Par suite:

Si la série (1) *est bornée au moins presque partout sur deux segments définis par* (15), *où* $|ab'-ba'|>0$, *cette série converge uniformément dans le voisinage de tout point* (x,y) *du domaine* D_1 *défini par l'inégalité* $t(x,y,S_1)<1$.

Comme dans le numéro 1, on peut prouver que le domaine $t(x,y,S_1)<1$ ne peut pas être augmenté.

Travaux cités

[1] F. Leja, *Sur les séries de polynômes homogènes*, Rendic. del Circ. Math. di Palermo 56 (1932), p. 1-27.

[2] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

[3] — *Sur les polynômes de Tchebycheff et la fonction de Green*, Annales Soc. Pol. Math. 19 (1947), p. 1-6.

[4] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, B. II, Berlin 1925, p. 86 et 282.

Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur un critère d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle $(Q(t)x')'+f(t)x=0$

par Z. Opial (Kraków)

1. Dans la note [1] M. Zlámal a établi le critère suivant d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

(1) $$(Q(t)x')'+f(t)x=0$$

où $Q(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $\langle 0,+\infty)$ et $Q(t)>0$:

Si l'on a

(2) $$\int_0^\infty \frac{ds}{Q(s)}=+\infty$$

et s'il existe une fonction $\omega(t)$ *positive, continue ainsi que sa dérivée première et telle que*

(3) $$\int_0^\infty \frac{Q(s)}{\omega(s)}\omega'^2(s)\,ds<+\infty,$$

(4) $$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \omega(s)f(s)\,ds=+\infty,$$

alors l'équation (1) *est oscillatoire, c'est-à-dire chaque solution de cette équation s'annule une infinité de fois dans l'intervalle* $\langle 0,+\infty)$.

Dans la présente note, je vais montrer qu'en modifiant légèrement la démonstration de ce théorème on peut remplacer les conditions (3) et (4) par une seule condition plus générale. Dans le paragraphe 4 je donne un théorème sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation (1) dans le cas où $Q(t)=1$ et dans l'hypothèse que l'équation envisagée n'est pas oscillatoire. Ce théorème constitue la généralisation d'un théorème de A. Wintner [2].

2. Théorème I. *Si l'on a la relation* (2) *et s'il existe une fonction positive* $\omega(t)$, *continue ainsi que sa dérivée première et telle que*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \omega(s)\left[f(s)-\frac{1}{4}Q(s)\left(\frac{\omega'(s)}{\omega(s)}\right)^2\right]ds = +\infty, \tag{5}$$

l'équation (1) *est oscillatoire.*

Démonstration. Pour la démonstration par l'absurde, supposons que l'équation (1) ne soit pas oscillatoire. M. Zlámal a démontré que dans ce cas il existe une intégrale $x(t)$ de cette équation telle que

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) = +\infty. \tag{6}$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $x(t)>0$ dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. La fonction $u(t) = Q(t)x'(t)/x(t)$ satisfait à l'équation de Riccati

$$u'(t) = -\frac{u^2(t)}{Q(t)} - f(t). \tag{7}$$

On en tire immédiatement

$$\int_0^t \omega(s)u'(s)\,ds = -\int_0^t \frac{\omega(s)}{Q(s)}u^2(s)\,ds - \int_0^t \omega(s)f(s)\,ds$$

et, après intégration par parties du premier membre,

$$\omega(t)u(t) = a + \int_0^t \omega'(s)u(s)\,ds - \int_0^t \frac{\omega(s)}{Q(s)}u^2(s)\,ds - \int_0^t \omega(s)f(s)\,ds. \tag{8}$$

Mais, d'une inégalité élémentaire bien connue on tire

$$\omega'(s)u(s) = \frac{\sqrt{Q(s)}\,\omega'(s)}{\sqrt{2}\sqrt{\omega(s)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,u(s)\sqrt{\omega(s)}}{\sqrt{Q(s)}} \leqslant \frac{Q(s)\,\omega'^2(s)}{4\omega(s)} + \frac{\omega(s)u^2(s)}{Q(s)}.$$

Donc, de (8) il vient

$$\omega(t)u(t) \leqslant a + \frac{1}{4}\int_0^t \frac{Q(s)}{\omega(s)}\omega'^2(s)\,ds - \int_0^t \omega(s)f(s)\,ds$$

et, en vertu de l'hypothèse (5), $u(t)<0$ pour t suffisamment grands ce qui est incompatible avec la relation (6).

