[3] C. Olech, Z. Opial, T. Ważewski, *Sur le problème d'oscillation des intégrales de l'équation $y''+g(t)y=0$*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 621-626.

[4] B. Wiswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences. Sect. A, 5 (1952), p. 335-341.

[5] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 200-209.

[6] В. А. Кондратьев, *Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y''+p(x)y=0$*, ДАН СССР 113 (1957), p. 742-745.

*Reçu par la Rédaction le 9. 1. 1958*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

# Sur la répartition asymptotique des zéros des fonctions caractéristiques du problème de Sturm

par Z. Opial (Kraków)

Envisageons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(p(x)u')'+(\lambda\varrho(x)+q(x))u=0, \tag{1}$$

où $p(x)$ et $\varrho(x)$ sont des fonctions continues et positives dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, $q(x)$ est une fonction continue dans le même intervalle et $\lambda$ est un paramètre. Tout nombre $\lambda$, pour lequel l'équation (1) admet une solution non banale $u(x)$ satisfaisant à la condition aux limites

$$u(a)=u(b)=0, \tag{2}$$

est appelé *valeur caractéristique* de l'équation (1). D'après le théorème bien connu de Sturm, il existe une suite infinie de valeurs caractéristiques $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$. A chaque valeur caractéristique $\lambda_n$ correspond une seule solution non banale $u_n(x)$ de l'équation (1) satisfaisant à la condition (2) et normée par les relations

$$\int_a^b u_n^2(x)\,dx=1,\qquad u_n'(a)>0. \tag{3}$$

Cette solution est appelée *fonction caractéristique* de l'équation (1). D'après le théorème mentionné de Sturm, la fonction caractéristique $u_n(x)$ s'annule exactement $n+1$ fois dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$. On peut se demander, bien naturellement, de quelle manière ces zéros des fonctions caractéristiques successives se répartissent-ils entre les divers sous-intervalles de l'intervalle $\langle a,b\rangle$. Le but de la présente note est de répondre à cette question.

**1.** Précisons d'abord le problème même. Désignons, à cet effet, par $G_n(\alpha,\beta)$ le nombre des zéros de la fonction caractéristique $u_n(x)$ situés dans l'intervalle fermé $\langle\alpha,\beta\rangle$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$. Ceci admis, le problème dont nous parlions plus haut peut être formulé comme il suit:

La limite du quotient

$$\frac{G_n(\alpha,\beta)}{G_n(a,b)} = \frac{G_n(\alpha,\beta)}{n+1}$$

existe-t-elle lorsque $n$ tend vers l'infini? La réponse est fournie par le théorème suivant:

*Si les fonctions $p(x)$, $\varrho(x)$, $q(x)$ sont continues dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et si $p(x) > 0$, $\varrho(x) > 0$, on a, pour tout sous-intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$ de l'intervalle $\langle a, b\rangle$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n(\alpha,\beta)}{n+1} = \frac{\int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho(x)/p(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)/p(x)}\,dx}. \tag{4}$$

Démonstration. Supposons d'abord que les fonctions $p(x)$ et $\varrho(x)$ soient de classe $C^2$. Dans cette hypothèse on peut appliquer à l'équation (1) la transformation suivante de la variable indépendante $x$ et de la fonction $u$ (voir [1], p. 250 et suiv.):

$$v = \sqrt[4]{p\varrho}\,u, \qquad t = \int_a^x \sqrt{\varrho(x)/p(x)}\,dx, \tag{5}$$

ce qui conduit à l'équation

$$v'' + \lambda v = rv \qquad (v'' = d^2v/dt^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant l) \tag{6}$$

où

$$l = \int_a^b \sqrt{\frac{\varrho(x)}{p(x)}}\,dx \quad \text{et} \quad r = \frac{f''}{f} - \frac{q}{\varrho}, \quad f = \sqrt[4]{p\varrho}.$$

Or, grâce à la forme bien simple de l'équation (6), on peut obtenir facilement les formules asymptotiques pour les fonctions caractéristiques $v_n(t)$ de cette équation, satisfaisant à la condition aux limites $v_n(0) = v_n(l) = 0$.

