ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Premier problème de Fourier pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique de la forme

$$(1)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c(A,t)u-\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(A,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}(A,t,u)$, $b_\alpha(A,t,u)$ et la fonction $F(A,t,u,v_1,\ldots,v_n)$ sont déterminés dans la région fermée

$$(2)\qquad A(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega+S,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad |u|\leqslant R,$$

respectivement dans la région fermée

$$(2')\qquad A(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega+S,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad |u|\leqslant R,\quad |v_\alpha|\leqslant R'$$

R, R', T étant des nombres positifs donnés, Ω désignant un domaine borné dans l'espace euclidien à n dimensions, limité par la surface fermée S, et $(x_1,\ldots,x_n)$ désignent les coordonnées rectangulaires du point $A\in\Omega$. La fonction $c(A,t)$ est déterminée dans la région fermée

$$(3)\qquad A\in\Omega+S;\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Nous admettons les hypothèses suivantes:

I. Les fonctions réelles $a_{\alpha\beta}(A,t,u)$ sont bornées et vérifient la condition de Hölder, relativement à toutes les variables, de la forme

$$(4)\qquad |a_{\alpha\beta}(A,t,u)-a_{\alpha\beta}(A_1,t_1,u_1)|<\text{const}\cdot[r_{AA_1}^{h}+|u-u_1|^{h'}+|t-t_1|^{h''}].$$

II. Les fonctions réelles $b_\alpha(A,t,u)$ et $F(A,t,u,v_1,\ldots,v_n)$ sont bornées, continues par rapport à l'ensemble des variables dans la région (2)

ou (2′) et vérifient la condition de Hölder relativement aux variables A, u, v:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &|b_\alpha(A,t,u)-b_\alpha(A_1,t,u_1)| < \text{const}\cdot[r_{AA_1}^h+|u-u_1|^{h'}],\\ &|F(A,t,u,v_1,\ldots,v_n)-F(A_1,t,u_1,v_1',\ldots,v_n')|\\ &\qquad < \text{const}\cdot\Big[r_{AA_1}^h+|u-u_1|^{h'}+\sum_{\alpha=1}^n |v_\alpha-v_\alpha'|^{h'}\Big]. \end{aligned}$$

III. La fonction réelle $c(A,t)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables dans la région (3) et vérifie la condition de Hölder relativement à la variable A:

$$(6)\qquad |c(A,t)-c(A_1,t)| < \text{const}\cdot r_{AA_1}^h.$$

IV. La forme quadratique

$$(7)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(A,t,u)X_\alpha X_\beta$$

est définie positive dans la région (2).

V. La surface S vérifie les conditions connues de Liapounoff:

a. l'angle $\Delta(P,Q)$ entre deux normales aux points arbitraires P, Q de la surface S satisfait à l'inégalité:

$$(8)\qquad \Delta(P,Q) < \text{const}\cdot r_{PQ}^\varkappa \qquad (0<\varkappa\leqslant 1);$$

b. il existe un nombre positif δ tel que la sphère K, de centre au point arbitraire P de la surface S et de rayon δ, découpe une portion S_K de cette surface, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection sur le plan tangent en P est un ensemble de points qui correspondent dans cette projection d'une façon biunivoque aux points de la portion S_K.

Dans toutes les hypothèses précédentes r_{AA_1} désigne la distance entre les points A, A_1 et les exposants $h, h', h'', \varkappa$ sont des constantes positives non supérieures à l'unité.

2. Énoncé du problème et formules principales. Dans le travail [5] nous avons résolu le problème aux limites mixte concernant l'équation (1).

Dans ce travail nous résoudrons le problème suivant: trouver une fonction réelle $u(A,t)$ qui: 1) vérifie l'équation (1) en tout point intérieur (A,t) de la région (3), 2) pour $0<t\leqslant T$ prend en tout point P de la surface S des valeurs limites nulles

$$(9)\qquad \lim_{A\to P} u(A,t)=0,$$

3) vérifie la condition initiale

$$(10)\qquad \lim_{t\to 0} u(A,t)=0$$

en tout point intérieur $A\in\Omega$.

Le problème posé présente d'autres difficultés que le premier problème classique de Fourier, puisque le potentiel de double couche n'existe pas pour l'équation (1), à cause des hypothèses générales (4) et (5) concernant les coefficients.

Dans les considérations suivantes nous nous appuierons sur nos résultats exposés dans les travaux [1], [2], [3].

D'abord prolongeons les fonctions $a_{\alpha\beta}(A,t,u)$, $b_\alpha(A,t,u)$, $c(A,t)$ sur tout l'espace E (t restant dans l'intervalle $\langle 0,T\rangle$) de façon que: 1° elles soient continues par rapport à l'ensemble de variables (A,t,u), si $A\in E$, $0\leqslant t\leqslant T$, $|u|\leqslant R$, 2° elles vérifient les conditions de Hölder (4), (5), (6), 3° la forme quadratique (7) reste définie et positive, 4° on ait

$$(11)\qquad a_{\alpha\beta}(A,t,u)=\begin{cases}1 & (\alpha=\beta),\\ 0 & (\alpha\neq\beta),\end{cases}\qquad b_\alpha(A,t,u)=0,\qquad c(A,t)=0$$

si le point A est situé en dehors ou sur la surface S' limitant le domaine borné Ω', arbitrairement choisi, contenant à l'intérieur le domaine Ω avec la surface S.

Introduisons maintenant, dans la région $[A\in E;\ 0<t<T]$, l'opération différentielle suivante sur la fonction $v(A,t)$:

$$(12)\qquad \hat{\Psi}^{(u)}[v(A,t)]=\sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(A,t,u(A,t))\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+ \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha(A,t,u(A,t))\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}+c(A,t)v-\frac{\partial v}{\partial t}$$

où $u(A,t)$ est une fonction réelle arbitraire dans la région $[A\in E;\ 0\leqslant t\leqslant T]$ vérifiant les conditions

$$(13)\qquad \begin{aligned} &|u(A,t)-u(A_1,t_1)| \leqslant k[r_{AA_1}^\theta+|t-t_1|^{\theta'/2}],\\ &|u(A,t)|\leqslant R,\qquad u(A,t)=0,\quad \text{si}\quad A\in E-\Omega,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned}$$

θ et θ' désignant deux nombres positifs arbitrairement fixés, inférieurs à l'unité, et k étant une constante positive.

Considérons maintenant les fonctions suivantes(1), dépendant de la fonction u:

$$\vartheta_{(u)}^{M,\tau}(A,B)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a^{\alpha\beta}\big(M,\tau,u(M,\tau)\big)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta), \tag{14}$$

$$w_{(u)}^{M,\tau}(A,t;B,\tau)=(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta_{(u)}^{M,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right], \tag{14'}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)\\&=w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)+\int_{\tau}^{t}\iint_{E(M)}w_{(u)}^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\Phi^{(u)}(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta\end{aligned} \tag{15}$$

où: 1) $A(x_1,\dots,x_n)$ et $B(\xi_1,\dots,\xi_n)$ sont deux points arbitraires du domaine Ω et $0\leqslant\tau<t\leqslant T$; 2) $a^{\alpha\beta}$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $\|a_{\alpha\beta}\|$; 3) la fonction $\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)$ est une solution déterminée de l'équation intégrale

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(u)}(A,t)\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)&=\hat{\Psi}_{A,t}^{(u)}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]+\\&+\int_{\tau}^{t}\iint_{E(M)}\hat{\Psi}_{A,t}[w_{(u)}^{M,\tau}(A,t;M,\zeta)]\Phi^{(u)}(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta\end{aligned} \tag{16}$$

où l'on a posé

$$\lambda_n^{(u)}(A,t)=(2\sqrt{\pi})^n[\det|a^{\alpha\beta}(A,t,u(A,t))|]^{-1/2}. \tag{17}$$

Le symbole B dans l'équation intégrale (16) désigne un point arbitrairement fixé dans l'espace E et τ — une valeur arbitraire dans l'intervalle $(0,t)$; ces symboles jouent le rôle de paramètres.