3. Pour $\omega(t) = t$ du théorème I on obtient (v. [1], corollary 2) immédiatement:

Corollaire. *Si* $Q(t) = 1$ *et*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t s\left[f(s) - \frac{1}{4s^2}\right]ds = +\infty, \tag{9}$$

l'équation (1) *est oscillatoire.*

Il en résulte que la constante $\frac{1}{4}$ est la meilleure possible, car si l'on pouvait la remplacer par une autre plus petite, la relation (9) aurait lieu même pour la fonction $f(t) = 1/4t^2$; mais, dans ce cas, l'équation (1) n'est pas oscillatoire.

4. Nous désignons par $\{t\colon W(t)\}$ l'ensemble des t vérifiant la condition $W(t)$, et par $m(E)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble E. Soit $x(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$.

Définition. Nous dirons que la limite approximative (v. [3]) est

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{appr} x(t) = +\infty,$$

lorsque $m\{t\colon x(t)<k\} < +\infty$ pour tout k fini.

Théorème II. *Si l'équation*

$$x'' + f(t)x = 0 \tag{10}$$

n'est pas oscillatoire, il existe une intégrale $x(t)$ *de cette équation pour laquelle on a*

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{appr} x(t) = +\infty. \tag{11}$$

Démonstration. Prenons une intégrale quelconque $u(t)$ de l'équation (10). Sans restreindre la généralité on peut supposer que $u(t)>0$ dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. Ceci posé, on peut obtenir une autre intégrale de l'équation envisagée à l'aide de la formule

$$x(t) = u(t)\int_0^t \frac{ds}{u^2(s)}. \tag{12}$$

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{appr} x(t) = +\infty$. Prenons, à cet effet, un nombre quelconque positif k et évaluons la mesure de l'ensemble ouvert $E = \{t\colon x(t)<k\}$. On a dans l'ensemble E:

$$\frac{1}{k}\int_0^t \frac{ds}{u^2(s)} \leqslant \frac{1}{u(t)}$$

et, par conséquent, dans l'ensemble $E' = E\cdot(1, +\infty)$:

$$a + \frac{1}{k}\int_1^t v^2(s)\,ds \leqslant v(t) \tag{13}$$

où $v(t) = 1/u(t)$ et a est une constante positive. Nous allons montrer que $m(E) < +\infty$. Pour la démonstration par l'absurde supposons qu'il n'en soit pas ainsi. L'ensemble E' étant ouvert, on peut choisir un nombre fini d'intervalles $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_n)$ de telle manière que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset E' \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > \frac{a}{k}. \tag{14}$$

Désignons par $z(t)$ l'intégrale de l'équation auxiliaire $z' = z^2/k$ issue du point $(0, a)$. On vérifie sans peine que

$$\lim_{t \to a/k - 0} z(t) = +\infty. \tag{15}$$

Dans l'intervalle $\langle a_1, b_1 \rangle$ on a, en vertu de l'inégalité (13):

$$a + \frac{1}{k} \int_{a_1}^{t} v^2(s)\, ds \leqslant v(t).$$

Il en résulte (voir [4] ou [5]) que l'on a dans cet intervalle

$$z(t - a_1) \leqslant v(t). \tag{16$_1$}$$

On a donc

$$z(b_1 - a_1) = a + \frac{1}{k} \int_{0}^{b_1 - a_1} z^2(s)\, ds \leqslant a + \frac{1}{k} \int_{a_1}^{b_1} v^2(s)\, ds.$$

Par conséquent, dans l'intervalle $\langle a_2, b_2 \rangle$ on a, en vertu de (13):

$$z(b_1 - a_1) + \frac{1}{k} \int_{a_2}^{t} v^2(s)\, ds \leqslant v(t)$$

d'où il résulte que dans l'intervalle envisagé

$$z(t - a_2 + b_1 - a_1) \leqslant v(t). \tag{16$_2$}$$

On démontre de même que dans l'intervalle $\langle a_i, b_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on a l'inégalité

$$z\Big(t - a_i + \sum_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j)\Big) \leqslant v(t) \tag{16$_i$}$$

ce qui contredit (15), puisque $\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) > \dfrac{a}{k}$.

