

Bases communes holomorphes: nouvelle extension du théorème de Whittaker

par NGUYEN THANH VAN et PATRICE LASSERE (Toulouse)

Résumé. Soient D un ouvert de \mathbb{C} et E un compact de D . Moyennant une hypothèse assez faible sur D et $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ on montre que si $\alpha \in]0, 1[$ vérifie $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$, D_α étant l'ouvert de niveau $\{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$, alors toute base commune de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$.

0. Introduction. Soient D un ouvert de \mathbb{C} et E un compact dans D . On désigne par $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ les espaces de fonctions holomorphes sur D et E respectivement, munis de leur topologies usuelles. $\omega(E, D, z)$ (ou plus simplement ω) sera la fonction sousharmonique extrémale $(0, 1)$ associée au couple (E, D) :

$$\omega(E, D, \cdot) = \text{Reg sup}[\text{sup}\{u \in \mathcal{SH}(D) : u \leq 1, u|_E \leq 0\}]$$

(elle est harmonique sur $D \setminus E$). Les bases communes des espaces $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. bibliographie), à commencer par les travaux de J. M. Whittaker exposés dans son livre de la collection Borel.

THÉORÈME DE WHITTAKER. *Soient D_0 et D_1 deux disques concentriques. Toute base commune de $\mathcal{O}(D_0)$ et $\mathcal{O}(D_1)$ est une base de $\mathcal{O}(D)$, pour tout disque concentrique intermédiaire D .*

A l'aide de l'important critère de Dynin et Mityagin, il est facile (voir [N], p. 209) de généraliser cet énoncé au cas où le couple (E, D) est régulier :

Si ∂D est régulier pour le problème de Dirichlet et si $\omega|_E \equiv 0$, alors toute base commune de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$, où $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 30B99, 30H50.

Key words and phrases: spaces of holomorphic functions, Schauder bases.

Nous démontrons ici une nouvelle extension du théorème de Whittaker, avec des hypothèses beaucoup plus générales sur le couple (E, D) .

DÉFINITION. Un ouvert Ω de $\overline{\mathbb{C}}$ est dit de *type* (\star) lorsque pour tout compact X de Ω et toute suite d'ouverts (Ω_k) vérifiant

$$X \subset \Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \quad \bigcup \Omega_k = \Omega,$$

on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(X, \Omega_k, z) = \omega(X, \Omega, z), \quad \forall z \in \Omega.$$

REMARQUE 0. Il est facile de voir que Ω est de type (\star) s'il vérifie $(\star\star)$: Pour tout compact $X \subset \Omega$ et tout ensemble polaire Y , on a l'égalité $\omega(X, \Omega, \cdot) = \omega(X \setminus Y, \Omega, \cdot)$. $(\star\star)$ est vérifiée lorsque Ω est un ouvert borné de \mathbb{C} , par conséquent elle l'est encore lorsque chaque composante connexe de Ω est analytiquement isomorphe à un domaine borné de \mathbb{C} .

CONVENTION. Dans ce qui suit, D et $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ seront supposés de type (\star) . Cette hypothèse implique que $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ et E sont non polaires.

THÉORÈME 1. Si $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ possèdent une base commune (f_n) et si pour un certain $\alpha \in]0, 1[$, la frontière de l'ouvert $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ est incluse dans $D \setminus E$ alors (f_n) est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$.

A l'aide de ce résultat on prouve

THÉORÈME 2. On suppose que D est un domaine simplement connexe. Si $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ possèdent une base commune (f_n) , alors $\omega(E, D, \cdot) \equiv 0$ sur E (et (f_n) est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$).

Ce théorème est à comparer avec un énoncé de Zakharyuta et Kadam-patta (cf. [ZK] et remarque à la fin du paragraphe 2).

