lambda)+\int_0^t\psi(s,\lambda)ds, \tag{2.4}$$

$$\varphi(t+T,\lambda)\equiv\varphi(t,\lambda), \tag{2.5}$$

*constitue pour* $|\lambda|\leqslant L$ *une solution périodique de l'équation* (1.7) *de période* $T$.

Démonstration. En vertu de (2.1) et (2.4), on a

$$\varphi(T,\lambda)=a(\lambda)=\varphi(0,\lambda), \tag{2.6}$$

et, par conséquent, les conditions (2.4) et (2.5) sont bien compatibles et définissent (d'une manière unique) une fonction $\varphi(t,\lambda)$ périodique et continue. Des conditions (2.1), (2.2) et de l'hypothèse $(1.3_a)$ (périodicité de la fonction $f$) résulte que $\psi(0,\lambda)\equiv\psi(T,\lambda)$ et $\psi_t'(0,\lambda)=\psi_t'(T,\lambda)$, d'où en vertu de (2.4)

$$\varphi_t'(t,\lambda)=\varphi_t'(t+T,\lambda),\qquad \varphi_{tt}''(t,\lambda)=\varphi_{tt}''(t+T,\lambda).$$

La fonction $\varphi(t,\lambda)$ est donc de classe $C^2$ par rapport à $t$. De (2.3) et (2.5) résulte que la fonction $\varphi(t,\lambda)$ satisfait aux égalités (1.8) et (1.9). Enfin, de (2.1) et (2.4) résulte (1.7). Le lemme se trouve ainsi démontré.



En vertu de ce lemme, pour démontrer le théorème 2 (et par conséquent le théorème 1) il suffit de prouver l'existence d'une solution $\{a(\lambda),\psi(t,\lambda)\}$ du système d'équations fonctionnelles (2.1) et (2.2) satisfaisant à la condition (2.3) (pour un $L>0$ convenablement choisi).

Afin d'appliquer à cet effet le théorème de Schauder, envisageons les espaces de Banach suivants:

**3. Espaces fonctionnels auxiliaires et leurs sous-ensembles.** Désignons par $E$ l'espace des fonctions $\psi(t,\lambda)$ continues dans l'ensemble

$$0\leqslant t\leqslant T,\qquad |\lambda|\leqslant L, \tag{$\Delta$}$$

avec la norme

$$||\psi(t,\lambda)||=\max_{\Delta}|\psi(t,\lambda)|. \tag{3.0}$$

De même désignons par $\mathcal{E}$ l'espace de Banach des fonctions $a(\lambda)$ continues dans l'intervalle $|\lambda|\leqslant L$ avec la norme

$$||a(\lambda)||=\max_{|\lambda|\leqslant L}|a(\lambda)|. \tag{3.1}$$

Ensemble $Z$. Désignons par $Z$ le sous-ensemble de l'espace $E$ défini par les conditions:

$$|\psi(t,\bar\lambda)-\psi(t,\bar{\bar\lambda})|\leqslant p|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\quad pour\quad |\bar\lambda|\leqslant L,\quad |\bar{\bar\lambda}|\leqslant L, \tag{3.2}$$

$$\varrho(\psi,t,\lambda)=\max_{\tau\in\langle 0,t\rangle}\Big\{\Big[|\psi(\tau,\lambda)|+\Big|\int_0^\tau\psi(s,\lambda)ds\Big|\Big]e^{\mu\tau}\Big\}\leqslant k\quad pour\quad (t,\lambda)\in\Delta, \tag{3.3}$$

$$\psi(t,0)\equiv 0. \tag{3.4}$$

Ensemble $A$. Désignons enfin par $A$ le sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}$ défini par les inégalités

$$a(0)=0, \tag{3.5}$$

$$||a(\lambda)||\leqslant r, \tag{3.6}$$

$$|a(\bar\lambda)-a(\bar{\bar\lambda})|\leqslant\frac{N}{m}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|,\qquad où\qquad n=\mathrm{const}>0. \tag{3.7}$$

Les constantes $L,\mu,k,p$ et $r$ qui interviennent dans ces définitions vont être déterminées convenablement dans la suite.

LEMME 2. *Les ensembles* $Z$ *et* $A$ *sont fermés, bornés et convexes.*

Nous omettons la démonstration de ce lemme qui est presque évidente.

### 4. Transformation $V$.

LEMME 3. *Si pour* $|\lambda| \leqslant L$ *et* $|u| \leqslant r$ *les fonctions* $F(\lambda, u)$ *et* $F_u(\lambda, u)$ *sont continues et satisfont aux conditions*

$$F(0, 0) = 0, \tag{4.1}$$

$$|F_u(\lambda, u)| \geqslant m, \tag{4.2}$$

$$|F(\bar{\lambda}, u) - F(\bar{\bar{\lambda}}, u)| \leqslant N|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}|, \tag{4.3}$$

*où* $m = \text{const} > 0$, $N = \text{const} > 0$ *et*

$$mr > LN, \tag{4.4}$$

*il existe une fonction* $a(\lambda) \in A$ *telle que la condition*

$$F(\lambda, u) = 0, \quad |\lambda| \leqslant L, \quad |u| \leqslant r \tag{4.5}$$

*est équivalente à celle-ci:*

$$u = a(\lambda) \quad \textit{pour} \quad |\lambda| \leqslant L, \tag{4.6}$$

*et*

$$|a(\bar{\lambda}) - a(\bar{\bar{\lambda}})| \leqslant \frac{N}{m}|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}|. \tag{4.7}$$

Démonstration. Supposons que l'on ait p. ex. $F'_u(0, 0) > 0$ (dans le cas où $F'_u(0, 0) < 0$ la démonstration est analogue). On a alors constamment $F'_u(\lambda, u) \geqslant m$ et, en vertu de (4.1), on a

$$F(0, r) \geqslant mr, \quad F(0, -r) \leqslant -mr,$$

et, en raison de (4.3) et (4.4)

$$F(\lambda, r) > 0 \quad \text{et} \quad F(\lambda, -r) < 0 \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leqslant L.$$

Par suite, pour démontrer l'existence de la fonction $a(\lambda)$, il suffit de procéder comme dans la démonstration usuelle du théorème sur les fonctions implicites.

L'inégalité (4.7) pour la solution $a(\lambda)$ de l'équation (4.5) s'obtient, grâce à (4.2), (4.3) et (4.5), des relations

$$\begin{aligned} N|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}| &\geqslant |F(\bar{\lambda}, a(\bar{\bar{\lambda}})) - F(\bar{\bar{\lambda}}, a(\bar{\bar{\lambda}}))| = |F(\bar{\lambda}, a(\bar{\bar{\lambda}})) - F(\bar{\lambda}, a(\bar{\lambda}))| \\ &\geqslant m|a(\bar{\lambda}) - a(\bar{\bar{\lambda}})|. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 3 se trouve ainsi achevée.



LEMME 4. *Si, dans l'hypothèse* $H_a^*$, *les constantes* $r$, $L$ *et* $N$ *satisfont aux inégalités*

$$0 < L \leqslant a, \tag{4.8}$$

$$k > 0, \quad r > 0, \quad k + r \leqslant a, \tag{4.9}$$

$$N = TM[(T/2+1)p+1] < mr/L, \quad p > 0, \tag{4.10}$$

*alors pour toute fonction* $\psi(t, \lambda) \in Z$, *l'équation*

$$\int_0^T f\Big(s, a(\lambda) + \int_0^s \psi(w, \lambda)\,dw, \psi(s, \lambda), \lambda\Big)\,ds = 0 \tag{4.11}$$

*admet exactement une solution* $a(\lambda) \in A$.

La démonstration du lemme 4 s'obtient en appliquant le lemme 3 à la fonction $F(\lambda, u)$, définie par la formule

$$F(\lambda, u) = \int_0^T f\Big(t, u + \int_0^t \psi(s, \lambda)\,ds, \psi(t, \lambda), \lambda\Big)\,dt. \tag{4.12}$$

En effet, pour la fonction $F(\lambda, u)$ ainsi définie on a

$$F(0, 0) = 0$$

(en vertu de (1.2)). La relation (4.2) résulte de ($1.5_a$) et (4.9). Il suffit de poser, pour $|\lambda| \leqslant L$, dans ($1.5_a$)

$$x(t) = u + \int_0^t \psi(s, \lambda)\,ds, \quad y(t) = \psi(t, \lambda).$$

La relation (4.7) résulte de (4.11), (3.2), ($1.1_a$) et ($1.4_a$). (4.4) résulte de (4.10) et (4.12,) car on a

$$\begin{aligned} &\Big|\int_0^T \Big[f\Big(t, u + \int_0^t \psi(s, \bar{\lambda})\,ds, \psi(t, \bar{\lambda}), \bar{\lambda}\Big) - f\Big(t, u + \int_0^t \psi(s, \bar{\bar{\lambda}})\,ds, \psi(t, \bar{\bar{\lambda}}), \bar{\bar{\lambda}}\Big)\Big]\,dt\Big| \\ &\leqslant \int_0^T M\Big[\int_0^t |\psi(s, \bar{\lambda}) - \psi(s, \bar{\bar{\lambda}})|\,ds + |\psi(t, \bar{\lambda}) - \psi(t, \bar{\bar{\lambda}})| + |\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}|\Big]\,dt \\ &\leqslant MT(\tfrac{1}{2}pT + p + 1)|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}| = MT[p(\tfrac{1}{2}T + 1) + 1]|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}| = N|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}|. \end{aligned}$$

En vertu de (4.10) on a $NL < mr$. Toutes les hypothèses du lemme 3 sont donc satisfaites et, par suite, le lemme 4 se trouve ainsi démontré.

A partir de ce moment, nous supposerons toujours que l'on a les inégalités (4.8), (4.9) et (4.10). Afin de les obtenir il faut d'abord fixer $k$ et $r$ conformément à (4.9) et ensuite, après avoir choisi arbitrairement $p$, choisir un $L$ suffisamment petit pour que l'on ait (4.8) et (4.10).

En vertu du lemme 4, à chaque fonction $\psi(t,\lambda)\in Z$ correspond d'une manière univoque une fonction $a(\lambda)\in A$. On définit ainsi une transformation $V$ dans l'ensemble $Z$:

(Transformation $V$) $$a(\lambda) = V\big(\psi(t,\lambda)\big).$$

LEMME 5. *La transformation $V$ est continue (dans le sens de la norme* (3.1)) *dans l'ensemble $Z$ (avec la norme* (3.0)) *et on a*

$$\|V(\psi_1)-V(\psi_2)\| \leqslant \frac{TM}{m}\max_{|\lambda|\leqslant L}\varrho(\psi_1-\psi_2,T,\lambda) \quad (\textit{voir } (3.3)). \tag{4.13}$$

Démonstration. Soit $a_i(\lambda) = V\big(\psi_i(t,\lambda)\big)$, $\psi_i(t,\lambda)\in Z$, $i=1,2$. On a alors