5. Remarque I. Il est impossible de remplacer, dans le théorème II, la conclusion (11) par la relation $\lim_{t \to \infty} x(t) = +\infty$. En effet, par un choix convenable de la fonction $u(t)$ positive, monotone et telle que $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, on peut même obtenir

$$\liminf_{t \to \infty} x(t) = \liminf_{t \to \infty} u(t) \int_{0}^{t} \frac{ds}{u^2(s)} = 0.$$

Remarque II. Les raisonnements de la démonstration du théorème II sont aussi valables pour l'équation (1), mais seulement dans le cas où l'on suppose que l'inégalité

$$a + \frac{1}{k} \int_{1}^{t} \frac{v^2(s)}{Q(s)}\, ds \leqslant v(t) \tag{17}$$

est vérifiée pour tout $t \geqslant 1$. Dans cette hypothèse on a l'inégalité $z_1(t) \leqslant v(t)$ $(t \geqslant 1)$ où $z_1(t)$ est l'intégrale de l'équation auxiliaire $z' = z^2/kQ(t)$ issue du point $(1, a)$. Mais dans l'hypothèse (2), pour un T on a $\lim_{t \to T-0} z_1(t) = +\infty$, l'inégalité est donc impossible. L'intégrale

$$x(t) = u(t) \int_{0}^{t} \frac{ds}{Q(s) u^2(s)}$$

de l'équation (1) ne peut donc pas être bornée pour $t \geqslant 0$. Néanmoins, on ne peut pas démontrer que $\operatorname{lim\,appr}_{t \to \infty} x(t) = +\infty$. En effet, le changement de la variable indépendante

$$\tau = \int_{0}^{t} \frac{ds}{Q(s)}, \tag{18}$$

dans l'hypothèse que l'équation (1) est non oscillatoire, mène à l'équation non oscillatoire du type (10); mais, il est clair que (18) peut transformer des ensembles de mesure finie en ensembles de mesure infinie et inversement.

Remarque III (ajoutée pendant la correction des épreuves). Dans le cas où $Q(t) \equiv 1$ le théorème I a été déjà démontré par V. A. Kondrat'ev dans la note [6].

Travaux cités

[1] M. Zlámal, *Oscillation criterions*, Čas. pěst. Mat. a Fis. 75 (1950), p. 213-217.

[2] A. Wintner, *A criterion of oscillatory stability*, Quart. of Appl. Math. 7 (1949), p. 115-117.

[3] C. Olech, Z. Opial, T. Ważewski, *Sur le problème d'oscillation des intégrales de l'équation* $y''+g(t)y=0$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 621-626.

[4] B. Wiswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences. Sect. A, 5 (1952), p. 335-341.

[5] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 200-209.

[6] В. А. Кондратьев, *Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения* $y''+p(x)y=0$, ДАН СССР 113 (1957), p. 742-745.

Reçu par la Rédaction le 9. 1. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur la répartition asymptotique des zéros des fonctions caractéristiques du problème de Sturm

par Z. Opial (Kraków)

Envisageons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(p(x)u')'+(\lambda\varrho(x)+q(x))u=0, \tag{1}$$

où $p(x)$ et $\varrho(x)$ sont des fonctions continues et positives dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, $q(x)$ est une fonction continue dans le même intervalle et λ est un paramètre. Tout nombre λ, pour lequel l'équation (1) admet une solution non banale $u(x)$ satisfaisant à la condition aux limites

$$u(a)=u(b)=0, \tag{2}$$

est appelé *valeur caractéristique* de l'équation (1). D'après le théorème bien connu de Sturm, il existe une suite infinie de valeurs caractéristiques $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$ telle que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$. A chaque valeur caractéristique λ_n correspond une seule solution non banale $u_n(x)$ de l'équation (1) satisfaisant à la condition (2) et normée par les relations

$$\int_a^b u_n^2(x)\,dx=1, \qquad u_n'(a)>0. \tag{3}$$

Cette solution est appelée *fonction caractéristique* de l'équation (1). D'après le théorème mentionné de Sturm, la fonction caractéristique $u_n(x)$ s'annule exactement $n+1$ fois dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$. On peut se demander, bien naturellement, de quelle manière ces zéros des fonctions caractéristiques successives se répartissent-ils entre les divers sous-intervalles de l'intervalle $\langle a,b\rangle$. Le but de la présente note est de répondre à cette question.

1. Précisons d'abord le problème même. Désignons, à cet effet, par $G_n(\alpha,\beta)$ le nombre des zéros de la fonction caractéristique $u_n(x)$ situés dans l'intervalle fermé $\langle\alpha,\beta\rangle$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$. Ceci admis, le problème dont nous parlions plus haut peut être formulé comme il suit: