ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LVI.2 (1992)

Exposants de Łojasiewicz pour les fonctions semi-algébriques

par Azzeddine Fekak (Casablanca)

Abstract. We prove the rationality of the Łojasiewicz exponent for semialgebraic functions without compactness hypothesis. In the parametric situation, we show that the parameter space can be divided into a finite number of semialgebraic sets on each of which the Łojasiewicz exponent is constant.

1. Introduction. Soit X un ensemble semi-algébrique fermé de R^n (où R est un corps réel clos), f et g deux fonctions semi-algébriques sur X. Si l'ensemble des zéros de g est contenu dans l'ensemble des zéros de f, alors le théorème des zéros réels ([1], Théorème 2.6.6) nous dit qu'il existe un entier n et une fonction semi-algébrique H continue sur X tels qu'on ait $f^n = Hg$ sur X. On dira qu'un nombre rationnel θ verifie la *propriété* (P) s'il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X telle que $|f(x)|^\theta \le h(x)|g(x)|$ pour tout $x \in X$. Dans ce travail nous nous intéressons à la borne inférieure, notée $l_X(f,g)$, des nombres rationnels θ vérifiant (P). Les résultats que nous obtenons sont:

A. La rationalité de cette borne inférieure, appelée l'exposant de Łojasiewicz, et le fait que cet exposant vérifie la propriété (P).

B. Le fait que dans une situation paramétrée on peut découper l'espace en un nombre fini de morceaux semi-algébriques pour lesquels l'exposant de Łojasiewicz est constant, et vérifie la propriété (P). La fonction h de l'inégalité est continue simultanément par rapport aux variables et aux paramètres.

C. Le fait que l'on peut trouver une courbe semi-algébrique sur laquelle l'exposant de Łojasiewicz coïncide avec celui obtenu sur l'ensemble semi-algébrique de départ.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 14G30.
Key words and phrases: semialgebraic, Łojasiewicz inequality, real spectrum, Nullstellensatz.

Ces résultats étendent et complètent, dans le cas réel global (semi-algébrique), des travaux classiques sur l'inégalité et les exposants de Łojasiewicz (cf. [2]–[5] et [7]) dans le cas complexe ou analytique local.

On utilise des techniques et des résultats de la géométrie semi-algébrique sur un corps réel clos, et la compacité du spectre réel ([1]).

2. La rationalité de l'exposant de Łojasiewicz. Soit X un ensemble semi-algébrique fermé de R^n, et f une fonction semi-algébrique. On note $z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. On désigne par $C^0(X)$ l'ensemble des fonctions semi-algébriques continues sur X.

Résultat A. *Soient f et g deux fonctions semi-algébriques telles que $z(g) \subset z(f)$. On pose*

$$l_X(f,g) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists h \in C^0(X)\ \forall x \in X : |f(x)|^\theta \le h(x)|g(x)|\}\,.$$

Alors :

(i) $l_X(f,g) = p/q$ *est un nombre rationnel.*
(ii) $\exists h \in C^0(X)\ \forall x \in X : |f(x)|^{p/q} \le h(x)|g(x)|$.

Nous donnons la preuve de ce résultat à la fin de ce paragraphe. Nous énonçons tout d'abord deux corollaires.

Rappelons que si X est un ensemble semi-algébrique, la fonction $t \to d(t,X)$ (où $d(t,X)$ désigne la distance euclidienne de t à X) est une fonction semi-algébrique. On a les corollaires suivants :

Corollaire 2.1. *Soit g une fonction semi-algébrique sur un ensemble semi-algébrique fermé X. On pose $Z = z(g)$, et soit*

$$l_X(g) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists h \in C^0(X)\ \forall x \in X : d(x,Z)^\theta \le h(x)|g(x)|\}\,.$$

Alors :

(i) $l_X(g) = p/q$ *est un nombre rationnel.*
(ii) $\exists h \in C^0(X)\ \forall x \in X : d(x,Z)^{p/q} \le h(x)|g(x)|$.