1. Démonstration du théorème 1

(1) PROPOSITION. Soient D et G des ouverts de type (\star) de $\overline{\mathbb{C}}$, E et F des compacts non polaires dans D et G respectivement. Si $\{f_i(z, \xi)\}_{i \in I}$ est une famille de fonctions holomorphes sur $D \times G$ telle que

$$\forall L \Subset G, \quad \sup_{i \in I} \|f_i\|_{E \times L} < \infty, \quad \forall K \Subset D, \quad \sup_{i \in I} \|f_i\|_{K \times F} < \infty,$$

alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\{f_i\}_{i \in I}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(D_\alpha \times G_{1-\alpha})$, où $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$ et $G_{1-\alpha} = \{\xi \in G : \omega(F, G, \xi) < 1 - \alpha\}$. Autrement dit, $\{f_i\}_{i \in I}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, avec $\Omega = \{(z, \xi) \in D \times G : \omega(E, D, z) + \omega(F, G, \xi) < 1\}$.

Preuve de la proposition. Soient $(D_j), (G_j)$ des suites d'ouverts bornés réguliers de \mathbb{C} tels que

$$E \subset D_j \Subset D, \quad F \subset G_j \Subset G, \quad D_j \nearrow D, \quad G_j \nearrow G.$$

Puisque D et G sont de type (\star) , la proposition est une conséquence immédiate de l'assertion suivante : Soient pour j fixé

$$\Omega_j = \{(z, \xi) \in D_j \times G_j : \omega(E, D_j, z) + \omega(F, G_j, \xi) < 1\}, \\ X_j = (E \times G_j) \cup (D_j \times F).$$

Alors pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de $\overline{D_j} \times \overline{G_j}$ on a

$$\|f\|_{X_j} \geq \|f\|_{\Omega_j}.$$

En effet, si l'on pose, pour tout k suffisamment grand, $E_k = \{z : \text{dist}(z, E) \leq 1/k\}$ et $F_k = \{\xi : \text{dist}(\xi, F) \leq 1/k\}$, alors d'après un résultat de Siciak ([S], Lemme 6.1)

$$\Omega_{j,k} = \{(z, \xi) \in D_j \times G_j : \omega(E_k, D_j, z) + \omega(F_k, G_j, \xi) < 1\}$$

est l'enveloppe d'holomorphie de $X_{j,k} = (E_k \times G_j) \cup (D_j \times F_k)$. Par conséquent,

$$\|f\|_{X_{j,k}} \geq \|f\|_{\Omega_{j,k}};$$

l'assertion en découle en faisant tendre k vers ∞ . ■

Remarque. Notre première preuve de cette proposition est plus sophistiquée. Celle-ci nous a été communiquée par J. Siciak.

(2) Rappelons le théorème de dualité de Köthe–Grothendieck. Pour toute partie Ω de \mathbb{C} le dual fort de $\mathcal{O}(\Omega)$ est isomorphe topologiquement à $\mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$, espace des fonctions holomorphes sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ telles que $f(\infty) = 0$, de la manière suivante :

A toute forme linéaire continue \mathcal{L} sur $\mathcal{O}(\Omega)$ correspond un unique élément $\Phi_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\xi) = \mathcal{L}\left(z \rightarrow \frac{1}{z - \xi}\right)$$

et pour toute fonction f de $\mathcal{O}(\Omega)$ on a

$$\mathcal{L}(f) = \langle \Phi_{\mathcal{L}}, f \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\xi) \Phi_{\mathcal{L}}(\xi) d\xi$$

où γ est un cycle convenablement choisi. Soit maintenant (f_n) une base commune de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$. Désignons par (φ_n) la base duale de (f_n) dans la dualité $(\mathcal{O}(E), \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus E))$; elle l'est aussi dans la dualité $(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D))$.

LEMME. Soient \mathcal{W} un ouvert (ou un compact) de \mathbb{C} et (f_n, φ_n) un système biorthogonal dans $\mathcal{O}(\mathcal{W}) \times \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{W})$. Alors (f_n) est une base de $\mathcal{O}(\mathcal{W})$ si et seulement si :

- (i) (f_n) est totale dans $\mathcal{O}(\mathcal{W})$.
(ii) $\{f_n(z)\varphi_n(\xi)\}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\mathcal{W} \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{W}))$.

C'est une conséquence immédiate de l'important critère de Dynin et Mityagin ([M], Th. 9).

(3) Maintenant on va utiliser la proposition avec D, E comme dans l'énoncé du théorème 1 et $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus E, F = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Il résulte de la proposition et du lemme précédent que $\{f_n(z)\varphi_n(\xi)\}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, où $\Omega = \{(z, \xi) \in D \times G : \omega(E, D, z) + \omega(F, G, \xi) < 1\}$.

Pour plus de clarté, ω (resp. $\tilde{\omega}$) représentera dorénavant la fonction extrémale associée au couple (E, D) (resp. (F, G)).

Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$; montrons que $D_\alpha \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_\alpha) \subset \Omega$.

(•) Sur $D \setminus E, \omega + \tilde{\omega} \equiv 1$.

En effet, il est facile de voir que la fonction $\omega + \tilde{\omega}$, harmonique sur $D \setminus E$, admet 1 comme valeur frontière quasi-partout sur $\partial(D \setminus E)$. C'est donc la constante 1.

(••) Si $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$, alors $\partial D_\alpha \subset \Gamma_\alpha := \{z \in D : \omega(z) = \alpha\}$.

Soit $a \in \partial D_\alpha$; il est évident que $\omega(a) \geq \alpha$. Supposons $\omega(a) > \alpha$. Par continuité de ω sur $D \setminus E$ il existe alors un voisinage de a sur lequel $\omega(z) > \alpha$, c'est donc un voisinage de $a \in \overline{D}_\alpha$ qui ne rencontre pas D_α , ce qui est absurde et par conséquent $\omega(a) = \alpha$.

Fixons maintenant α tel que $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$ et soit $(z, \xi) \in D_\alpha \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_\alpha)$. On a par le principe du maximum

$$\tilde{\omega}(\xi) \leq \sup_{\xi \in \partial D_\alpha} \tilde{\omega}(\xi).$$

En raison de (•) et (••) le second membre est égal à $1 - \alpha$. Donc $\omega(z) + \tilde{\omega}(\xi) < \alpha + 1 - \alpha = 1$, d'où la relation $D_\alpha \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_\alpha) \subset \Omega$.

$\{f_n\varphi_n\}$ étant une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, est donc une partie bornée de $\mathcal{O}(D_\alpha \times (\mathbb{C} \setminus D_\alpha))$. En outre, il est facile de voir que $\widehat{\mathcal{K}}_{\mathcal{SH}(D)} \Subset D_\alpha$ pour tout compact \mathcal{K} de D_α ($\widehat{\mathcal{K}}_{\mathcal{SH}(D)}$ désignant l'enveloppe de \mathcal{K} par rapport aux fonctions sousharmoniques sur D); D_α est donc $\mathcal{O}(D)$ -convexe et forme une paire de Runge avec D , donc (f_n) est totale dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$, ce qui achève la démonstration. ■

COROLLAIRE (du théorème 1). *Si l'on suppose en plus que D soit à bord régulier pour le problème de Dirichlet, alors toute base commune (f_n) de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$ et $\mathcal{O}(\overline{D}_\alpha)$, pour tout $\alpha \in]\alpha_0, 1[$, avec $\alpha_0 = \sup_E \omega$.*

Démonstration. Remarquons que $\alpha_0 < 1$ et $D_\alpha \Subset D, \forall \alpha < 1$ (E compact non polaire dans D régulier). Soit $\alpha \in]\alpha_0, 1[$.

(i) $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$.

Supposons $\partial D_\alpha \not\subset D \setminus E$. Alors $\partial D_\alpha \cap \partial(D \setminus E) \neq \emptyset$; on a donc $\partial D_\alpha \cap E \neq \emptyset$, car $D_\alpha \Subset D$. Soit $a \in \partial D_\alpha \cap E$. On a $\omega(a) \leq \alpha_0 < \alpha$: impossible, car $\partial D_\alpha \cap D_\alpha = \emptyset$. D'où (i).