Remarquons que dans l'équation (16) l'opération différentielle $\hat{\Psi}_{A,t}^{(u)}$, définie par la formule (12), est relative aux variables A,t et que ces différentiations ne concernent pas la fonction $u(B,\tau)$ dans l'expression $w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)$, dont les coefficients ne vérifient que la condition de Hölder. D'après les formules (12), (13), (14), (15), le résultat de cette opération est le suivant:

(1) Nous conservons le signe d'intégrale triple pour l'intégrale de volume et le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface (à $n-1$ dimensions) dans l'espace à n dimensions.

$$\begin{aligned}&\hat{\Psi}_{A,t}^{(u)}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]\\&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\big[a_{\alpha\beta}(A,t,u(A,t))-a_{\alpha\beta}(B,\tau,u(B,\tau))\big]\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]+\\&+\sum_{\alpha=1}^{n}b_\alpha(A,t,u(A,t))\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]+c(A,t)w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\end{aligned} \tag{18}$$

où l'on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\\&=-\frac{1}{2}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{\vartheta_{(u)}^{B,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right]\sum_{\beta=1}^{n}a^{\alpha\beta}(B,\tau,u(B,\tau))(x_\beta-\xi_\beta),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]\\&=+\frac{1}{4}(t-\tau)^{-n/2-2}\exp\left[-\frac{\vartheta_{(u)}^{B,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right]\Big[-2(t-\tau)a^{\alpha\beta}(B,\tau,u(B,\tau))+\\&+\sum_{\gamma,\delta=2}^{n}a^{\alpha\gamma}(B,\tau,u(B,\tau))a^{\beta\delta}(B,\tau,u(B,\tau))(x_\gamma-\xi_\gamma)(x_\delta-\xi_\gamma)\Big].\end{aligned} \tag{20}$$

Remarquons que, d'après l'hypothèse faite sur la forme quadratique (7) et son prolongement, il existe deux constantes positives g_1 et g_2, telles qu'on ait les inégalités

$$g_1r_{AB}^2<\vartheta_{(u)}^{M,\tau}(A,B)<g_2r_{AB}^2,$$

quelles que soient les valeurs des variables $A\in E$, $B\in E$, $M\in E$, $0\leqslant\tau\leqslant T$.

En s'appuyant maintenant sur les inégalités admises (4), (13) et en utilisant la méthode de recherche des limitations à singularités séparées, exposée dans nos travaux [1] et [3], on trouve que la fonction $w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)$ et le résultat de l'opération (18) vérifient dans tout l'espace les inégalités suivantes:

$$|w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)|<\begin{cases}\dfrac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\dfrac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}}, & \text{si}\quad r_{AB}\leqslant\varrho_0,\\[2ex]\dfrac{\text{const}\cdot(t-\tau)^{\mu_1}}{r_{AB}^{n+2\mu_1}}, & \text{si}\quad r_{AB}>\varrho_0,\end{cases} \tag{21}$$

$$\hat{\Psi}_{A,t}^{(u)}[w_{(u)}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)]<\begin{cases}\dfrac{C_1k^h+C_2}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\dfrac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu_*-h_*}}, & \text{si}\quad r_{AB}\leqslant\varrho_0,\\[2ex]\dfrac{C_1'(t-\tau)^{\mu_1}}{r_{AB}^{n+2\mu_1}}, & \text{si}\quad r_{AB}>\varrho_0,\end{cases} \tag{22}$$

où: 1) μ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité, 2) μ_* est arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}h_*, 1)$, où h_* désigne le plus petit des quatre nombres

$$h_* = \min(h,\ \theta h',\ 2h'',\ \theta' h'), \tag{23}$$

3) μ_1 est une constante positive arbitraire, 4) les constantes positives C_1, C_1' et C_2 ne dépendent pas de la fonction $u(A,t)$, 5) ϱ_0 désigne une constante positive fixée arbitrairement, 6) k est le coefficient dans l'inégalité de Hölder (13), concernant la fonction $u(A,t)$.

La fonction $u(A,t)$ étant donnée, l'équation intégrale (16) est doublement singulière, puisque son noyau est non borné si $r_{AM}\to 0$, $t-\zeta\to 0$ et, en outre, le domaine d'intégration est illimité. Néanmoins, les limitations (22) à faibles singularités assurent, d'après notre travail [3], l'existence de la solution unique de l'équation (16) sous la forme

$$\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau) = [\lambda_n^{(u)}(A,t)]^{-1}\hat{\Psi}^{(v)}_{A,t}[w^{B,\tau}_{(u)}(A,t;B,\tau)]+ \tag{24}$$

$$+\int_\tau^t\int_{E(M)}\mathfrak{M}^{(u)}(A,t;M,\zeta)\,\hat{\Psi}^{(u)}_{M,\zeta}[w^{B,\tau}_{(u)}(M,\zeta;B,\tau)][\lambda_n^{(u)}(M,\zeta)]^{-1}dM\,d\zeta,$$

où la fonction $\mathfrak{M}^{(u)}$ est la somme de la série des noyaux itérés absolument et uniformément convergente, abstraction faite de quelques termes non bornés. La formule (24) est valable en tout point $A\neq B$ de l'espace E et pour $0\leqslant\tau<t<T$.

La fonction (24) admet des limitations de la même forme que (22)

$$|\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)| < \begin{cases} \dfrac{C_3(k)}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\dfrac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu_*-h_*}}, & \text{si} \quad r_{AB}\leqslant\varrho_0, \\ \dfrac{C_3'(t-\tau)^{\mu_1}}{r_{AB}^{n+2\mu_1}}, & \text{si} \quad r_{AB}>\varrho_0, \end{cases} \tag{25}$$

où $C_3(k)$ est une constante positive qui dépend du coefficient de Hölder k pour la fonction u et la constante positive C_3 est indépendante de la fonction u.

On peut démontrer, de la même façon que dans le travail [1] (page 44), que la fonction (24) vérifie, par rapport au point A, la condition de Hölder de la forme

$$|\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)-\Phi^{(u)}(A_1,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{\inf r_{AB}^{n+3}}\,r_{AA_1}^{\theta h_*} \quad (0<\theta<1) \tag{26}$$

dans tout domaine borné et fermé Ω^*, situé dans l'espace E et ne contenant pas le point B. Il en résulte, d'après le même travail, que la

fonction (15) est une solution fondamentale de l'équation

$$\hat{\Psi}^{(u)}_{A,t}[\Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)] = 0 \tag{27}$$

en tout point $A\neq B$ de l'espace E et pour $0\leqslant\tau<t<T$. Signalons que cette solution fondamentale $\Gamma^{(u)}$ dépend de la fonction $u(A,t)$ arbitrairement donnée, vérifiant les conditions (13).

D'après les inégalités (21), (22) et (25) la solution fondamentale (15) admet une limitation de la forme

$$|\Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)| < \frac{K(k)}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}} \quad (r_{AB}\leqslant\varrho_0) \tag{28}$$

où la constante $K(k)$ dépend du coefficient de Hölder k et μ est fixé à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2},1)$. Nous allons encore déterminer la fonction de Green du premier problème de Fourier relative à l'équation

$$\hat{\Psi}^{(u)}(v) = 0, \tag{29}$$

la fonction $u(A,t)$, vérifiant les conditions (13), étant donnée. Nous appelons fonction de Green relativement à l'équation (29) dans le domaine Ω, limité par la surface S, la fonction, que nous désignerons par

$$G^{(u)}(A,t;B,\tau),$$

des deux couples de variables dans la région

$$A\in\Omega, \quad B\in\Omega \quad (A\neq B), \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T \tag{30}$$

déterminée par les propriétés suivantes:

I. La fonction $G^{(u)}$ tend vers zéro:

$$\lim_{A\to P}G^{(u)}(A,t;B,\tau) = 0 \tag{31}$$

si le point A tend vers un point arbitraire P de la surface S, limitant le domaine Ω, le point B restant fixe à l'intérieur du domaine Ω et $0\leqslant\tau<t\leqslant T$.

II. La fonction $G^{(u)}$ est une somme de la forme

$$G^{(u)}(A,t;B,\tau) = \Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)-H^{(u)}(A,t;B,\tau) \tag{32}$$

où la fonction $H^{(u)}(A,t;B,\tau)$ est régulière et tend vers zéro:

$$\lim_{t\to\tau}H^{(u)}(A,t;B,\tau) = 0 \tag{33}$$

si $t\to\tau$, quel que soit le point A à l'intérieur du domaine Ω, même si ce point coïncide avec le point intérieur B du domaine Ω.

III. La fonction $H^{(u)}$ satisfait à l'équation

$$\hat{V}^{(u)}_{A,t}[H^{(u)}(A,t;B,\tau)]=0 \tag{34}$$

par rapport aux variables A, t en tout point intérieur $A\in\Omega$, même si $A=B$, pour $0\leqslant\tau<t\leqslant T$.