Corollaire 2.2. *Soient A et B deux sous-ensembles semi-algébriques fermés dans X. On pose*

$$l(A,B) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists h \in C^0(A)\ \forall x \in A : d(x, A\cap B)^\theta \le h(x)d(x,B)\}\,.$$

Alors :

(i) $l(A,B) = p/q$ *est un nombre rationnel.*
(ii) $\exists h \in C^0(A)\ \forall x \in A :\ d(x, A\cap B)^{p/q} \le h(x)d(x,B)$.

Proposition 2.3. *Soit f une fonction semi-algébrique sur un intervalle $]0,1]$ non identiquement nulle sur un voisinage de 0. Il existe un nombre rationnel p/q et une fonction φ semi-algébrique continue sur un voisinage $[0,\varepsilon[$ avec $\varphi(0) \ne 0$ tels que $f(x) = x^{p/q}\varphi(x)$ pour x suffisamment petit.*

Preuve. *Dans le cas où $R = \mathbb{R}$:* La fonction f est semi-algébrique sur $]0,1]$. Il existe un polynôme $P(x,y)$ non identiquement nul tel que $P(x, f(x)) = 0$. La fonction f est développable au voisinage de zéro en une série de Puiseux réelle [8]. On peut écrire $f(x) = cx^{p/q}(1 + \psi(x))$ pour x suffisamment petit avec $\psi(x)$ une série de Puiseux à exposants tous strictement positifs.

En posant $\varphi(x) = c(1 + \psi(x))$, on a bien la proposition.

Dans le cas où R est un corps réel clos quelconque :

Rappels : Soit A un anneau commutatif unitaire. Un *cône* α de A est une partie de A contenant les sommes de carrés d'éléments de A et stable par addition et multiplication. On dit que α est *premier* si pour tout a et b appartenent à A on a l'implication $ab \in \alpha$ et $a \in \alpha \Rightarrow -b \in \alpha$. On appelle *support* de α l'idéal premier $l_\alpha = \alpha \cap -\alpha$, et on note $k(\alpha)$ la clôture réelle de $k(I)$ pour l'ordre induit par α (voir [1]).

Dans $R(X)$, le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, on choisit l'ordre qui rend X positif et plus petit que tout nombre réel strictement positif. Cet ordre est noté 0^+. Le corps $k(0^+)$, la clôture réelle de $R(x)$ pour cet ordre, est le corps des séries de Puiseux algébriques en X à coefficients dans R (voir [1], page 123).

On peut évaluer la fonction f en 0^+ (cf. [1], Chap. 7) : $f(0^+) \in k(0^+)$ est une série de Puiseux algébrique en X.

On peut écrire $f(0^+) = aX^{p/q}(1+\psi(X))$ avec $\psi(X)$ une série de Puiseux algébrique à exposants tous strictement positifs qui est, pour l'ordre sur $k(0^+)$, plus petite que tout nombre réel positif. D'après la proposition 7.4.1 de [1] il existe pour tout $\delta \in R$, $\delta > 0$, un intervalle $]0,\varepsilon[$ tel que pour tout $x \in]0,\varepsilon[$ on ait $a(1-\delta)x^{p/q} \le f(x) \le a(1+\delta)x^{p/q}$.

On pose $\varphi(x) = f(x)/ax^{p/q}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = a \neq 0$. La fonction φ est continue. On a donc la proposition. ∎

Notation. Soient f et g deux fonctions semi-algébriques sur $]0,1]$. On note $f \sim g$ si $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes sur un voisinage de 0.

Corollaire 2.4. *Soit f une fonction semi-algébrique sur $]0,1]$ non identiquement nulle sur un voisinage de 0. On pose*

$$\eta = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists c > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in]0,\varepsilon] : |f(x)| \ge cx^\theta\}.$$

Alors :

(i) *$\eta = p/q$ est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe $c > 0$ tel que $f(x) \sim cx^{p/q}$.*

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe un nombre rationnel $p/q \in \mathbb{Q}$ et une fonction φ semi-algébrique continue au voisinage de 0, tels que $f(x) = x^{p/q}\varphi(x)$ pour x suffisamment petit et $\varphi(0) \neq 0$.