(ii) $\partial D_\alpha = \Gamma_\alpha := \{z \in D : \omega(z) = \alpha\}$.

D'après la preuve du théorème 1, (i) implique $\partial D_\alpha \subset \Gamma_\alpha$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de prouver que tout point $a \in \Gamma_\alpha$ est adhérent à D_α . Soit Δ une boule arbitraire de centre a . Prouvons que $\Delta \cap D_\alpha \neq \emptyset$. On peut supposer $\Delta \subset D \setminus E$; si $\Delta \cap D_\alpha = \emptyset$, ω serait $\geq \alpha$ sur Δ et $\omega(a) = \alpha$, elle serait donc constante sur la composante connexe \mathcal{C} de $D \setminus E$ contenant a . Puisque (E, D) est une paire de Runge, $\partial \mathcal{C} \cap \partial D$ est non vide. En un point $b \in \partial \mathcal{C} \cap \partial D$ on a

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow b \\ \xi \in D}} \omega(\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow b \\ \xi \in \mathcal{C}}} \omega(\xi) = \alpha < 1,$$

ce qui est absurde, d'où (ii).

(iii) (f_n) est bien une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$, d'après le théorème 1 et (i). Il est plus facile de voir, en raison de (ii), que la famille $\{D_\beta\}_{\beta > \alpha}$ forme une base de voisinages ouverts de \bar{D}_α dans D ; (f_n) étant une base de $\mathcal{O}(D_\beta)$ pour tout $\beta \in]\alpha, 1[$, est encore une base de $\mathcal{O}(\bar{D}_\alpha) = \lim \text{ind}_{\beta \rightarrow \alpha, \beta > \alpha} \mathcal{O}(D_\beta)$. ■

2. Démonstration du théorème 2. En raison de la convention faite dans l'introduction, D est un domaine simplement connexe $\neq \mathbb{C}$ et E est un compact non polaire dans D . Supposons que $\omega \not\equiv 0$ sur E ; alors $\lambda := \alpha_0 = \sup_E \omega \in]0, 1[$. Soit a un point frontière de E tel que $\omega(a) = \lambda$. E est régulier en au moins un point b de sa frontière; puisque $\lambda > \omega(b) = 0$, on peut trouver un disque ouvert \mathcal{U} centré en b suffisamment petit pour que

$$\omega(z) < \lambda, \quad \forall z \in \mathcal{U}.$$

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$; il existe donc un voisinage ouvert \mathcal{V} de E sur lequel f est holomorphe, et puisque (f_n) est une base de $\mathcal{O}(E)$ et donc une base absolue (cf. Mityagin [M]), on peut trouver une suite de scalaires (b_n) telle que la série $\sum b_n f_n$ converge normalement sur un voisinage ouvert \mathcal{W} de E ($\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$) et a pour somme f sur \mathcal{W} . On peut donc choisir $\mu \in]\lambda, 1[$ suffisamment proche de λ pour que $(D \setminus \bar{D}_\mu) \cap \mathcal{W}$ soit non vide. D'après le corollaire du théorème 1, (f_n) est une base commune aux espaces $\mathcal{O}(\bar{D}_\mu)$ et $\mathcal{O}(D)$. Comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du corollaire, $\Gamma_\mu = \partial D_\mu$; la frontière de \bar{D}_μ est donc analytique réelle, et le couple (\bar{D}_μ, D) est régulier. De plus, \bar{D}_μ est polynomialement convexe car la paire (\bar{D}_μ, D) est de Runge et D est un domaine simplement connexe : $D \setminus \bar{D}_\mu$ est donc

connexe. Nous sommes donc en mesure d'appliquer les résultats de Dragilev et Nguyen Thanh Van ([N], pp. 227–229).

(A) Si l'on pose $\varrho = \exp(1/\Phi)$ où Φ est le flux de la fonction $h = \omega(\overline{D}_\mu, D, \cdot)$ à travers tout contour séparant \overline{D}_μ et $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, alors il existe une suite (λ_n) de nombres > 0 et une bijection π de \mathbb{N} sur \mathbb{N} telle que la suite $g_n = \lambda_n f_{\pi(n)}$ possède les propriétés suivantes :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\tilde{D}_\alpha}^{1/n} = \varrho^\alpha$, avec $\tilde{D}_\alpha := \{z \in D : h(z) < \alpha\}$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\Delta^{1/n} = \varrho^{\alpha(\Delta)}$, pour tout disque $\Delta \Subset D \setminus \overline{D}_\mu$, avec $\alpha(\Delta) := \sup_\Delta h$.

Revenons maintenant à notre série $\sum b_n f_n$. Puisqu'elle converge normalement sur un voisinage ouvert \mathcal{W} de E et a pour somme f , il en est de même pour la série $\sum a_n g_n$ avec $a_n = b_{\pi(n)}/\lambda_n$. Choisissons un disque $\Delta \Subset (D \setminus \overline{D}_\mu) \cap \mathcal{W}$. On a

$$|a_n| \cdot \|g_n\|_\Delta \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (M = C^{te}),$$

donc d'après (ii),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|g_n\|_\Delta^{1/n}} = \varrho^{-\alpha(\Delta)}.$$

Choisissons alors β dans $]0, \alpha(\Delta)[$. L'inégalité précédente et (i) entraînent la normale convergence de la série $\sum a_n g_n$ sur \tilde{D}_β qui contient \mathcal{U} (rappelons que $\sup_{\mathcal{U}} \omega < \lambda$; ceci entraîne $\mathcal{U} \subset D_\mu$ et d'autre part \tilde{D}_β est un voisinage de \overline{D}_μ). Ainsi $\sum a_n g_n$ est normalement convergente sur \mathcal{U} , f est donc analytiquement prolongeable à \mathcal{U} .

On a donc démontré que toute fonction de $\mathcal{O}(E)$ est analytiquement prolongeable à \mathcal{U} , ce qui est impossible. ■

Remarques. (i) Notre démonstration s'appuie sur le corollaire du théorème 1 et la démarche du chapitre 4 de [N], inspirée elle-même par un travail de Dragilev [D]. L'énoncé (A) est le cas particulier du

THÉORÈME. Soient Ω un domaine de \mathbb{C} , \mathcal{X} un compact dans Ω tel que le couple (\mathcal{X}, Ω) soit régulier et que $\Omega \setminus \mathcal{X}$ soit connexe. Soit Φ le flux de $\omega(\mathcal{X}, \Omega, \cdot)$ à travers tout contour séparant \mathcal{X} et $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Alors si $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ et $\mathcal{O}(\Omega)$ possèdent une base commune (f_n) , il existe une suite (λ_n) de nombres > 0 et une bijection π de \mathbb{N} sur lui-même telle que la suite de terme général $g_n = \lambda_n f_{\pi(n)}$ vérifie, pour tout disque $\Delta \Subset \Omega \setminus \mathcal{X}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\Delta^{1/n} = R^{\alpha(\Delta)},$$

avec $R = \exp(1/\Phi)$ et $\alpha(\Delta) := \sup_\Delta \omega(\mathcal{X}, \Omega, \cdot)$ (pour la démonstration cf. [N], pp. 227–229).

En conséquence on voit que le théorème 2 reste valable sous une hypothèse moins restrictive : Au lieu de supposer D domaine simplement connexe $\neq \mathbb{C}$, on peut supposer :

- D domaine régulier,
- il existe $\mu_0 \in]\lambda, 1]$ tel que $D_{\mu_0} \setminus \bar{D}_{\mu_0}$ soit connexe pour des valeurs de $\mu > \lambda$ aussi proches de λ que l'on veut ($\lambda := \sup_E \omega(E, D, \cdot)$).