Il en résulte que la composante régulière $H^{(u)}(A,t;B,\tau)$ de la fonction de Green, dépendant de la fonction donnée u, est une solution du premier problème de Fourier relativement à l'équation (1). Notamment cette fonction vérifie: 1) l'équation (1) par rapport aux variables A, t dans la région $A\in\Omega$, $0<\tau<t<T$; 2) la condition limite à la surface S

$$\lim_{A\to P}H^{(u)}(A,t;B,\tau)=\Gamma^{(u)}(P,t;B,\tau) \tag{35}$$

B étant fixé à l'intérieur du domaine Ω et $0\leqslant\tau<t\leqslant T$; 3) la condition initiale (33).

La fonction de Green $G^{(u)}(A,t;B,\tau)$ admet donc une singularité de même espèce que la solution fondamentale $\Gamma^{(u)}$ si $A\to B$, $t\to\tau$. D'après les résultats du travail [3], la fonction $H^{(u)}$ est unique et elle s'exprime par l'intégrale de surface

$$H^{(u)}(A,t;B,\tau)=\int_\tau^t\iint_{S(Q)}\Gamma^{(u)}(A,t;Q,\zeta)\varphi^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)\,dQ\,d\zeta \tag{36}$$

analogue au potentiel de simple couche, où la densité $\varphi^{(u)}$ est une solution de l'équation intégrale singulière de la forme

$$\begin{aligned}\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t,0)|}}\varphi^{(u)}(P,t;B,\tau)&\\ =-\int_\tau^t\iint_{S(Q)}\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u)}(P,t;Q,\zeta)]\varphi^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)\,dQ\,d\zeta+&\\ +\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u)}(P,t;B,\tau)]&\end{aligned} \tag{37}$$

où B, τ jouent le rôle de paramètres et la dérivée transversale d/dT_P est déterminée par la formule

$$\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u)}(P,t;B,\tau)]=\sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(P,t,0)\cos(N_P,x_\beta)\Gamma^{(u)}_{x_\alpha}(P,t;B,\tau), \tag{38}$$

x_α étant les coordonnées du point P.

D'après notre travail [2], le noyau de l'équation intégrale (37) admet une limitation à singularités faibles séparées

$$\left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u)}(P,t;Q,\zeta)]\right|<\frac{\text{const}}{(t-\zeta)^{\tilde{\mu}}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\tilde{\mu}-\mu_1}}, \tag{39}$$

puisqu'on a $n+1-2\tilde{\mu}-\mu_1<n-1$, si $\tilde{\mu}$ est choisi à l'intérieur de l'intervalle

$$1-\tfrac{1}{2}\varkappa_1<\tilde{\mu}<1, \tag{40}$$

où $\varkappa_1=\min(h_*,\varkappa)$.

L'équation intégrale (37) a donc une solution unique donnée par la formule de Volterra

$$\begin{aligned}\varphi^{(u)}(P,t;B,\tau)=f^{(u)}(P,t;B,\tau)+&\\ +\int_\tau^t\iint_{S(Q)}\mathfrak{N}^{(u)}(P,t;Q,\zeta)f^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)\,dQ\,d\zeta,&\end{aligned} \tag{41}$$

où

$$f^{(u)}(P,t;B,\tau)=\frac{2}{(2\sqrt{\pi})^n}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t,0)|}\,\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u)}(P,t;B,\tau)] \tag{42}$$

et $\mathfrak{N}^{(u)}$ est le noyau résolvant du noyau

$$N^{(u)}(P,t;Q,\zeta)=-f^{(u)}(P,t;Q,\zeta), \tag{43}$$

donné par la somme de la série des noyaux itérés

$$\mathfrak{N}^{(u)}(P,t;Q,\zeta)=\sum_{\nu=0}^\infty N^{(u)}_\nu(P,t;Q,\zeta)\qquad(N^{(u)}_0=N^{(u)}). \tag{44}$$

En s'appuyant sur la limitation (39), on prouve que les termes de la série (44) sont bornés à partir d'un indice ν_0 et qu'ils vérifient l'inégalité

$$|N^{(u)}_{\nu_0+m}(P,t;Q,\zeta)|<\frac{g'}{(1-\tilde{\mu})m}\cdot\frac{[g''(1-\tilde{\mu})(t-\zeta)^{1-\tilde{\mu}}]^m}{m(1-\tilde{\mu})}\qquad(m=1,2,\ldots) \tag{45}$$

assurant la convergence absolue de la série (44) (g' et g'' sont des constantes positives).

Remarquons que, d'après notre travail [3], la fonction de Green vérifie l'inégalité de la forme

$$|G^{(u)}(A,t;B,\tau)|<\frac{g(k)}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2\mu_*}}\qquad\left(1-\frac{h_*}{2}<\mu_*<1\right) \tag{46}$$

pour tout couple de points différents A, B du domaine Ω, si $0\leqslant\tau<t\leqslant T$; $g(k)$ est une constante positive dépendant du coefficient de Hölder pour la fonction u.

Si $f(A,t)$ est une fonction donnée, bornée et continue dans le domaine $A\in\Omega$, $0<t<T$ et vérifiant la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales, alors la formule

$$(47)\qquad v(A,t)=-\int_0^t\iint_{\Omega(B)} G^{(u)}(A,t;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}f(B,\tau)\,dB\,d\tau$$

donne la fonction unique qui: 1) vérifie l'équation

$$(48)\qquad \hat{\Psi}^{(u)}[v(A,t)]=f(A,t)$$

à l'intérieur du domaine $[A\in\Omega;\ 0<t<T]$, 2) vérifie la condition limite

$$\lim_{A\to P} v(A,t)=0$$

en tout point P de la surface S pour $0<t\leqslant T$, 3) vérifie la condition initiale

$$\lim_{t\to 0} v(A,t)=0$$

en tout point intérieur $A\in\Omega$.

3. Résolution du problème. D'après les considérations précédentes, si la solution demandée u du problème proposé dans ce travail existe, nous pouvons affirmer que cette solution doit satisfaire à l'équation intégro-différentielle

$$(49)\qquad u(A,t)=-\int_0^t\iint_{\Omega(B)} G^{(u)}(A,t;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F\left[B,\tau,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots;\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau.$$

Nous sommes donc amenés à la résolution de l'équation intégro-différentielle (49) avec la fonction inconnue $u(A,t)$. Nous voyons que le second membre de cette équation contient la fonction inconnue u d'une façon implicite par l'intermédiaire des formules (12), (14), (15), (16), (18), (24), (32), (36), (41), (42).

D'après les formules (32) et (36), nous pouvons écrire l'équation intégro-différentielle (49) sous la forme

$$(50)\qquad u(A,t)=-\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F\left[B,\tau,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau+ +\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma^{(u)}(A,t;Q,\zeta)\eta^{(u)}(Q,\zeta)\,dQ\,d\zeta,$$

où l'on a posé

$$(51)\qquad \eta^{(u)}(Q,\zeta)=\int_0^\zeta\iint_{\Omega(B)}\varphi^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F\left[B,\tau,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau.$$

Le second membre de l'équation (50) est la somme d'un potentiel de charge spatiale et d'un potentiel de simple couche de densité $\eta^{(u)}(Q,\zeta)$. Pour résoudre l'équation intégro-différentielle (50), considérons le système d'équations intégrales

$$u(A,t)=-\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma^{(u)}(A,t;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F[B,\tau,u(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau+ +\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma^{(u)}(A,t;Q,\zeta)\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q,\zeta)\,dQ\,d\zeta,$$

$$(52)\qquad u_\alpha(A,i)=-\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma_{x_\alpha}^{(u)}(A,t;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F[B,\tau,u(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau+ +\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{x_\alpha}^{(u)}(A,t;Q,\zeta)\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q,\zeta)\,dQ\,d\zeta \qquad(\alpha=1,2,\ldots,n)$$

à $n+1$ fonctions inconnues $u(A,t),u_1(A,t),\ldots,u_n(A,t)$ dans la région $[A\in\Omega+S;\ 0\leqslant t\leqslant T]$.

On a posé

$$(53)\qquad \eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q,\zeta)=\int_0^\zeta\iint_{\Omega(B)}\varphi^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)[\lambda_n^{(u)}(B,\tau)]^{-1}\times \times F[B,\tau,u(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau,$$

où la fonction $\varphi^{(u)}$ est donnée par la formule (41).

Nous résoudrons le système (52) en appliquant le théorème topologique de J. Schauder [6]:

Toute transformation continue d'un ensemble convexe, borné, fermé et contenu dans un espace de Banach, en un sous-ensemble compact a au moins un point invariant.

Dès lors, soit un espace fonctionnel A composé de tous les systèmes de fonctions réelles, bornés et continues $[u(A,t),u_1(A,t),\ldots,u_n(A,t)]$ définies dans la région $[A\in\Omega+S;\ 0\leqslant t\leqslant T]$.