On va montrer que $\eta = p/q$. Si $|f(x)| \geq cx^\theta$, on a $x^{p/q}\varphi(x) \geq cx^\theta$, d'où $p/q \leq \theta$ puisqe $\varphi(0) \neq 0$.

Dans l'autre sens : Si $\varphi(0) = a$ on a $|f(x)| \geq (a/2)x^{p/q}$ pour x suffisamment petit.

Proposition 2.5. *Soit f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble semi-algébrique fermé X avec $z(g) \subset z(f)$. On pose*

$$\eta = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid f^\theta/g \text{ prolongée par } 0 \text{ quand } f(x) = 0 \text{ est continue sur } X\}.$$

Alors η est un nombre rationnel.

Preuve. Posons, pour $x \in X$ et $u \in R$, $K_{x,u} = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq 1 \text{ et } |f(y)| = u\}$, et définissons la fonction $v(x,u)$ par

$$v(x,u) = \begin{cases} \inf\{|g(y)| \mid y \in K_{x,u}\} & \text{si } K_{x,u} \neq \emptyset, \\ 1 & \text{si } K_{x,u} = \emptyset. \end{cases}$$

La fonction v est semi-algébrique sur $X \times R$. On remarque que pour tout x, si $u \neq 0$, alors $v(x,u) \neq 0$. Pour tout nombre rationnel p/q, on pose

$$C_{p/q} = \{x_0 \in z(f) \mid \exists c(x_0) > 0 : v(x_0, u) \sim cu^{p/q}\}.$$

L'ensemble $C_{p/q}$ est un ensemble semi-algébrique de R^n; on note $\widetilde{C}_{p/q}$ le constructible qui lui est associé par l'identification tilda (cf. [1], Chap. 7).

Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}_r(R[X_1, \ldots, X_n])$ un cône premier. La fonction v peut s'étendre en une fonction semi-algébrique $v_{k(\alpha)} : X_{k(\alpha)} \times k(\alpha) \to k(\alpha)$ où $X_{k(\alpha)}$ est l'extension de X à $k(\alpha)$.

En prenant $\alpha \in \widetilde{z(f)}$ et en appliquant le corollaire 2.4 sur le corps réel clos $k(\alpha)$, il existe $c(\alpha) \geq 0$ et $p/q \in \mathbb{Q}$ tel que

$$v_{k(\alpha)}(x(\alpha), u) \sim c(\alpha)u^{p/q}.$$

On a donc $\alpha \in \widetilde{C}_{p/q}$. Ceci montre que les $\widetilde{C}_{p/q}$ forment un recouvrement de $\widetilde{z(f)}$. D'après la compacité de la topologie du spectre réel [1], $z(f)$ est recouvert par un nombre fini de $C_{p/q}$. D'où le nombre fini des p/q. En prenant le plus petit p/q quand x_0 varie dans $z(f)$, la formule suivante est vérifiée :

$$(*) \qquad \begin{array}{ll} \forall x_0 \in z(f)\ \exists c(x_0) > 0 : & |v(x_0, u)| \geq c(x_0)u^{p/q}, \\ \exists a_0 \in z(f)\ \exists c(a_0) > 0 : & v(a_0, u) \sim c(a_0)u^{p/q}. \end{array}$$

On va montrer que $\eta = p/q$.

La formule $(*)$ entraîne que sur $L = \{y \in X \mid \|y - x_0\| \leq 1 \text{ et } f(y) \neq 0\}$ on a

$$(**) \qquad c(x_0)|f(y)|^{p/q} \leq |g(y)| \quad \text{pour } |f(y)| \text{ assez petit}.$$

Pour tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$ la fonction $f^{\varepsilon+p/q}/g$ prolongée par 0 quand $f(x) = 0$ est continue sur X, d'où $\eta \le p/q$.

Si f^θ/g prolongée par 0 quand $f(x) = 0$ est continue sur X, alors f^θ/g est bornée au voisinage de a_0 de la formule $(*)$, donc sur ce voisinage on a $|g| \ge c|f|^\theta$. Ceci entraîne que $p/q \le \theta$, d'où $p/q \le \eta$, et par suite $p/q = \eta$. ■

P r e u v e d u r é s u l t a t A. (i) On pose $p/q = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid f^\theta/g$ prolongée par 0 quand $f(x) = 0$ est continue sur $X\}$. On va montrer que $l_X(f,g) = p/q$.

Si $|f|^\theta \le h|g|$ sur X, alors pour tout nombre rationnel ε positif $f^{\theta+\varepsilon}/g$ prolongée par 0 quand $f(x) = 0$ est continue sur X, donc $p/q \le \theta + \varepsilon$ pour tout ε, et par suite $p/q \le l_X(f,g)$.

Pour montrer l'autre inégalité il suffit de montrer (ii) pour l'exposant p/q. On pose

$$k(x) = \begin{cases} f(x)^{p/q}/g(x) & \text{si } f(x) \ne 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction k est semi-algébrique localement bornée sur X (d'après la formule $(**)$ de la preuve de la proposition 2.5), on peut la majorer par un polynôme h sur X tout entier. On a donc pour tout $x \in X$

$$|f(x)|^{p/q} \le h(x)|g(x)|\,. \ ■$$

3. Inégalités de Łojasiewicz avec paramètre. Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux exposants de Łojasiewicz pour des familles de fonctions semi-algébriques continues dépendants d'un paramètre.

Si X est un ensemble semi-algébrique de $R^n \times R^p$, on peut considérer X comme une famille de sous-ensembles de R^n paramétrisée dans R^p. La *fibre* de X au point t de R^p est $X_t = \{x \in R^n \mid (x,t) \in X\}$.

La *restriction* de la famille X au sous-ensemble S de R^p est $X|S = X \cap (R^n \times S)$.

Si $f : X \to R$ est une fonction semi-algébrique sur $X \subset R^n \times R^p$, la *fibre* de f en t est la fonction semi-algébrique $f_t : X_t \to R$ définie par

$$f_t(x) = y \iff f(x,t) = y\,.$$

Soit $\alpha \in R^p = \operatorname{Spec}_r(R[X_1,\ldots,X_p])$. On peut aussi définir la fibre de X en α : si X est défini par une formule $\Phi(x,t)$ de premier ordre, alors

$$X_\alpha = \{x \in k(\alpha)^n \mid \Phi(x, t(\alpha))\} \subset k(\alpha)^n\,.$$

Elle ne dépend que de X et non pas du choix de Φ. La fibre X_α est appelée la *fibre de la famille X en α* ([1], page 125).

Si $f : X \to R$ est une fonction semi-algébrique, on définit la fibre f_α de f au point α de R^p par : $[\text{graphe}(f)]_\alpha \subset k(\alpha)^n \times k(\alpha)$ est le graphe de $f_\alpha : X_\alpha \to k(\alpha)$. Le résultat essentiel dans l'étude des fibres des familles d'ensembles et de fonctions semi-algébriques est le fait qu'une propriété exprimable dans le langage du premier ordre des corps ordonnés d'une fibre en $\alpha \in \widetilde{R}^p$ reste valable sur un sous-ensemble semi-algébrique $S \subset R^p$ tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ (cf. [1], proposition 7.4.4).

RÉSULTAT B. *Soient A un ensemble semi-algébrique fermé de $R^n \times R^p$, $f(x,t)$ et $g(x,t)$ deux fonctions semi-algébriques continues en x sur A telles que $z(g) \subset z(f)$. Alors il existe une partition finie en ensembles semi-algébriques $R^p = \bigcup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|S_i \to R$, et des nombres rationnels p_i/q_i tels que :*

(i) $|f(x,t))|^{p_i/q_i} \le h_i(x,t)|g(x,t))|$ *sur $A|S_i$ pour $t \in S_i$.*

(ii) *p_i/q_i est l'exposant de Łojasiewicz de f_t par rapport à g_t pour $t \in S_i$.*

Preuve. On note $f_t(x) = f(x,t)$ et $g_t(x) = g(x,t)$ les fibres en t de f et g. Les fonctions f_t et g_t sont semi-algébriques sur A_t. On note $p/q = \eta_t$ l'exposant de Łojasiewicz de f_t par rapport à g_t sur A_t. Ce p/q vérifie la formule suivante (voir la formule $(*)$ de la preuve de la proposition 2.5) :

$$\begin{aligned} &\forall x_0 \in z(f_t)\ \exists c(x_0) > 0 : \quad |v_t(x_0,u)| \ge cu^{p/q}\,, \\ &\exists a_0 \in z(f_t)\ \exists c(a_0) > 0 : \quad v_t(a_0,u) \sim cu^{p/q} \end{aligned}$$

où v_t est la fonction v obtenue en remplaçant f par f_t et g par g_t.