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_0^T f\Big(\tau, a_i(\lambda)+\int_0^\tau \psi_i(\xi,\lambda)\,d\xi,\ \psi_i(\tau,\lambda),\lambda\Big)\,d\tau\\ &= \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_0^T f\Big(\tau, a_i(\lambda)+\int_0^\tau \psi_2(\xi,\lambda)\,d\xi,\ \psi_2(\tau,\lambda),\lambda\Big)\,d\tau+\\ &\quad+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_0^T f\Big(\tau, a_1(\lambda)+\int_0^\tau \psi_i(\xi,\lambda)\,d\xi,\ \psi_i(\tau,\lambda),\lambda\Big)\,d\tau.\end{aligned}$$

De là en vertu des hypothèses $(1.1_a)$, $(1.4_a)$ et $(1.5_a)$, on tire

$$m|a_1(\lambda)-a_2(\lambda)| \leqslant TM\varrho(\psi_1-\psi_2,T,\lambda) \quad \text{pour} \quad |\lambda|\leqslant L.$$

Il en résulte immédiatement (4.3). La continuité de la transformation $V$ dans l'ensemble $Z$ résulte de (4.13) et de l'inégalité

$$\varrho(\psi,t,\lambda) \leqslant e^{\mu T}(T+1)\|\psi(t,\lambda)\|. \tag{4.14}$$

**5. Les transformations $U$ et $W$.** Dans le produit cartésien $A\times Z$ nous définissons la transformation:

(Transformation $U$) $$\bar\psi(t,\lambda) = U\big(a(\lambda),\psi(t,\lambda)\big),$$



où $U(a,\psi)$ est donné par la formule

$$\begin{aligned}U\big(a(\lambda),\psi(t,\lambda)\big) &= -\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s f\Big(\tau, a(\lambda)+\int_0^\tau \psi(\xi,\lambda)\,d\xi,\ \psi(\tau,\lambda),\lambda\Big)\,d\xi\,d\tau+\\ &\quad+\int_0^t f\Big(\tau, a(\lambda)+\int_0^\tau \psi(\xi,\lambda)\,d\xi,\ \psi(\tau,\lambda),\lambda\Big)\,d\tau,\end{aligned} \tag{5.1}$$

et dans l'ensemble $Z$ la transformation:

(Transformation $W$) $$\bar\psi(t,\lambda) = W(\psi) = U\Big(V\big(\psi(t,\lambda)\big),\psi(t,\lambda)\Big).$$

LEMME 6. *La transformation $U$ est continue dans l'ensemble $A\times Z$ et y satisfait aux conditions*

$$|U(a_1,\psi_1)-U(a_2,\psi_2)| \leqslant \tfrac{3}{2}TM(|a_1-a_2|+\varrho(\psi_1-\psi_2,T,\lambda). \tag{5.2}$$

Démonstration. La relation (5.2) s'obtient de (5.1) et (3.3) par un simple calcul. De là, en vertu de (4.13) et (4.14), on obtient la continuité de la transformation $U(a,\psi)$.

LEMME 7. *La transformation $W$ est continue dans l'ensemble $Z$. La démonstration s'obtient immédiatement de la définition de la transformation $W$ et des relations* (5.2), (4.14) *et* (4.13).

**6. Compacité de l'ensemble $W(Z)$.**

LEMME 8. *Si $\psi(t,\lambda)\in Z$ et $\bar\psi = W\big(\psi(t,\lambda)\big)$, alors*

$$|\bar\psi(\bar t,\lambda)-\bar\psi(\bar{\bar t},\lambda)| \leqslant n|\bar t-\bar{\bar t}| \quad \textit{pour} \quad (\bar t,\lambda)\in\Delta, \quad (\bar{\bar t},\lambda)\in\Delta \tag{6.1}$$

*où*

$$n = \max_{D_a}|f(t,x,y,\lambda)|. \tag{6.2}$$

La démonstration résulte immédiatement de (5.1) et des définitions des transformations $U$ et $W$.

LEMME 9. *Si $\psi(t,\lambda)\in Z$ et $\bar\psi(t,\lambda) = W\big(\psi(t,\lambda)\big)$ alors*

$$|\bar\psi(t,\bar\lambda)-\bar\psi(t,\bar{\bar\lambda})| \leqslant \tilde p|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}| \quad \textit{pour} \quad (t,\bar\lambda)\in\Delta, \quad (t,\bar{\bar\lambda})\in\Delta \tag{6.3}$$

*où*

$$\tilde p = MT\left[\frac{3MT}{2m}\left(\frac{T}{2}+1\right)+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}T\right]p+MT\left[\frac{3MT}{2m}+\frac{3}{2}\right]. \tag{6.4}$$