Cet espace sera linéaire, normé et complet, donc il sera un espace de Banach, si nous adoptons les définitions connues suivantes: 1) des opérations linéaires

$$[u, u_1, \ldots, u_n]+[\overline{u}, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n] = [u+\overline{u}, u_1+\overline{u}_1, \ldots, u_n+\overline{u}_n], \tag{54}$$
$$\lambda[u, u_1, \ldots, u_n] = [\lambda u, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_n],$$

2) de la norme du point $U(u, u_1, \ldots, u_n)$

$$\|U\| = \sup|u|+\sum_{\alpha=1}^{n}\sup|u_\alpha|, \tag{55}$$

3) de la distance des deux points U, V

$$\delta(U, V) = \|U-V\|. \tag{56}$$

Considérons maintenant dans l'espace A l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les points $U(u, u_1, \ldots, u_n)$ dont les composantes vérifient les inégalités

$$|u(A, t)| \leqslant R, \quad |u_\alpha(A, t)| \leqslant R', \tag{57}$$
$$|u(A, t)-u(A_1, t_1)| \leqslant k[r_{AA_1}^{\theta}+|t-t_1|^{\theta'/2}],$$

k étant une constante positive arbitrairement choisie, θ et θ' des constantes positives inférieures à l'unité, aussi arbitrairement choisies. On peut montrer sans peine que cet ensemble $\mathcal{C}$ est convexe et fermé.

En tenant compte de la forme des équations intégrales (52), transformons l'ensemble $\mathcal{C}$ à l'aide des relations suivantes:

$$v(A, t) = -\int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma^{(u)}(A, t; B, \tau)[\lambda_n^{(u)}(B, \tau)]^{-1}\times$$
$$\times F[B, \tau, u(B, \tau), u_1(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)]dBd\tau+$$
$$+\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma^{(u)}(A, t; Q, \zeta)\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q, \zeta)dQd\zeta,$$

(58)

$$v_\alpha(A, t) = -\int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma_{x_\alpha}^{(u)}(A, t; B, \tau)[\lambda_n^{(u)}(B, \tau)]^{-1}\times$$
$$\times F[B, \tau, u(B, \tau), u_1(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)]dBd\tau+$$
$$+\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{x_\alpha}^{(u)}(A, t; Q, \zeta)\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q, \zeta)dQd\zeta$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous allons montrer que les relations (58) font correspondre à tout point $U(u, u_1, \ldots, u_n)$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ un point déterminé $V(v, v_1, \ldots, v_n)$

de l'espace A. Dans ce but nous démontrerons d'abord le théorème auxiliaire suivant:

THÉORÈME 1. *Si* $[u, u_1, \ldots, u_n]$ *est un système de fonctions continues vérifiant les conditions* (57), *l'intégrale* (53) *est déterminée dans la région* $[Q \in S;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ *et vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$|\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q, \zeta)-\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q_1, \zeta_1)| < K_1(k)M_F[r_{QQ_1}^{\theta\varkappa_1}+|\zeta-\zeta_1|^{\theta'\varkappa_1/3}]. \tag{59}$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que la solution (41) de l'équation (37) vérifie, d'après notre travail [3], l'inégalité

$$|\varphi^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau)| < \frac{\text{const}}{(\zeta-\tau)^{\tilde{\mu}}}\cdot\frac{1}{r_{QB}^{n+1-2\tilde{\mu}}} \tag{60}$$

à faibles singularités, si $1-\frac{1}{2}\varkappa_1 < \tilde{\mu} < 1$, et l'intégrale (53) est déterminée et continue dans la région $[Q \in S;\ 0 \leqslant \zeta \leqslant T]$. Elle vérifie l'inégalité

$$|\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q, \zeta)| < K_1'(k)M_F, \tag{61}$$

$K_1'(k)$ étant une constante positive dépendant du coefficient de Hölder k dans (57) et M_F désignant la borne supérieure de la fonction $|F|$.

D'après l'équation (37) et la formule (42), nous pouvons écrire la fonction (53) sous la forme

$$\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q, \zeta) = \eta_1(Q, \zeta)-\eta_2(Q, \zeta), \tag{62}$$

où l'on a posé

$$\eta_1(Q, \zeta) \tag{62'}$$
$$= \int_0^\zeta \iiint_{\Omega(B)} f^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau)[\lambda_n^{(u)}(B, \tau)]^{-1}F[B, \tau, u(B, \tau), \ldots, u_n(B, \tau)]dBd\tau,$$

$$\eta_2(Q, \zeta) = \int_0^\zeta \iint_{S(P)} f^{(u)}(Q, \zeta; P, t)\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(P, t)dPdt. \tag{62''}$$

D'après le théorème 5 du notre travail [3] et la formule (38), l'intégrale de volume (62') vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|\eta_1(Q, \zeta)-\eta_1(Q_1, \zeta_1)| < \text{const}\ M_F[r_{QQ_1}^{\theta_1}+|\zeta-\zeta_1|^{\theta_1'/2}]; \tag{63}$$

θ_1 désigne le plus petit des deux nombres $h, \varkappa$, si $h+\varkappa < 2$, ou un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, si $h+\varkappa = 2$; θ_1' désigne un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité si $\frac{1}{2} \leqslant h'' \leqslant 1$, ou $\theta_1' = 2h''$ si $0 < h'' \leqslant \frac{1}{2}$.

D'après le théorème 4 du travail [2] (page 81), l'intégrale (62'') vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|\eta_2(Q, \zeta)-\eta_2(Q_1, \zeta_1)| < \text{const}\cdot\sup|\eta|\cdot[r_{QQ_1}^{\theta\varkappa_1}+|\zeta-\zeta_1|^{\theta'\varkappa_1/3}]. \tag{64}$$

En rapprochant les inégalités (61), (63), (64) on obtient la conclusion (59) du théorème auxiliaire; $K_1(k)$ désigne une constante positive dépendant du coefficient de Hölder k pour la fonction $u(A,t)$.

En s'appuyant sur la propriété démontrée de la fonction (53) et sur les propriétés du potentiel de simple couche étudiées dans les travaux [2] et [4], nous pouvons affirmer que les fonctions $v(A,t)$, $v_1(A,t),\ldots,v_n(A,t)$ ont des valeurs limites déterminées en tout point P de la surface S pour $0<t\leqslant T$; en outre, ces fonctions et leurs valeurs limites à la surface S tendent uniformément vers zéro si $t\to 0$, d'après la propriété $\lim_{\zeta\to 0}\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q,\zeta)=0$ pour $Q\in S$. En admettant ces valeurs nulles comme valeurs des fonctions $v, v_1,\ldots,v_n$ à la frontière de leur région, nous pouvons affirmer que ces fonctions sont continues dans la région fermée $[A\in\Omega+S;\ 0\leqslant t\leqslant T]$ et, par conséquent, que le point $V(v,v_1,\ldots,v_n)$, transformé du point $U(u,u_1,\ldots,u_n)$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ appartient à l'espace Λ.

Cherchons la condition pour que tout point transformé V appartienne à l'ensemble $\mathcal{C}$.

D'après les limitations (28), (61), nous aurons

$$|v(A,t)|<\frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}M_F\left[\frac{\omega_n}{2\mu}CK(k)L^{2\mu}+K_1'(k)s\right], \tag{65}$$

C et s désignant les bornes supérieures des fonctions

$$C=\sup[\lambda_n^{(u)}(A,t)]^{-1},\qquad s=\sup_{A\in\Omega}\left[\int\!\!\int_S\frac{dQ}{r_{AQ}^{n-2\mu}}\right], \tag{66}$$

L — le diamètre du domaine Ω et $\omega_n=2(\sqrt{\pi})^n\Gamma^{-1}(n/2)$ l'aire de la surface sphérique unitaire à $n-1$ dimensions. Remarquons ensuite que, d'après les théorèmes 2, 3, 5 de notre travail [3], la première $I_1(A,t)$ des intégrales, exprimant la fonction $v(A,t)$, vérifie la condition de Hölder

$$|I_1(A,t)-I_1(A_1,t_1)|\leqslant \text{const}\cdot CM_F[r_{AA_1}+|t-t_1|^{\theta'}]$$

et la seconde I_2 des ces intégrales, la condition

$$|I_2(A,t)-I_2(A_1,t_1)|\leqslant \text{const}\cdot\sup|\eta|\,[r_{AA_1}^{\theta}+|t-t_1|^{\theta'/2}],$$

donc toute fonction $v(A,t)$ vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|v(A,t)-v(A_1,t_1)|\leqslant M_FK_2(k)[r_{AA_1}^{\theta}+|t-t_1|^{\theta'/2}], \tag{67}$$

$K_2(k)$ étant une constante positive dépendant du coefficient k.