(ii) Le théorème 2 n'est apparemment pas nouveau. On trouve dans l'article de Zakharyuta et Kadampatta [ZK] l'énoncé suivant plus général :

[ZK] *Soient D un ouvert régulier de \mathbb{C} et E un compact de D . Si $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$ possèdent une base commune et, si pour une composante connexe Δ de D , $\tilde{E} = \Delta \cap E$ est non polaire, alors $\omega(E, D, \cdot) \equiv 0$ sur \tilde{E} .*

En raison de coupures draconiennes (pour raccourcir), ce travail est très difficile à lire. Il est basé sur l'assertion suivante : Si (f_n) est une base commune de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$, alors il existe des espaces Hilbertiens \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 tels que :

(a) $\mathcal{OC}(\bar{\mathbb{C}} \setminus D) \rightarrow \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{OC}(E)$ (la flèche \rightarrow signifie injection linéaire continue, la dernière n'est pas nécessairement injective),

(b) (f_n) est une base orthogonale de \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

D'après V. P. Zakharyuta (communication orale), cette assertion peut être prouvée par des considérations de nucléarité. (a) résulte de ([M], Prop. 3a), cependant (b) nous paraît être un résultat fort qui mériterait une preuve.

Au cours de la démonstration de l'énoncé [ZK] ci-dessus, les auteurs semblent supposer que pour un certain $\beta > 0$, valeur prise par ω en un point irrégulier de E , $\Delta \setminus \bar{\Delta}_\beta$ est connexe, où

$$\Delta_\beta = \text{Intérieur de } [\tilde{E} \cup \{z \in \Delta : \omega(E, D, \cdot) < \beta\}].$$

Bibliographie

Outre les références citées dans le texte, on signale le travail de pionnier de V. D. Erokhin ([E1], développé dans [E2]) et celui de T. Bagby où figure implicitement la première démonstration de l'existence d'une base commune pour $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ lorsque (E, D) est une paire de Runge régulière.

- [B] T. Bagby, *Interpolation by rational functions*, Duke Math. J. 36 (1969), 95–104.
 [D] M. M. Dragilev, *Extendable bases of analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 43 (1964), 267–280.

- [E1] V. D. Erokhin, *Sur les transformations conformes de couronnes et la base fondamentale de l'espace des fonctions analytiques sur un voisinage élémentaire d'un continuum arbitraire*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 120 (1958), 689–692.
- [E2] —, *Best linear approximation of functions analytically continuable from a continuum to a given region*, Russian Math. Surveys 23 (1968), 96–122.
- [M] B. S. Mityagin, *Approximative dimension and bases in nuclear Fréchet spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), 59–127.
- [N] Nguyen Thanh Van, *Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (2) (1972), 169–253.
- [NS] Nguyen Thanh Van and J. Siciak, *Fonctions plurisousharmoniques extrémales et systèmes doublement orthogonaux de fonctions analytiques*, Bull. Sci. Math. 115 (1991), 235–244.
- [NZ] Nguyen Thanh Van and A. Zeriahi, *Une extension du Théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques*, dans : Analyse Complexe Multivariable, récents développements, A. Meril (éd.), Editel s.n.c, Rende, 1991, 185–194.
- [S] J. Siciak, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower-dimensional subsets of \mathbb{C}^n* , Ann. Polon. Math. 22 (1969), 145–171.
- [W] J. M. Whittaker, *Leçons sur les séries de base de polynomes quelconques*, Collection Borel 39, Gauthier-Villars, Paris, 1949.
- [Z] V. P. Zakharyuta, *Continuable bases in spaces of analytic functions of one and several complex variables*, Siberian Math. J. 8 (1967), 204–216.
- [ZK] V. P. Zakharyuta and S. N. Kadampatta, *Existence of continuable bases in spaces of functions analytic in compacta*, Math. Notes 27 (1980), 334–340.

LABORATOIRE D'ANALYSE
 U.F.R. MIG
 UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
 118, ROUTE DE NARBONNE
 31062 TOULOUSE CEDEX, FRANCE
 E-mail: LASSERE@CIX.CICT.FR

Reçu par la Rédaction le 3.3.1993