En revenant ensuite à l'aide de la transformation inverse de (5) à l'équation initiale (1), on en tire pour les fonctions caractéristiques $u_n(x)$ les formules asymptotiques suivantes (voir [1], p. 291):

$$u_n(x) = \frac{c_n}{\sqrt[4]{p\varrho}}\sin\left(n\frac{\pi}{l}\int_a^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{7}$$

où

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{p\varrho}}\sin^2\left(n\frac{\pi}{l}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)dx.$$



Il est facile de vérifier que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{p\varrho}}\sin^2\left(n\frac{\pi}{l}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\,dt\cdot\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{p\varrho}} = \frac{1}{2}\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{p\varrho}}$$

c'est-à-dire la limite $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ existe et est positive. Il en résulte que pour $n$ suffisamment grands les zéros de la fonction caractéristique $u_n(x)$ sont très proches de ceux de la fonction

$$\overline{u}_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{l}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right) \tag{8}$$

de sorte qu'ayant désigné par $\overline{G}_n(\alpha,\beta)$ le nombre des zéros de cette dernière fonction situés dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$, on doit avoir

$$|G_n(\alpha,\beta) - \overline{G}_n(\alpha,\beta)| \leqslant 2. \tag{9}$$

En effet, si la différence

$$u_n(x) - c_n\frac{|\overline{u}_n(x)|}{\sqrt[4]{p\varrho}}$$

est plus petite que le plus petit des maxima locaux de la fonction

$$c_n\frac{|\overline{u}_n(x)|}{k}, \qquad \text{où} \quad k = \max_{\langle a,b\rangle}\sqrt[4]{p\varrho},$$

alors à chaque zéro de la fonction $\overline{u}_n(x)$, situé entre deux tels points de maximum consécutifs, correspond un et un seul zéro de la fonction $u_n(x)$, situé dans le même intervalle([1]). D'où l'inégalité (9). Mais, de la formule (8) on tire immédiatement

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{G}_n(\alpha,\beta)}{n+1} = \frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{\varrho/p}\,dx}{\int_a^b\sqrt{\varrho/p}\,dx}.$$

Il en résulte, en vertu de (9), que l'on a (4).

([1]) Rappelons que la fonction caractéristique $u_n(x)$ admet dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ autant de zéros (c'est-à-dire $n+1$) que $\overline{u}_n(x)$, c'est pourquoi à chaque zéro de $\overline{u}_n(x)$ ne peut correspondre qu'un seul zéro de $u_n(x)$.

**2.** Nous allons maintenant montrer comment on peut s'affranchir de l'hypothèse restrictive que $p(x)$ et $\varrho(x)$ sont de classe $C^2$. Envisageons, à cet effet, deux autres équations différentielles

$$(1^*)\qquad \big(p^*(x)u'\big)'+\big(\lambda\varrho^*(x)+q(x)\big)u=0,$$

$$(1^{**})\qquad \big(p^{**}(x)u'\big)'+\big(\lambda\varrho^{**}(x)+q(x)\big)u=0$$

et supposons que l'on ait

$$(10)\qquad 0<p^*(x)\leqslant p(x)\leqslant p^{**}(x),\qquad 0<\varrho^{**}(x)\leqslant\varrho(x)\leqslant\varrho^*(x).$$

Supposons de plus que les fonctions $p^*(x)$, $p^{**}(x)$, $\varrho^*(x)$ et $\varrho^{**}(x)$ soient de classe $C^2$ dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$.

Désignons par $u_n^*(x)$ et $u_n^{**}(x)$ les solutions des équations $(1^*)$ et $(1^{**})$ correspondant à la valeur caractéristique $\lambda_n$ de l'équation (1), déterminées par les conditions analogues à (3) et par

$$u_n^*(a)=u_n^{**}(a)=0.$$

De même, désignons par $G_n^*(\alpha,\beta)$ et $G_n^{**}(\alpha,\beta)$ les nombres des zéros des fonctions $u_n^*(x)$ et $u_n^{**}(x)$ respectivement, situés dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$. D'après le théorème de comparaison bien connu (voir p. ex. [2], p. 194) on a, en vertu des inégalités (10):

$$(11)\qquad \begin{gathered} G_n^{**}(\alpha,\beta)-1\leqslant G_n(\alpha,\beta)\leqslant G_n^*(\alpha,\beta)+1,\\ G_n^{**}(a,b)\leqslant G_n(a,b)\leqslant G_n^*(a,b)\end{gathered}$$

et, par conséquent

$$(12)\qquad \frac{G_n^{**}(\alpha,\beta)-1}{G_n^*(a,b)}\leqslant\frac{G_n(\alpha,\beta)}{n+1}\leqslant\frac{G_n^*(\alpha,\beta)+1}{G_n^{**}(a,b)}.$$

Mais, grâce à l'hypothèse que les fonctions $p^*(x)$, $p^{**}(x)$, $\varrho^*(x)$ et $\varrho^{**}(x)$ sont suffisamment régulières, on peut obtenir pour $u_n^*(x)$ et $u_n^{**}(x)$ des formules asymptotiques analogues à (7) (voir [1], p. 290)

$$(13)\qquad u_n^*(x)=\frac{c_n^*}{\sqrt[4]{p^*\varrho^*}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

$$(14)\qquad u_n^{**}(x)=\frac{c_n^{**}}{\sqrt[4]{p^{**}\varrho^{**}}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho^{**}}{p^{**}}}\,dx\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

où

$$\lim_{n\to\infty}c_n^*=c^*>0,\qquad \lim_{n\to\infty}c_n^{**}=c^{**}>0.$$



Il en résulte que pour $n$ suffisamment grands on a

$$(15)\qquad \left|G_n^*(\alpha,\beta)-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right|\leqslant 3,\qquad \left|G_n^{**}(\alpha,\beta)-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{\varrho^{**}}{p^{**}}}\,dx\right|\leqslant 3$$

et pareillement

$$(16)\qquad \left|G_n^*(a,b)-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right|\leqslant 3,\qquad \left|G_n^{**}(a,b)-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{\varrho^{**}}{p^{**}}}\,dx\right|\leqslant 3.$$

En effet, pour $n$ suffisamment grands les zéros de la fonction $u_n^*(x)$ peuvent être situés seulement dans les voisinages des zéros de la fonction

$$\bar{u}_n^*(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right).$$

En d'autres termes, la fonction $u_n^*(x)$ ne peut s'annuler que dans les intervalles où la fonction $|\bar{u}_n^*(x)|$ est plus petite que, par exemple, $\frac{1}{2}$. Mais, dans chacun de ces intervalles on a évidemment

$$(17)\qquad \left|\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right)\right|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part, pour la dérivée de la fonction $u_n^*(x)$ on a la formule asymptotique suivante (voir [1], p. 290):

$$u_n^{*\prime}(x)=c_n^*\sqrt{\lambda_n}\sqrt[4]{\frac{\varrho^*}{p^{*3}}}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx\right)+O(1)$$

et, en raison de l'inégalité (17), pour $n$ suffisamment grands cette dérivée ne peut s'annuler dans aucun des intervalles où s'annule $u_n^*(x)$. Cela veut dire qu'à chaque zéro de $\bar{u}_n^*(x)$ correspond un et seulement un zéro de $u_n^*(x)$.

Il en est de même pour la fonction $u_n^{**}(x)$.

Par conséquent, la première des inégalités (15) s'obtient en tenant compte du fait que la partie entière du nombre

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{\varrho^*}{p^*}}\,dx$$

donne le nombre des zéros de la fonction $\bar{u}_n^*(x)$ dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$. Les autres inégalités (15) et (16) s'obtiennent de la même manière.

Des inégalités (12), (15) et (16) on tire

$$(17)\qquad \frac{\int_a^\beta \sqrt{\frac{\varrho^{**}}{p^{**}}}\,dx}{\int_a^b \sqrt{\frac{\varrho^{*}}{p^{*}}}\,dx} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{G_n(\alpha,\beta)}{n+1} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{G_n(\alpha,\beta)}{n+1} \leqslant \frac{\int_a^\beta \sqrt{\frac{\varrho^{*}}{p^{*}}}\,dx}{\int_a^b \sqrt{\frac{\varrho^{**}}{p^{**}}}\,dx}.$$

Donc, pour achever la démonstration il suffit d'appliquer les inégalités (17) à quatre suites de fonctions de classe $C^2$: $\{p_k^*(x)\}$, $\{p_k^{**}(x)\}$, $\{\varrho_k^*(x)\}$, $\{\varrho_k^{**}(x)\}$ telles que l'on ait

$$0 < p_k^*(x) \leqslant p(x) \leqslant p_k^{**}(x), \qquad 0 < \varrho_k^{**}(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \varrho_k^*(x) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

et

$$\lim_{k\to\infty} p_k^*(x) = \lim_{k\to\infty} p_k^{**}(x) = p(x), \qquad \lim_{k\to\infty} \varrho_k^*(x) = \lim_{k\to\infty} \varrho_k^{**}(x) = \varrho(x)$$

uniformément dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

3. **Remarque.** Je me suis borné à envisager les conditions aux limites (2) les plus simples possibles, mais on pourrait obtenir sans aucune difficulté le même résultat pour des conditions aux limites plus compliquées. Il suffirait, pour cela, d'appliquer des formules asymptotiques faciles à obtenir, analogues aux (7), (13) et (14) (voir [1], p. 290 et suiv.).

### Travaux cités

[1] R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I*, Berlin 1931.

[2] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.

*Reçu par la Rédaction le 22. 1. 1958*