Démonstration. Evaluons la différence qui intervient dans le premier membre de l'inégalité (6.3) en nous appuyant sur (5.1) et sur les inégalités (4.10), (3.2) et (3.7):

$$\begin{aligned}|\bar\varphi(t,\bar\lambda)-\bar\varphi(t,\bar{\bar\lambda})| &\leqslant M\Big\{\int_0^t\Big[|a(\bar\lambda)-a(\bar{\bar\lambda})|+\int_0^\tau|\psi(\xi,\bar\lambda)-\psi(\xi,\bar{\bar\lambda})|\,d\xi+\\ &\quad+|\psi(\tau,\bar\lambda)-\psi(\tau,\bar{\bar\lambda})|+|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\Big]d\tau+\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s\Big[|a(\bar\lambda)-a(\bar{\bar\lambda})|+\\ &\quad+\int_0^\tau|\psi(\xi,\bar\lambda)-\psi(\xi,\bar{\bar\lambda})|\,d\xi+|\psi(\tau,\bar\lambda)-\psi(\tau,\bar{\bar\lambda})|+|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\Big]d\tau ds\Big\}\\ &\leqslant M\Big[T\frac{N}{m}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|+\int_0^t\int_0^\tau p|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\,dsd\tau+Tp|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|+T|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|+\frac{TN}{2m}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|+\\ &\quad+\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s\int_0^\tau p|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\,d\xi d\tau ds+\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s p|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\,d\tau ds+\frac{T}{2}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\Big]\\ &\leqslant MT\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{N}{m}+p+1\Big)+\frac{2}{3}Tp\Big]|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|\\ &= MT\Big\{\frac{3}{2}(p+1)+\frac{3TM}{2m}\Big[\Big(\frac{T}{2}+1\Big)p+1\Big]+\frac{2pT}{3}\Big\}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|.\end{aligned}$$

Il en résulte (6.3) et (6.4).

Lemme 10. *L'ensemble $Z$ est compact.*

Démonstration. Des lemmes 8 et 9 il résulte que les fonctions $\bar\varphi(t,\lambda)\in W(Z)$ sont également continues pour $(t,\lambda)\in\Delta$. Elles sont aussi bornées par une constante commune dans leur ensemble, ce qui résulte de (5.1). On a notamment

$$|\bar\varphi(t,\lambda)|\leqslant 2T\max_{Da}|f(t,x,\lambda)|.$$

## 7. Démonstration de l'inclusion $W(Z)\subset Z$.

Avant de fixer $L,\mu,r$ et $p$ introduisons le nombre

$$\beta=\sup\Big|\int_0^T f'_x\big(\tau,x(\tau),y(\tau),\lambda\big)d\tau\Big| \quad\text{pour}\quad |x(t)|\leqslant a,\quad |y(t)|\leqslant a,\quad |\lambda|\leqslant a. \tag{7.1}$$

Evidemment

$$\beta>m\quad(\text{voir }(1.5_a)). \tag{7.2}$$



Remarquons que $\beta\leqslant MT$, d'où

$$m<MT\,(^1). \tag{7.3}$$

Lemme 11. *Dans l'hypothèse $H_a^*$ on a*

$$1>MT\Big[\frac{3MT}{2m}\Big(\frac{T}{2}+1\Big)+\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big]. \tag{7.4}$$

*Si, de plus*

$$p>\frac{3MT\Big[\dfrac{MT}{2m}+\dfrac{1}{2}\Big]}{1-MT\Big[\dfrac{3MT}{2m}\Big(\dfrac{T}{2}+1\Big)+\dfrac{2}{3}T+\dfrac{3}{2}\Big]} \tag{7.5}$$

*et $\tilde p$ est défini par* (6.4), *alors*

$$\tilde p\leqslant p. \tag{7.6}$$

Démonstration. En vertu de l'inégalité (7.3) on a

$$\begin{aligned}MT\Big[\frac{3MT}{m}\Big(\frac{T}{2}+1\Big)+\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big]&=\frac{(MT)^2}{m}\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{T}{2}+1\Big)+\frac{m}{MT}\Big(\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big)\Big]\\ &<\frac{(MT)^2}{m}\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{T}{2}+1\Big)+\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big]=\frac{(MT)^2}{m}\Big[\frac{17}{12}T+3\Big]\end{aligned}$$

d'où, en vertu de (1.6), on tire

$$MT\Big[\frac{3MT}{m}\Big(\frac{T}{2}+1\Big)+\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big]<\frac{(MT)^2}{m}\Big(\frac{17}{12}T+3\Big)<\frac{(MT)^2}{m}\Big(3T+\frac{7}{2}\Big)<1.$$

Il en résulte que tout nombre $p$ satisfaisant à l'inégalité (7.5) est positif, et de (6.4) on voit facilement que (7.5) entraîne (7.6).

Lemme 12. *Si les nombres $p,r,k,L,\mu$ satisfont aux inégalités* (7.5), (4.10), (4.8) *et* (4.9) *et si $\psi(t,\lambda)\in Z$ et $\bar\varphi(t,\lambda)=W\big(\psi(t,\lambda)\big)$, alors $\bar\varphi(t,\lambda)$ satisfait aux relations* (3.4) *et* (3.2).

(1) A. Bielecki a remarqué que cette dernière condition, prise ensemble avec (1.6), conduit à une condition dans laquelle $m$ n'intervient plus, à savoir

$$\max\big[MT(\tfrac{17}{12}T+3),\ MT(3T+\tfrac{7}{2})\big]<1$$

ou

$$M<\min\Big[\frac{1}{3T^2+\frac{7}{2}},\ \frac{1}{\frac{17}{12}T^2+3}\Big].$$

Démonstration. (3.4) résulte immédiatement de la définition de $W(\psi)$ [cf. (4.11) et (5.1)] et de l'hypothèse (1.2), tandis que l'inégalité (3.2) résulte (en vertu du lemme 9) de (4.8), (4.9), (4.10) et (7.5).

Afin d'achever la démonstration du théorème 2 il reste encore à démontrer que pour $\psi \in Z$, $\bar{\psi} = W(\psi)$ on a l'inégalité (3.3) (pour un choix convenable des constantes $k, L, \mu$). Evaluons à cet effet $\varrho(\bar{\psi}, t, \lambda)$.

Admettons l'hypothèse (identique à (1.6)):

$$\frac{(MT)^2}{m}\left(3T+\frac{7}{2}\right)<1, \tag{7.7}$$

$$h = M\left[2(T+1)+\frac{MT}{m}\left(T+\frac{3}{2}\right)\right]. \tag{7.8}$$

Il en résulte que $hT = \dfrac{(MT)^2}{m}\left[2(T+1)\dfrac{m}{TM}+\left(T+\dfrac{3}{2}\right)\right]$ et, en vertu de (7.3) et (7.7), on a

$$hT < 1. \tag{7.9}$$

Soit $g(\mu) = he^{\mu T}-h-\mu$. Comme $g(0) = 0$ et $g'(0) < 0$, on peut choisir un nombre $\mu$ de sorte que l'on ait $g(\mu) < 0$, $\mu > 0$, c'est-à-dire

$$0 < c = \frac{h}{\mu}(e^{\mu T}-1) < 1, \qquad \mu > 0. \tag{7.10}$$

Supposons que les nombres $c$ et $\mu$ soient fixés et satisfassent aux relations (7.10). Ceci admis, on peut énoncer le lemme suivant, le plus important:

Lemme 13. *Si, dans les hypothèses (7.7)-(7.10), $\psi(t,\lambda) \in Z$ et $\bar{\psi}(t,\lambda) = W(\psi(t,\lambda))$, on a*

$$\varrho(\bar{\psi}(t,\lambda), t, \lambda) \leqslant \Gamma e^T L + k\varrho(\psi, T, \lambda) \leqslant \Gamma e^T L + ck, \tag{7.11}$$

*où*

$$\Gamma = MT\left(T+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{MT}{m}+1\right). \tag{7.12}$$

Démonstration. Nous allons évaluer $|\bar{\psi}(t,\lambda)|$, $\left|\int_0^t \bar{\psi}(\tau,\lambda)d\tau\right|$ et

$$\bar{v}(t,\lambda) = \left|\int_0^t \bar{\psi}(s,\lambda)ds\right| + |\bar{\psi}(t,\lambda)|$$

en admettant que

$$v(t,\lambda) = \left|\int_0^t \psi(s,\lambda)ds\right| + |\psi(t,\lambda)|.$$



Or, pour $(t,\lambda) \in \Delta_L$, on a en vertu de (1.2)

$$|\bar{\psi}(t,\lambda)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\tau \left|f\left(s, a(\lambda)+\int_0^s \psi(w,\lambda)dw, \psi(s,\lambda), \lambda\right)-f(s,0,0,0)\right|dsd\tau +$$
$$+\int_0^t \left|f\left(s, a(\lambda)+\int_0^s \psi(w,\lambda)dw, \psi(s,\lambda), \lambda\right)-f(s,0,0,0)\right|ds$$
$$\leqslant \frac{M}{T}\int_0^T\int_0^\tau \left[|a(\lambda)|+\left|\int_0^s \psi(w,\lambda)\right|dw+|\psi(s,\lambda)|+|\lambda|\right]dsd\tau +$$
$$+M\int_0^t \left[|a(\lambda)|+\left|\int_0^s \psi(w,\lambda)dw\right|+|\psi(s,\lambda)|+|\lambda|\right]ds$$
$$\leqslant \frac{3MT}{2}[|a(\lambda)|+|\lambda|]+M\left[\int_0^T v(s,\lambda)ds+\int_0^t v(s,\lambda)ds\right],$$

$$\left|\int_0^t \bar{\psi}(s,\lambda)ds\right| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^t\int_0^T\int_0^\tau \left|f\left(s, a(\lambda)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^s \psi(w,\lambda)dw, \psi(s,\lambda),\lambda\right)-f(s,0,0,0)\right|dsd\tau dz +$$
$$+\int_0^t\int_0^z \left|f\left(s, a(\lambda)+\int_0^s \psi(w,\lambda)dw, \psi(s,\lambda), \lambda\right)-f(s,0,0,0)\right|dsdz \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{T}\int_0^t\int_0^T\int_0^\tau \left[|a(\lambda)|+\left|\int_0^s \psi(w,\lambda)dw\right|+|\psi(s,\lambda)|+|\lambda|\right]dsdzd\tau +$$
$$+M\int_0^t\int_0^z \left[|a(\lambda)|+\left|\int_0^s \psi(\zeta,\lambda)d\zeta\right|+|\psi(s,\lambda)|+|\lambda|\right]dsdz,$$

$$\left|\int_0^t \psi(s,\lambda)ds\right| \leqslant MT^2[|a(\lambda)|+|\lambda|]+m\left[\int_0^T\int_0^z v(s,\lambda)dsdz+\int_0^t\int_0^z v(s,\lambda)dsdz\right]$$

d'où

$$\bar{v}(t,\lambda) \leqslant \left[\frac{3}{2}MT+MT^2\right][|a(\lambda)|+|\lambda|]+$$
$$+M\int_0^T\left[v(s,\lambda)+\int_0^s v(z,\lambda)dz\right]ds+M\int_0^t\left[v(s,\lambda)+\int_0^s v(z,\lambda)dz\right]ds. \tag{7.13}$$

Pour évaluer $|a(\lambda)|$ nous allons profiter de (1.2) et (3.6). Pour $|\lambda| \leqslant L$ on a

$$\int_0^T \Big[f\Big(t,\, a(\lambda)+\int_0^t \psi(s,\lambda)\,ds,\, \psi(t,\lambda),\, \lambda\Big)-f(t,0,0,0)\Big]dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^T \Big\{f'_x\Big(\tau, \theta\Big(a(\lambda)+\int_0^\tau \psi(\xi,\lambda)\,d\xi\Big), \psi(\tau,\lambda), \lambda\Big)\Big(a(\lambda)+\int_0^\tau \psi(\xi,\lambda)\,d\xi\Big)\Big\}d\tau +$$
$$+\int_0^T \Big\{f'_y[\tau, 0, \bar\theta\psi(\tau,\lambda), \lambda]\psi(\tau,\lambda)\Big\}d\tau+\int_0^T f'_\lambda(\tau, 0, 0, \bar{\bar\theta}\lambda)\lambda\, d\tau = 0,$$

où $\theta, \bar\theta, \theta$ sont des fonctions des variables $t$ et $\lambda$ satisfaisant aux conditions $0<|\theta|, |\bar\theta|, |\bar{\bar\theta}|<1$. En profitant de $(1.4_a)$ et $(1.5_a)$ nous obtenons

$$m|a(\lambda)| \leqslant M\Big\{\int_0^T \Big[\Big|\int_0^\tau \psi(\xi,\lambda)\,d\xi\Big|+|\psi(\tau,\lambda)|+|\lambda|\Big]dt\Big\},$$

c'est-à-dire

$$|a(\lambda)| \leqslant \frac{M}{m}\int_0^T \{v(\tau,\lambda)+|\lambda|\}\,d\tau \quad \text{pour} \quad |\lambda|\leqslant L. \tag{7.14}$$

En mettant (7.14) dans (7.13) on en tire l'inégalité

$$\bar v(t,\lambda) \leqslant M\Big\{A\int_0^T v(\tau,\lambda)\,d\tau+(T+1)\int_0^t v(\tau,\lambda)\,d\tau\Big]\Big\}+\Gamma|\lambda|, \tag{7.15}$$

où

$$A = \frac{MT}{m}\Big(T+\frac{3}{2}\Big)+T+1, \tag{7.16}$$

et $\Gamma$ est déjà défini par la formule (7.12). Il en résulte, en vertu de (3.3), (7.8) et (7.10),

$$\bar v(t,\lambda)e^{\mu t} \leqslant Me^{\mu t}\Big[A\int_0^T v(\tau,\lambda)\,d\tau+(T+1)\int_0^t v(\tau,\lambda)\,d\tau\Big]+\Gamma|\lambda|e^{\mu t}$$
$$\leqslant M\varrho(\psi,T,\lambda)\Big(\frac{A}{\mu}+\frac{T+1}{\mu}\Big)(e^{\mu T}-1)+\Gamma e^{\mu T}|\lambda|$$
$$\leqslant \varrho(\psi,T,\lambda)\frac{M}{\mu}\Big[2(T+1)+\frac{MT}{m}\Big(T+\frac{3}{2}\Big)\Big](e^{\mu T}-1)+\Gamma e^{\mu T}|\lambda|$$
$$\leqslant \varrho(\psi,T,\lambda)c+L\Gamma e^{\mu T} \leqslant ck+L\Gamma e^{\mu T}.$$



**8. Choix des constantes $L$ et $p$ et achèvement de la démonstration du théorème 2.**

LEMME 14. *Si $L$ et $p$ sont choisis de sorte que l'on ait*

$$L \leqslant \frac{(1-c)k}{\Gamma e^{\mu T}} = \frac{(1-c)k}{MT\Big(T+\frac{3}{2}\Big)\Big(\frac{MT}{m}+1\Big)e^{\mu T}} \tag{8.1}$$

*et*

$$p \geqslant \frac{\frac{3(MT)^2}{m}}{1-\frac{(MT)^2}{m}\Big(\frac{17}{12}T+3\Big)}, \tag{8.2}$$

*alors pour tout $\psi(t,\lambda)\in Z$, la fonction $\bar\psi(t,\lambda) = W(\psi)$ satisfait aux conditions* (3.3) *et* (3.2).

La démonstration s'obtient immédiatement des lemmes 13 et 12, car on a

$$\frac{\frac{3(MT)^2}{2m}\Big(1+\frac{m}{MT}\Big)}{1-\frac{(MT)^2}{m}\Big(\frac{3}{4}T+\frac{3}{2}+\frac{m}{MT}\Big(\frac{2}{3}T+\frac{3}{2}\Big)\Big)} \leqslant \frac{\frac{3(MT)^2}{m}}{1-\frac{(MT)^2}{m}\Big(\frac{17}{12}T+3\Big)}.$$

LEMME 15. *Si les constantes $L, r, k, p, \mu$ satisfont aux inégalités* (4.8), (4.9), (4.10), (8.1) *et* (8.2), *alors $W(Z)\subset Z$.*

La démonstration s'obtient immédiatement des lemmes 11, 12 et 14 et de la définition de l'ensemble $Z$.