On va montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'exposants rationnels p/q qui vérifient cette formule quand t varie dans R^p.

On raisonne comme dans la preuve de la proposition 2.5. On pose, pour un nombre rationnel p/q,

$$\begin{aligned} D_{p/q} = \{t \in R^p \mid &\forall x_0 \in z(f_t)\ \exists c > 0 : |v_t(x_0,u)| \ge c(x_0)u^{p/q}, \\ &\exists a_0 \in z(f_t)\ \exists c(a_0) > 0 : v_t(a_0,u) \sim c(a_0)u^{p/q}\}\,. \end{aligned}$$

L'ensemble $D_{p/q}$ est un ensemble semi-algébrique de R^p.

Soit $\alpha \in \widetilde{R}^p$. D'aprés la formule $(*)$ de la proposition 2.5 appliquée à f_α et g_α dans le corps réel clos $k(\alpha)$, il existe un nombre rationnel p/q tel que $\alpha \in \widetilde{D}_{p/q}$. Ceci montre que les $\widetilde{D}_{p/q}$ recouvrent $\widetilde{R}^p$ et donc par la compacité de la topologie du spectre réel, l'ensemble des paramètres R^p est réunion d'un nombre fini de $D_{p/q}$. De plus, si $\alpha \in \widetilde{D}_{p/q}$, alors l'exposant de Łojasiewicz de f_α par rapport à g_α est p/q et donc il existe une fonction semi-algébrique continue $H : X_\alpha \to k(\alpha)$ telle que $|f_\alpha(x)|^{p/q} \le H(x)|g_\alpha(x)|$ sur X_α.

La fonction H est la fibre en α d'une fonction semi-algébrique continue $h : X|S^\alpha \to R$ ([1], prop. 7.4.8) avec $\alpha \in \widetilde{S}^\alpha$, et on peut supposer que $S^\alpha \subset D_{p/q}$ et que sur S^α on a $|f(x,t)|^{p/q} \le h(x,t)|g(x,t)|$. Les $\widetilde{S}^\alpha$ recouvrent $\widetilde{R}^p$, et donc par compacité on peut en extraire un recouvrement fini : $R^p = \bigcup_{i\in I} S_i$, avec I fini. ■

Corollaire 3.1. *Soit $g(x,t)$ une fonction semi-algébrique continue en x sur un ensemble semi-algébrique $A \subset R^p$. On pose $Z = z(g)$. Alors il existe une partition finie en ensembles semi-algébriques $R^p = \bigcup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|S_i \to R$, et des p_i/q_i tels que :*

(i) *$d(x, Z_t)^{p_i/q_i} \le h_i(x,t)|g_t(x)|$, $\forall x \in A_t$ pour $t \in S_i$.*

(ii) *p_i/q_i est l'exposant de Łojasiewicz de g_t par rapport à $d(x, Z_t)$ pour $t \in S_i$.*

Corollaire 3.2. *Soient A et B deux ensembles semi-algébriques fermés de $R^n \times R^p$. Alors il existe une partition finie en ensembles semi-algébriques $R^p = \bigcup S_i$, des fonctions $h_i : A|S_i \to R$, et des p_i/q_i tels que :*

(i) *$d(x, A_t \cap B_t)^{p_i/q_i} \le h_i(x,t) d(x, B_t)$, $\forall x \in A_t$ pour $t \in S_i$.*

(ii) *p_i/q_i est l'exposant de Łojasiewicz de $d(x, B_t)$ par rapport à $d(x, A_t \cap B_t)$ pour $t \in S_i$.*

4. Exposants de Łojasiewicz et courbes semi-algébriques. Dans ce paragraphe on montrera, dans le cas où X est un ensemble semi-algébrique fermé non nécessairement borné, que l'exposant de Łojasiewicz est atteint sur une courbe semi-algébrique sur X. Pour cela on va se ramener tout d'abord au cas fermé borné, puis on passera au cas général en utilisant la démonstration du résultat A. On remarquera que lorsque X est fermé borné on peut remplacer la fonction h de l'inégalité de Łojasiewicz par une constante c appartenant à R.