Pour trouver la limitation des fonctions $v_a(A,t)$ dans les formules (58), nous nous appuierons sur l'inégalité

$$|\Gamma_{x_a}^{(u)}(A,t;B,\tau)|<\frac{K_\mu'(k)}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n+1-2\mu}} \tag{68}$$

où $K_\mu'(k)$ désigne une constante positive dépendant de k et de $\mu>\frac{1}{2}$.

Nous constatons, d'une façon analogue, que la première $J_1(A,t)$ des intégrales exprimant la fonction $v_a(A,t)$ admet la limitation

$$|J_1(A,t)|\leqslant M_F\frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\cdot\frac{\omega_n}{2\mu-1}CK'(k)L^{2\mu-1}. \tag{69}$$

Pour trouver une limitation de la seconde intégrale $J_2(A,t)$, écrivons

$$J_2(A,t)=\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(P,t)\int_0^t\int\!\!\int_{S(Q)}\Gamma_{x_a}^{(u)}(A,t;Q,\zeta)\,dQd\zeta+ \tag{70}$$

$$+\int_0^t\int\!\!\int_{S(Q)}\Gamma_{x_a}^{(u)}(A,t;Q,\zeta)[\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(Q,\zeta)-\eta^{(u,u_1,\ldots,u_n)}(P,t)]\,dQd\zeta,$$

P désignant le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $A\in\Omega$. Il en résulte

$$|J_2(A,t)|\leqslant M_FK_1'(k)q+M_FK_1(k)K_\mu'(k)\frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\int\!\!\int_S\frac{r_{PQ}^{\theta\varkappa_1}dQ}{r_{AQ}^{n+1-2\mu}}+ \tag{71}$$

$$+M_FK_1(k)K_{\mu_1}'(k)\frac{T^{1-\mu_1+\theta'\varkappa_1/3}}{1-\mu_1+\theta'\varkappa_1/3}\int\!\!\int_S\frac{dQ}{r_{AQ}^{n+1-2\mu_1}},$$

q désignant la borne supérieure de la valeur absolue de la première des intégrales (70), la constante μ étant choisie à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\theta\varkappa_1,\ 1)$ et μ_1 à l'intérieur de l'intervalle $(1,\ 1+\frac{1}{3}\theta'\varkappa_1)$. Les intégrales qui figurent au second membre de l'inégalité (71) admettent des bornes supérieures déterminées, donc en réunissant les limitations (69) et (71) nous obtenons la limitation demandée pour les fonctions $v_a(A,t)$:

$$|v_a(A,t)|<M_FK_3(k) \tag{72}$$

où le second membre est la somme des seconds membres (69) et (71), où à la place des intégrales on a substitué leurs bornes supérieures.

D'après les inégalités (57), (65), (67), (72), l'ensemble $\mathcal{C}'$ des points transformés fera partie de l'ensemble $\mathcal{C}$ si les constantes du problème vérifient les inégalités

$$M_F\frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\left[\frac{\omega_n}{2\mu}CK(k)L^{2\mu}+K_1'(k)s\right]\leqslant R, \tag{73}$$

$$M_FK_2(k)\leqslant k,\qquad M_FK_3(k)\leqslant R'.$$

Les constantes du problème $K(k), K_1'(k), K_2(k), K_3(k)$ sont indépendantes de la borne supérieure M_F de la fonction $|F|$, donc, k étant fixé arbitrairement, on peut toujours satisfaire aux inégalités (73), si M_F est suffisamment petite. Le choix du coefficient k étant arbitraire, il est naturel de choisir sa valeur de telle façon que l'intervalle résultant des inégalités (73) pour M_F soit aussi grand que possible. Or, les coefficients K, K_1', K_2, K_3 dépendant du coefficient k d'une manière fort compliquée, on ne peut pas faire de calcul plus précis.

Pour appliquer le théorème de Schauder, il suffit de démontrer encore les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2. *L'opération fonctionnelle définie par les relations* (58) *est continue dans l'espace* A.

Démonstration. Soit, en effet, une suite arbitraire de points $U_m[u^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)}]$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ tendant vers un point $U[u, u_1, \dots, u_n]$ de cet ensemble, c'est-à-dire qu'on a $\delta(U_m, U) \to 0$. Il faut et il suffit de démontrer que la suite des points transformés $V_m[v^{(m)}, v_1^{(m)}, \dots, v_n^{(m)}]$ de l'espace A converge vers le point $V[v, v_1, \dots, v_n]$ de l'espace A qui correspond au point limite U par les relations (58).

Remarquons donc que, d'après la définition de la distance (56) dans l'espace A, les suites fonctionnelles $\{u^{(m)}\}, \{u_1^{(m)}\}, \dots, \{u_n^{(m)}\}$ liées à la suite de points $\{U_m\}$ convergent uniformément respectivement vers les fonctions $u, u_1, \dots, u_n$ composantes du point limite U, vérifiant les inégalités (57). Or, les opérations (58) étant le résultat des opérations intégrales définies par les formules (15), (24), nous ferons l'analyse de ces opérations. Nous n'étudierons que le second terme intégral, le plus difficile, de la somme qui donne la fonction $v_a(A, t)$ dans les relations (58). Nous allons donc montrer que la suite de fonctions

$$(74)\qquad W_m(A, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{x_a}^{(u^{(m)})}(A, t; Q, \zeta)\eta^{(u^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)})}(Q, \zeta)\, dQ d\zeta \qquad (m = 1, 2, \dots)$$

définies dans la région $[A \in \Omega + S;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$, tend uniformément vers la fonction

$$(75)\qquad W(A, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{x_a}^{(u)}(A, t; Q, \zeta)\eta^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta)\, dQ d\zeta$$

si $m \to \infty$, a étant fixé.

Nous démontrerons d'abord la convergence uniforme

$$(76)\qquad \lim_{m\to\infty} \eta^{(u^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)})}(Q, \zeta) = \eta^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta)$$

dans la région $[Q \in S;\ 0 \leqslant \zeta \leqslant T]$. D'après les formules (41) et (53), nous avons

$$(77)\qquad \eta^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta) = \eta_1^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta) + \eta_2^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta)$$

où

$$(77')\qquad \eta_1^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta) = \int_0^\zeta \iiint_{\Omega(B)} f^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau)[\lambda_n^{(u)}(B, \tau)]^{-1} \times F[B, \tau, u(B, \tau), u_1(B, \tau), \dots, u_n(B, \tau)]\, dB d\tau,$$

$$(77'')\qquad \eta_2^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta) = \int_0^\zeta \iint_{S(P)} \mathfrak{N}^{(u)}(Q, \zeta; P, t)\eta_1^{(u, u_1, \dots, u_n)}(P, t)\, dP dt.$$

Ensuite nous décomposons la différence

$$(78)\qquad \begin{aligned} \Delta^{(m)}(Q, \zeta) &= \eta_1^{(u^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)})}(Q, \zeta) - \eta_1^{(u, u_1, \dots, u_n)}(Q, \zeta) \\ &= \Delta_1^{(m)}(Q, \zeta) + \Delta_2^{(m)}(Q, \zeta) + \Delta_3^{(m)}(Q, \zeta) \end{aligned}$$

en trois termes correspondants aux trois facteurs consécutifs de la fonction sous le signe intégrale. Nous n'étudierons que le premier:

$$(79)\qquad \Delta_1^{(m)}(Q, \zeta) = \int_0^\zeta \iiint_{\Omega(B)} [f^{(u^{(m)})}(Q, \zeta; B, \tau) - f^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau)] \times [\lambda_n^{(u)}(B, \tau)]^{-1} F[B, \tau, u(B, \tau), u_1(B, \tau), \dots, u_n(B, \tau)]\, dB d\tau$$

puisque la convergence vers zéro des termes $\Delta_2^{(m)}$ et $\Delta_3^{(m)}$ est évidente a priori, si $m \to \infty$.