Il y a encore lieu de vérifier si les conditions qui intervenaient constamment dans la démonstration sont compatibles et de déterminer l'ordre dans lequel il faut choisir les constantes. Or, comme nous l'avons dit dans le § 1, on fixe d'abord $a>0$. Ensuite on fixe $k>0$ et $r>0$ conformément à (4.9) et de sorte que $k+r\leqslant a$. Puis on choisit $p>0$ conformément à (8.2) et $\mu>0$ de sorte que l'on ait (conformément à (7.8) et (7.9))

$$0<c=\frac{h}{\mu}(e^{\mu T}-1)<1,$$

ce qui dépend de l'inégalité (1.6). Enfin on fixe, conformément à (4.10) et (8.1), le nombre $L>0$ de manière que l'on ait

$$0<L\leqslant \min\Big[\frac{(1-c)k}{MT(T+3/2)(MT/m+1)e^{T}}, \frac{mr}{MT[(T/2+1)p+1]}\Big].$$

Ayant ainsi fixé les constantes, on peut appliquer le théorème de Schauder à l'espace $E$, l'ensemble $Z$ et la transformation $W(\psi)$, car le sous-ensemble $Z$ de l'espace de Banach $E$ est convexe et fermé (lemme 2). La transformation $W$ est continue dans l'ensemble $Z$ (lemme 7) et $W(Z)\subset E$. L'image de l'ensemble $Z$ par l'intermédiaire de la transformation $W$, c'est-à-dire l'ensemble $W(Z)$, est compact (lemme 10) et contenu dans $Z$ (lemme 15). En vertu du théorème de Schauder il existe donc une fonction $\psi_0\in Z$ qui constitue le point fixe de la transformation $W$, c'est-à-dire telle que

$$\psi_0 = W(\psi_0).$$

Posons

$$a_0(\lambda) = V(\psi_0):$$

$\big(a_0(\lambda), \psi_0(t,\lambda)\big)$ satisfait au système d'équations fonctionnelles (2.1), (2.2), (2.3) et, par suite, la fonction $\varphi_0(t,\lambda)$ définie par les relations (2.4), (2.5) constitue la solution de notre problème c'est-à-dire elle satisfait aux conditions (1.8), (1.9) et (1.10) du théorème 2.

Pour vérifier (1.10), remarquons que l'on a, en vertu de (2.4), (2.5), (3.2), (3.7) et (4.10)

$$|\varphi_0(t,\bar{\lambda})-\varphi_0(t,\bar{\bar{\lambda}})| \leqslant \left\{\frac{TM}{m}\left[\left(\frac{T}{2}+1\right)p+1\right]+Tp\right\}|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|,$$

ce qui donne même quelques renseignements plus précis sur le nombre $\varkappa$ car, en vertu de (8.2), on doit avoir

$$\varkappa \geqslant \frac{TM}{m}\left(\frac{T}{2}+1\right)\left\{\frac{3(MT)^2/m}{1-\dfrac{(MT)^2}{m}\left[\dfrac{17}{12}T+3\right]}+1\right\}+\frac{3M^2T^3/m}{1-\dfrac{(MT)^2}{m}\left[\dfrac{17}{12}T+3\right]}.$$

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

**9. Exemples.** Nous allons envisager quelques exemples qui feront mieux voir les possibilités d'application du théorème 1.

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle

$$x'' = -A^2\sigma(\lambda)x-\lambda\cos(\omega t-x') \tag{9.1}$$

et supposons que $\sigma(\lambda)$ soit une fonction de classe $C^1$, $\sigma(0)=1$, $A\neq 0$. Dans ces conditions le second membre de l'équation (9.1) c'est-à-dire la fonction $f(t,x,x',\lambda) = -A^2\sigma(\lambda)x-\lambda\cos(\lambda t-x)$ est de classe $C^1$ par rapport à $(t,x,y,\lambda)$ (elle est même analytique par rapport à $(t,x,x')$) et périodique par rapport à $t$, de période $T=2\pi/\omega$, $T>0$. Pour $\lambda=0$ l'équation (9.1) se réduit à

$$x'' = -A^2x. \tag{9.2}$$



On a donc $f(t,0,0,0)\equiv 0$. De plus $\Big|\int\limits_0^T f'_x(t,0,0,0)dt\Big| = A^2T = m$, donc $m>0$. $|f'_x(t,0,0,0)| = A^2$, $|f'_y(t,0,0,0)| = 0$, $|f'_\lambda(t,0,0,0)| = |\cos\omega t|\leqslant 1$. Posons

$$M = \max(A^2, 1). \tag{9.3}$$

Alors, pour qu'il soit possible d'appliquer le théorème 1, il faut supposer que

$$m = A^2T = \frac{A^2 2\pi}{\omega} > (MT)^2\left(3T+\frac{7}{2}\right) = \frac{(2\pi M)^2}{\omega^2}\left(\frac{6\pi}{\omega}+\frac{7}{2}\right).$$

C'est-à-dire, en supposant que $\sigma(\lambda)$ est de classe $C^1$ et $\sigma(0)=1$, pour que l'équation (9.2) ait une solution périodique $\varphi(t,\lambda)$ de période $T$, il suffit que les constantes $M, T, A$ satisfassent à l'inégalité

$$A^2 > M^2T\left(3T+\frac{7}{2}\right) = \frac{2M^2\pi}{\omega}\left(\frac{6\pi}{\omega}+\frac{7}{2}\right). \tag{9.4}$$

Dans ces conditions, il résulte du théorème 2 que l'équation (9.1) a une solution périodique $\varphi(t,\lambda)$, valable pour $|\lambda|\leqslant L$ ($L$ est une constante positive convenablement choisie).

Evidemment la condition (9.4) est seulement suffisante et l'on ne peut rien dire sur l'existence des solutions périodiques de l'équation (9.1) si (9.4) n'est pas satisfait. Mais, les méthodes connues dans la théorie des équations à petit paramètre ne s'appliquent pas à l'équation (9.1) si $\sigma(\lambda)$ n'a pas de dérivées d'ordre plus élevé ($>1$), bien que l'on ait l'inégalité (9.4).

Exemple 2. Il est facile de voir que la condition (9.4) est aussi suffisante pour l'existence d'une solution périodique $\varphi(t,\lambda)$ de période $T=2\pi/\omega$ de l'équation

$$x'' = -A^2\sigma(\lambda)x-\lambda\cos\big(\omega t-\gamma(x,x',\lambda)\big), \tag{9.5}$$

où $\sigma(\lambda)$ et $\gamma(x,y,\lambda)$ sont de classe $C^1$ pour $|\lambda|\leqslant L$ et $(x,y)$ quelconques. De même que dans l'exemple 1, cette condition ne se laisse pas déduire des théorèmes connus.

Exemple 3. Considérons l'équation

$$x'' = -A^2\sigma(\lambda)x-\cos(\omega t-\lambda x), \tag{9.6}$$

où $\sigma(0)=1$ et $\sigma(\lambda)$ est de classe $C^1$, $\omega>0$. Pour $\lambda=0$ l'équation (9.6) prend la forme

$$x'' = -A^2x-\cos\omega t \tag{9.7}$$

et a une solution périodique de période $T = 2\pi/\omega$ donnée par la formule $x = B\cos\omega t$. En appliquant à l'équation (9.6) la transformation $\Pi(t, x)$: $y = x - B\cos\omega t$, on obtient l'équation

$$(9.8) \quad y'' = -A^2\sigma(\lambda)(y + B\cos\omega t) - \cos\big(\omega t - \lambda(y + B\cos\omega t)\big) + B\omega^2\cos\omega t,$$

pour $\lambda = 0$ on a

$$y'' = -A^2\sigma(0)(y + B\cos\omega t) - \cos\omega t + B\omega^2\cos\omega t.$$

Comme

$$-A^2B\cos\omega t - \cos\omega t = -B\omega^2\cos\omega t,$$

on a donc pour $\lambda = 0$

$$(9.9) \qquad y'' = -A^2 y.$$

De même que dans les exemples précédents, on a $m = TA^2$, $|f'_y(t, 0, 0, 0)| = A^2$, $|f'_\lambda(t, 0, 0, 0)| = 0$, et enfin

$$|f'_\lambda(t, 0, 0, 0)| \leqslant A^2B|\sigma'(0)| + B.$$

Par conséquent, si $M = \max\big(A^2B|\sigma'(0)| + B, A^2\big)$, et les constantes $A, T, M$ satisfont à l'inégalité (10.4), il existe (pour $|\lambda| \leqslant L$, où $L > 0$ est convenablement choisi) une solution périodique $\varphi(t, \lambda)$ de l'équation (9.8) de période $T = 2\pi/\omega$, telle que $\varphi(t, 0) \equiv 0$. En raison de la forme de la transformation $\Pi(t, x)$, il en résulte immédiatement que l'équation (9.6) a une solution périodique de période $T = 2\pi/\omega$, $x = \tilde{\varphi}(t, \lambda)$ (valable pour $|\lambda| \leqslant L$), telle que

$$\tilde{\varphi}(t, 0) \equiv B\cos\omega t.$$

### Travaux cités


[1] А. Белецкий, *Заметка о применении метода Банаха-Каччиополи-Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Бюллетень Польской Академии Наук III, 4 (1956), p. 255-258.

[2] А. М. Кац, *Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным*, Прикладная Мат. и Мех. 19 (1955), p. 13-32.

[3] H. Morimoto, *On the perturbation of the linear system with constant coefficients possessing periodic solutions*, Mathematica Japonicae 3 (1955), p. 103-120.

[4] И. Г Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Москва-Ленинград 1949.


*Reçu par la Rédaction le 7. 1. 1958*

---

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

# A note on Fourier series of functions of an infinite number of variables

by J. Musielak (Poznań)

**1.** We consider the *torus space* $Q_\omega$ of all sequences of real numbers $x = (x_1, x_2, \ldots)$, with all coordinates reduced mod 1. We denote by

$$\int_{Q_\omega} f(x)\,dw_\omega$$

the integral of a measurable function $f(x)$, defined in $Q_\omega$, over the whole space $Q_\omega$, and by

$$\int_{Q_H} f(x)\,dw_H$$

where $H = (k_1, k_2, \ldots)$ is a non-empty sequence of indices, the integral of $f(x)$ over the space of subsequences $(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots)$ (see [1], p. 266). The set $H$ may be finite or infinite.

**2.** We shall investigate a special orthonormal system, defined in $Q_\omega$. Let $E = (1, 2, \ldots)$ be the set of all positive integers and $A$ a subset of $E$. Then we indicate by $\bar{A}$ the complement of $A$ with regard to $E$. Further let $m = (m_1, m_2, \ldots)$ be a sequence of non-negative integers such that $m_i = 0$ for sufficiently large $i$. By $n(m)$ we indicate the number of positive integers in the sequence $m = (m_1, m_2, \ldots)$. It is easily seen that the system of functions

$$(2.1) \qquad \varphi_m^A(x) = 2^{n(m)/2}\prod_{i\in A}\cos 2\pi m_i x_i \prod_{j\in\bar{A}}\sin 2\pi m_j x_j, \qquad \varphi_m^A(x) \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad Q_\omega,$$

is an orthonormal one. We indicate by

$$a_m^A(f) = \int_{Q_\omega} f(x)\varphi_m^A(x)\,dw_\omega$$

the Fourier coefficients of a function $f \in L^2(Q_\omega)$ with regard to the system $\{\varphi_m^A(x)\}$. Continuing the investigations of [2] and [3] we establish for