Pour étudier la différence (79), remarquons que, d'après les formules (38) et (42), nous avons

$$(80)\qquad f^{(u^{(m)})}(Q, \zeta; B, \tau) - f^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau) = 2(2\sqrt{\pi})^{-n} \sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(Q, \zeta, 0)|} \times \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(Q, \zeta, 0)\cos(N_Q, x_\beta)[\Gamma_{\xi_\alpha}^{u^{(m)}}(Q, \zeta; B, \tau) - \Gamma_{\xi_\alpha}^{(u)}(Q, \zeta; B, \tau)]$$

où $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les coordonnées du point Q. Nous sommes donc amenés à étudier la différence des dérivées des solutions fondamentales, correspondant aux fonctions $u^{(m)}$ et u. En s'appuyant sur les formules (14), (14'), (4) et en utilisant la méthode connue de séparation des singularités,

on arrive aux limitations suivantes pour la différence des dérivées des quasi-solution:

$$(81)\qquad |w^{B,\tau}_{(u^{(m)})\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)-w^{B,\tau}_{(u)\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)|<\frac{\text{const}\cdot\sup|u^{(m)}-u|^{h'}}{(\zeta-\tau)^{\mu}r_{QB}^{n+1-2\mu}},$$

où μ est arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$ et

$$(82)\qquad |w^{B,\tau}_{(u^{(m)})\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)-w^{B,\tau}_{(u)\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)|<\frac{\text{const}\cdot(\zeta-\tau)^{\mu_1}\sup|u^{(m)}-u|^{h'}}{r_{QB}^{n+1+2\mu_1}},$$

où μ_1 est un nombre positif arbitraire.

Pour étudier la différence des dérivées

$$(83)\qquad \overline{w}_{(u)\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)=\int_{\tau}^{\zeta}\iiint_{E(M)} w^{M,\sigma}_{(u)\xi\alpha}(Q,t;M,\sigma)\Phi^{(u)}(M,\sigma;B,\tau)\,dM\,d\sigma$$

des termes intégrales dans la formule (15), correspondant aux fonctions $u^{(m)}$ et u, remarquons que, d'après l'équation (16), la différence $\Phi^{(u)}-\Phi^{(u^m)}$ vérifie l'équation intégrale

$$(84)\qquad \Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)-\Phi^{(u^m)}(A,t;B,\tau)=Z(A,t;B,\tau)+$$
$$+\int_{\tau}^{t}\iiint_{E(M)} L^{(u)}(A,t;M,\zeta)[\Phi^{(u)}(M,\zeta;B,\tau)-\Phi^{(u^m)}(M,\zeta;B,\tau)]\,dM\,d\zeta$$

où l'on a posé

$$(85)\qquad L^{(u)}(A,t;M,\zeta)=[\lambda_n^{(u)}(A,t)]^{-1}\hat{\Psi}^{(u)}_{A,t}[w^{M,\zeta}_{(u)}(A,t;M,\zeta)],$$

$$(86)\qquad Z(A,t;B,\tau)=[L^{(u)}(A,t;B,\tau)-L^{(u^m)}(A,t;B,\tau)]+$$
$$+\int_{\tau}^{t}\iiint_{E(M)}[L^{(u)}(A,t;M,\zeta)-L^{(u^m)}(A,t;M,\zeta)]\Phi^{(u^m)}(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta.$$

Il en résulte que la différence (84) s'exprime par la formule

$$(87)\qquad \Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)-\Phi^{(u^m)}(A,t;B,\tau)$$
$$=Z(A,t;B,\tau)+\int_{\tau}^{t}\iiint_{E(M)}\mathfrak{M}^{(u)}(A,t;M,\zeta)Z(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta,$$

où $\mathfrak{M}^{(u)}$ est le noyau résolvant du noyau $L^{(u)}$, le même que dans la formule (24).

En tenant compte des formules (85), (86), (18) et des limitations (81), (82), (22), (25), nous concluons, de même que dans le travail [3], que la différence (87) vérifie les inégalités suivantes:

$$(88)\qquad |\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)-\Phi^{(u^m)}(A,t;B,\tau)|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{\sup|u-u^{(m)}|}{r_{AB}^{n+2-2\mu_*-h_*}},$$

si $r_{AB}\leqslant\varrho_0$, $1-h_*/2<\mu_*<1$,

$$(89)\qquad |\Phi^{(u)}(A,t;B,\tau)-\Phi^{(u^m)}(A,t;B,\tau)|<\frac{\text{const}\cdot(t-\tau)^{\mu_1}\sup|u-u^{(m)}|}{r_{AB}^{n+2}},$$

si $r_{AB}>\varrho_0$, où ϱ_0 et μ_1 sont des nombres positifs, fixés arbitrairement.

En s'appuyant sur les inégalités (81), (82), (88) et (89), nous concluons que la fonction (83) vérifie l'inégalité

$$(90)\qquad |\overline{w}_{(u)\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)-\overline{w}_{(u^m)\xi\alpha}(Q,\zeta;B,\tau)|<\frac{\text{const}}{(\zeta-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{\sup|u-u^{(m)}|}{r_{QB}^{n+1-2\mu_*-h_*}},$$

si $Q\in S$, $B\in\Omega$. Il en résulte pour la fonction (80) la limitation

$$(91)\qquad |f^{(u)}(Q,\zeta;B,\tau)-f^{(u^m)}(Q,\zeta;B,\tau)|<\frac{\text{const}}{(\zeta-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{\sup|u-u^m|}{r_{QB}^{n+1-2\mu_*}},$$

qui montre d'une façon explicite que l'intégrale (79) tend uniformément vers zéro, si $m\to\infty$.

D'une façon semblable on fera l'étude de l'intégrale (77'') et on arrivera à la propriété limite (76).

Nous passerons maintenant à la démonstration de la convergence uniforme de la suite de fonctions (74) vers la fonction (75). Écrivons

$$(92)\qquad W_m(A,t)$$
$$=\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma^{(u^{(m)})}_{x_a}(A,t;Q,\zeta)[\eta^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}(Q,\zeta)-\eta^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}(P,t)]\,dQ\,d\zeta$$
$$+\eta^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}(P,t)\int_0^t\iint_{S(Q)}(\Gamma^{(u^{(m)}}_{x_a}(A,t;Q,\zeta)\,dQ\,d\zeta$$

et une décomposition analogue pour l'intégrale (75); on a désigné par P le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $A\in\Omega$. Considérons une sphère K_A de centre A et décomposons la première $J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}(A,t)$ des intégrales (92) en une somme

$$(93)\qquad J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}(A,t)=J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}_{S_K}(A,t)+J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})}_{S-S_K}(A,t)$$

d'intégrales étendues à la portion S_K de la surface S située à l'intérieur de la sphère K_A et à la partie extérieure $S-S_K$. Une décomposition analogue

$$J^{(u,u_1,\dots,u_n)}(A,t) = J^{(u,u_1,\dots,u_n)}_{S_K}(A,t)+J^{(u,u_1,\dots,u_n)}_{S-S_K}(A,t) \tag{93'}$$

se fera pour les fonctions $u, u_1, \dots, u_n$. Signalons que l'ensemble S_K peut être vide.

D'après les limitations (59) et (68), nous aurons l'inégalité (voir (71))

$$|J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\dots,u_n^{(m)})}_{S_K}(A,t)| \leqslant M_F K_1(k) K'_\mu(k) \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \iint_{S_K} \frac{r_{PQ}^{\alpha_1} dQ}{r_{AQ}^{n+1-2\mu}} + \tag{94}$$

$$+M_F K_1(k) K'_{\mu_1}(k) \frac{T^{1-\mu_1+\theta'\varkappa_1/3}}{1-\mu_1+\frac{1}{3}\theta'\varkappa_1} \iint_{S_K} \frac{dQ}{r_{AQ}^{n+1-2\mu_1}} \qquad (1<\mu_1<1+\tfrac{1}{3}\theta'\varkappa_1)$$

vraie pour toute valeur de l'indice m et pour les fonctions limites $u, u_1, \dots, u_n$. Les intégrales qui figurent dans l'inégalité (94) tendent uniformément vers zéro, si le rayon R_A de la sphère K_A tend vers zéro, donc à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un rayon $R_A(\varepsilon)$ tel que

$$|J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\dots,u_n^{(m)})}_{S_K}(A,t)| \leqslant \tfrac{1}{4}\varepsilon. \tag{95}$$

Le rayon $R_A(\varepsilon)$ de la sphère K_A étant fixé, nous pouvons, d'après les propriétés démontrées des fonctions $\Gamma^{(u^{(m)})}_{x_a}$ et $\eta^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\dots,u_n^{(m)})}$, faire correspondre au nombre ε un nombre $\delta_1(\varepsilon)$ tel que

$$|J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\dots,u_n^{(m)})}_{S-S_K}(A,t)-J^{(u,u_1,\dots,u_n)}_{S-S_K}(A,t)| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{96}$$

si $|u-u^{(m)}|<\delta_1(\varepsilon)$, $|u_\alpha-u_\alpha^{(m)}|<\delta_1(\varepsilon)$ $(\alpha=1,2,\dots,n)$.

Les inégalités (95), (96) nous permettent de conclure la convergence uniforme de la suite de fonctions (93) vers la fonction (93'):

$$\lim_{m\to\infty} J^{(u^{(m)},u_1^{(m)},\dots,u_n^{(m)})}(A,t) = J^{(u,u_1,\dots,u_n)}(A,t). \tag{97}$$

La convergence du facteur de la seconde intégrale dans la somme (92) étant démontrée, il nous reste à étudier la convergence de l'intégrale

$$X^{(u^{(m)})}(A,t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma^{(u^{(m)})}_{x_\alpha}(A,t;Q,\zeta)\,dQd\zeta \tag{98}$$

si $u^{(m)} \to u$.

Remarquons que cette intégrale est convergente, mais n'est pas en général absolument convergente, si le point A tend vers le point P de la surface S, à cause de la forte singularité de la fonction sous le signe d'intégration si $A \to P$. L'étude de l'intégrale (98) exige donc une méthode plus délicate. Supposons d'abord que $r_{AP} \geqslant \frac{1}{2}\delta$, où δ est une constante dans les conditions de Liapounoff pour la surface S. Dans ce cas, d'après l'étude précédente de la fonction $\Gamma^{(u)}_{x_\alpha}$, l'intégrale (98) converge vers l'intégrale $X^{(u)}(A,t)$ (si $u^{(m)} \to u$) uniformément dans l'ensemble des points A du domaine Ω tels que $r_{AP} \geqslant \frac{1}{2}\delta$.

Il reste donc à étudier le cas $r_{AP} \leqslant \frac{1}{2}\delta$. Remarquons que dans la formule (98) la dérivée au point A dans une direction quelconque est une combinaison linéaire à coefficients constants des dérivées par rapport aux coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ du point A dans un système d'axes dont l'origine est au point P, l'axe Px_n étant normal à la surface S (dirigé vers l'intérieur du domaine Ω) et les axes $Px_1, Px_2, \dots, Px_{n-1}$ contenus dans le plan tangent à la surface S au point P. Nous supposons donc dans la formule (98) que $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$; l'étude du cas $\alpha = n$ est plus facile.

Soit donc un cylindre W, d'axe Px_n et de rayon $\delta' < \delta$ fixé indépendamment du point P, qui découpe sur la surface S une portion S_W et sur le plan tangent en P — une hypersphère S'_W — projection de la portion S_W. Nous décomposons l'intégrale (98) en deux parties

$$X^{(u^{(m)})}(A,t) = X^{(u^{(m)})}_{S_W}(A,t)+X^{(u^{(m)})}_{S-S_W}(A,t) \tag{99}$$

étendues à la portion S_W et à la surface extérieure $S-S_W$. Si $Q \in S-S_W$, la distance r_{AQ} admet une borne inférieure positive et, d'après les considérations précédentes, la convergence du second terme de la somme (99) est évidente. Il ne reste qu'à étudier le premier terme, étendu à la portion S_W.

Remarquons donc que, d'après la formule (15) pour la solution fondamentale, on décompose la fonction X_{S_W} en deux termes et il suffit d'étudier le premier terme

$$\overline{X}^{(u^{(m)})}_{S_W}(A,t) = \int_0^t \iint_{S_W} w^{Q,\zeta}_{(u^{(m)})}(A,t;Q,\zeta)\,dQd\zeta, \tag{100}$$

puisque la fonction sous le signe d'intégration du second terme admet une faible singularité et sa convergence a été démontrée. Considérons maintenant l'intégrale

$$Y^{(u^{(m)})}(A,t) = \int_0^t \iint_{S'_W} w^{P,t}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A,t;Q',\zeta)\,dQ'd\zeta \tag{101}$$

étendue à la projection S'_W de la portion S_W sur le plan tangent en P; dQ' désigne l'élément d'aire du domaine S'_W au point Q' — projection du point Q. Les coefficients de la forme quadratique (14) étant fixés au point (P, t), nous aurons d'après (14′)

$$w^{P,t}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A, t; Q', \zeta) = -w^{P,t}_{(u^{(m)})_{\xi_\alpha}}(A, t; Q', \zeta) \tag{102}$$

où ξ_α désigne la coordonnée du point Q' (ou Q).

En appliquant le théorème de Green, nous pouvons donc écrire l'intégrale (101) sous forme d'une intégrale

$$Y^{(u^{(m)})} = -\int_0^t \Big[\int_{C'_W} w^{P,t}_{(u^{(m)})}(A, t; Q', \zeta)\cos\nu_\alpha\, dl'_{Q'}\Big]d\zeta \tag{103}$$

étendue à la frontière à $(n-2)$ dimensions C'_W du domaine S'_W; ν_α désigne l'angle que fait la normale extérieure à la surface C'_W au point Q' avec l'axe Px_α et $dl'_{Q'}$ — l'élément d'aire de la surface C'_W au point Q'.

L'intégrale sous la forme (103) est régulière et sa convergence uniforme

$$\lim_{u^{(m)}\to u} Y^{(u^{(m)})}(A, t) = Y^{(u)}(A, t) \tag{104}$$

est évidente. Écrivons maintenant l'intégrale (100) sous la forme

$$\bar{X}^{(u^{(m)})}_{S_W}(A, t) = Y^{(u^{(m)})}(A, t) + \int_0^t\iint_{S'_W}\Big[w^{Q,\zeta}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A, t; Q, \zeta)\gamma(Q) - w^{P,t}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A, t; Q', \zeta)\Big]dQ'd\zeta \tag{105}$$

$\gamma(Q)$ désignant l'inverse de la valeur absolue du cosinus de l'angle que fait la normale à la surface S au point Q avec l'axe Px_n. D'après les résultats du travail [4], la fonction sous le signe d'intégration admet de faibles singularités si $A \to P$; nous aurons notamment, quel que soit m,

$$|w^{Q,\zeta}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A, t; Q, \zeta)\gamma(Q) - w^{P,t}_{(u^{(m)})_{x_\alpha}}(A, t; Q', \zeta)| < \frac{\text{const}}{(t-\zeta)^{1-\theta\varkappa_1/2}}\cdot\frac{r^{\varkappa_1}_{PQ'}}{r^{n-1+\theta\varkappa_1}_{AQ'}} \tag{106}$$

où $\varkappa_1 = \min(\varkappa, h_*)$; $0 < \theta < 1$; la constante est indépendante du point A et de t.

Nous décomposons de nouveau l'intégrale $J^{(u^{(m)})}$ de la différence (105) en deux parties

$$\bar{X}^{(u^{(m)})}_{S_W}(A, t) = Y^{(u^{(m)})}(A, t) + J^{(u^{(m)})}_{S''_W} + J^{(u^{(m)})}_{S'_W - S''_W}$$

étendues à la sphère S''_W dans le plan tangent concentrique à la sphère S'_W et au domaine extérieur $S'_W - S''_W$. D'après la limitation (106), on peut faire correspondre au nombre $\varepsilon > 0$ un rayon de la sphère S''_W suffisamment petit pour qu'on ait

$$|J^{(u^{(m)})}_{S''_W}| < \tfrac{1}{6}\varepsilon, \quad |J^{(u)}_{S''_W}| < \tfrac{1}{6}\varepsilon.$$

La sphère S''_W étant fixée et la distance $r_{AQ'}$ admettant, pour $Q' \in S'_W - S''_W$ une borne inférieure positive, nous pouvons faire correspondre au nombre ε un nombre $\delta_2(\varepsilon)$ tel que

$$|J^{(u^{(m)})}_{S'_W - S''_W} - J^{(u)}_{S'_W - S''_W}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |Y^{(u^{(m)})}(A, t) - Y^{(u)}(A, t)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

si $|u^{(m)} - u| < \delta_2(\varepsilon)$, quel que soit A.

Cela exprime la convergence uniforme

$$\lim_{u^{(m)}\to u} \bar{X}^{(u^{(m)})}_{S_W}(A, t) = \bar{X}^{(u)}_{S_W}(A, t),$$

donc la convergence uniforme de la fonction (98) ou (99):

$$\lim_{u^{(m)}\to u} X^{(u^{(m)})}(A, t) = X^{(u)}(A, t). \tag{107}$$

Le théorème 2 est donc démontré.

THÉORÈME 3. *L'ensemble transformé $\mathcal{C}'$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ par les relations* (58) *est compact.*

Démonstration. Toutes les fonctions $v(A, t), v_\alpha(A, t)$ liées à l'ensemble $\mathcal{C}'$ sont évidemment bornées dans leur ensemble, donc d'après le théorème connu d'Arzelà il suffit démontrer que les fonctions (58) sont équicontinues. Cette propriété est évidente d'une façon explicite pour les fonctions $v(A, t)$, puisque, d'après les théorèmes 2, 3 du notre travail [2], ces fonctions vérifient la même inégalité de Hölder de la forme

$$|v(A, t) - v(A_1, t_1)| < C(k)M_F[r^\theta_{AA_1} + |t - t_1|^{\theta/2}] \tag{108}$$

où la constante positive $C(k)$ ne dépend que de la borne supérieure des coefficients $a_{\alpha\beta}$, de leurs coefficients de Hölder et du coefficient k. La première $J_1(A, t)$ des intégrales exprimant les fonctions $v_\alpha(A, t)$, d'après le théorème 5 du notre travail [2], vérifie aussi l'inégalité de Hölder dont la forme est commune pour tout ensemble $\mathcal{C}$:

$$|J_1(A, t) - J_1(A_1, t_1)| < \text{const}\cdot M_F[r^\theta_{AA_1} + |t - t_1|^{\theta'/2}], \tag{109}$$

donc les fonctions $J_1(A, t)$ sont aussi équicontinues.

Il reste à étudier la seconde intégrale $J_2(A,t)$ de la somme (58), que nous avons mise sous la forme (70). D'après les résultats de notre travail [4], les fonctions $J_2(A,t)$ tendent uniformément vers des valeurs limites déterminées $J_2(P,t)$ sur la surface S et l'estimation de la continuité de ces fonctions $J_2(P,t)$ sur la surface S ne dépend que de la limite supérieure $K_1'(k)M_F$ (voir (61)) de la densité η et de son coefficient de Hölder dans (59) de la forme $K_1(k)M_F$. Donc ces fonctions sont équicontinues sur la surface S, c'est-à-dire qu'au nombre ε on peut faire correspondre un nombre $\delta(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et de M_F, tel que

$$|J_2(P,t)-J_2(P_1,t)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{si} \quad r_{PP_1} < \delta(\varepsilon), \quad |t-t_1| < \delta(\varepsilon).$$

Ensuite, en tenant compte de la tendance uniforme des fonctions J_2 basée sur la réprésentation (70), nous concluons qu'au nombre ε on peut faire correspondre une surface S_ε située à l'intérieur du domaine Ω assez près de la surface S pour que dans le domaine situé entre les surfaces S, S_ε et sur ces surfaces elles-mêmes les fonctions $J_1(A,t)$ soient équicontinues, c'est-à-dire qu'on ait

$$|J_2(A,t)-J_2(A_1,t_1)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad r_{AA_1} < \delta_1(\varepsilon), \quad |t-t_1| < \delta_1(\varepsilon).$$

La surface S_ε étant fixée, remarquons que la distance r_{PQ} pour les points $A \in \Omega - S_\varepsilon$ admet une borne inférieure positive D_ε et par conséquent les dérivées de la fonction sous le signe d'intégration $\Gamma^{(u)}_{x_\alpha}(A,t;Q,\zeta)$ par rapport aux variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ sont bornées, continues et admettent une limitation de la forme

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\beta}[\Gamma^{(u)}_{x_\alpha}(A,t;Q,\zeta)]\right| < \frac{\text{const}}{D_\varepsilon^{n+3}} \qquad (x_\beta = x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

commune pour toutes les fonctions u.

Les fonctions J_2 vérifient donc dans $\Omega - S_\varepsilon$ l'inégalité de Lipschitz de la forme

$$|J_2(A,t)-J_2(A_1,t_1)| < \frac{\text{const}}{D_\varepsilon^{n+3}}[r_{AA_1}+|t-t_1|]$$

commune pour tous les points U de l'ensemble $\mathcal{E}$ et les fonctions $J_2(A,t)$ sont équicontinues. Le théorème 3 est donc démontré.

En s'appuyant sur le théorème de Schauder nous concluons donc l'existence dans l'ensemble $\mathcal{E}$ d'un point au moins $U^*(u^*, u_1^*, \ldots, u_n^*)$ invariant relativement à la transformation fonctionnelle (58), donc l'existence de la solution $(u^*, u_1^*, \ldots, u_n^*)$ du système d'équations intégrales (52). Or, d'après les propriétés des potentiels de charge spatiale et de simple couche (voir [2]), nous avons

$$u_\alpha^*(A,t) = \partial u^*(A,t)/\partial x_\alpha$$

à l'intérieur de la région $[A \in \Omega;\ 0 < t < T]$, donc la fonction trouvée $u^*(A,t)$ vérifie à l'intérieur de cette région l'équation intégro-différentielle (50) ou (49). Remarquons maintenant que, d'après les propriétés des intégrales exprimant les fonctions $u_\alpha^*(A,t)$ (voir (109)), ces fonctions vérifient la condition de Hölder dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$, donc la fonction

$$[\lambda_n^{(u)}(B,t)]^{-1}F[B,\tau,u^*(B,\tau),\ldots,u_n^*(B,\tau)]$$

vérifie une condition de Hölder par rapport au point B dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$.

Il en résulte, d'après les propriétés des potentiels étudiées dans le travail [1], que la fonction u^*, étant la somme de deux potentiels (50), vérifie l'équation aux dérivées partielles donnée (1):

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t,u^*(A,t))\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t,u^*(A,t))\frac{\partial u^*}{\partial x_\alpha} + c(A,t)u^*(A,t) - \frac{\partial u^*}{\partial t} = F\left(A,t,u^*(A,t),\frac{\partial u^*}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u^*}{\partial x_n}\right)$$

en tout point intérieur (A,t) du domaine $[\Omega;(0,T)]$.

D'après les propriétés de la fonction de Green, étudiées dans le travail [3], la fonction $u^*(A,t)$ vérifie la condition imposée à la surface S:

$$\lim_{A\to P} u^*(A,t) = 0 \qquad (0 < t \leqslant T)$$

et évidemment la condition initiale

$$\lim_{t\to 0} u^*(A,t) = 0.$$

La fonction $u^*(A,t)$ trouvée est donc une solution du problème posé et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si les conditions* I, II, III, IV, V, *précisées dans l'introduction, sont satisfaites et les constantes du problème vérifient les inégalités* (73), *il existe au moins une fonction* $u^*(A,t)$ *qui satisfait à l'équation* (1) *en tout point intérieur de la région* (3), *vérifie la condition limite* (9) *en tout point* P *de la surface* S, *pour* $0 < t \leqslant T$, *et la condition initiale* (10).

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5 (1956), p. 25-56.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

[3] — *Étude d'une fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1958), p. 288-307.

[4] — *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 6 (1957), p. 162-194.

[5] — *Problème aux limites pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue*, Ricerche di Matematica 5(1956).

[6] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 1-6.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 3. 5. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

On the density of the equilibrium distributions of plane sets

by A. Szybiak (Kraków)

I. Let D be a domain (bounded or not) in the z-plane and the set F be its boundary. We assume that F is of positive capacity(1). A point $\zeta \in D$ being fixed, we consider

$$\inf_{\mu} \int\int \log|z-a|^{-1} d\mu(a) d\mu(z) \quad \text{if} \quad \zeta = \infty,$$

or

$$\inf_{\mu} \int\int (\log|z-a|^{-1} - 2\log|\zeta-a|^{-1}) d\mu(a) d\mu(z) \quad \text{if} \quad \zeta \neq \infty.$$

μ varies over the class of all non-negative Radon measures whose supports are contained in F and whose total mass is equal to 1. It is proved in [2] that by the above assumptions there exists a unique measure which realises the considered infimum. This measure is called the *equilibrium distribution of the set F with respect to the point ζ*(2) and we denote it by μ_ζ. Then the Green function(3) $g(z, \zeta)$ of the domain D is expressed by

$$g(z, \infty) = \int \log|z-a|^{-1} d\mu_\infty(a) - \gamma_\infty \tag{1}$$

or

$$g(z, \zeta) = \log|z-\zeta|^{-1} - \int \log|z-a|^{-1} d\mu_\zeta(a) - \gamma_\zeta \tag{1'}$$

with respect to $\zeta = \infty$ or $\zeta \neq \infty$. The quantity γ_ζ does not depend on z and is expressed by the formules

$$\gamma_\zeta = 0 \quad \text{if} \quad \infty \notin D, \qquad \gamma_\zeta = g(\zeta, \infty) \quad \text{if} \quad \infty \in D.$$

The details and elegant proofs are to be found in [5].

(1) For the definition cf. [5] and [3].

(2) Cf. [2]. O. Frostman uses the term *masse du balayage* instead of *equilibrium distribution*.

(3) We mean here and throughout this paper the generalised (in Wiener's sense) Green function.