Proposition 4.1 (voir [2], Théorème 1). *Soit K un ensemble semi-algébrique fermé borné de R^n, f et g deux fonctions semi-algébriques sur K tel que $\emptyset \ne z(g) \subset z(f)$. On pose*

$$p/q = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists c \in R \ \forall x \in K : |f(x)|^\theta \le c|g(x)|\}\,.$$

Alors il existe une courbe semi-algébrique $\tau : [0,1[\to K$ tel que p/q est égal à l'exposant de Łojasiewicz de f par rapport à g calculé sur l'image $\tau([0,1[)$.

P r e u v e. On peut supposer $f \ge 0$ et $g \ge 0$ sur K. Posons

$$K^* = \{u \in K \setminus z(f) \mid f(x) = f(u) \Rightarrow g(x) \ge g(u)\}\,.$$

L'ensemble K^* est semi-algébrique borné.

Soit $a \in f^{-1}(0)$ tel que a soit adhérent à K^* (un tel a existe puisque K est fermé borné). D'après le lemme de sélection de courbes ([1], théorème 2.2.5) il existe une courbe semi-algébrique $\tau : [0,1] \to K$ telle que $\tau(0) = a$ et $\tau(t) \in K^*$ pour $t \in]0,1[$. On peut écrire, d'après la proposition 2.3, $f \circ \tau(t) = t^\alpha \varphi_1(t)$ et $g \circ \tau(t) = t^\beta \varphi_2(t)$ avec $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ non nuls et α, β deux nombres rationnels positifs.

Il suffit de montrer que $p/q = \beta/\alpha$ pour prouver la proposition. On a évidemment $p/q \geq \beta/\alpha$, car β/α est l'exposant de Łojasiewicz pour la restriction de f et g à $\tau([0,\varepsilon[\,)$ pour ε convenable.

Choisissons $r > 0$ tel que $f^{-1}(\zeta) \cap \tau([0,\varepsilon[\,) \neq \emptyset$ pour $\zeta \in [0,r]$. Comme K est fermé borné il suffit de se borner aux $x \in K$ tels que $f(x) \in [0,r]$ (rappelons que par hypothèse $z(g) \subset z(f)$); mais pour un tel x, il existe $u \in \tau([0,\varepsilon[\,)$ tel que $f(x) = f(u)$ et $g(x) \geq g(u)$, d'où l'assertion puisqu'on a choisi ε assez petit pour que β/α soit l'exposant de Łojasiewicz de f par rapport à g sur la courbe $\tau([0,\varepsilon[\,)$. Quitte à dilater l'intervalle $[0,\varepsilon[$, on peut prendre $\varepsilon = 1$. ■

RÉSULTAT C. *Soit f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble semi-algébrique fermé X avec $z(g) \subset z(f)$. Il existe une courbe semi-algébrique $\tau : [0,1[\, \to X$ tel que $l_X(f,g)$ est égal à l'exposant de Łojasiewicz de la restriction de f et g sur $\tau([0,1[\,)$.*

Preuve. Posons $l_X(f,g) = p/q$. Ce nombre rationnel p/q vérifie la formule $(*)$ de la preuve de la proposition 2.5.

Il existe $a_0 \in X$ avec $f(a_0) = 0$ tel que sur $L = \{y \in X \mid \|y - x_0\| \leq 1$ et $f(y) \neq 0\}$ on a $c(a_0)|f(y)|^{p/q} \leq |g(y)|$ pour $|f(y)|$ assez petit. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que p/q est l'exposant de Łojasiewicz de la restriction de f et g sur l'ensemble $L_\varepsilon = \{y \in X \mid \|y - a_0\| \leq \varepsilon$ et $f(y) \neq 0\}$ (en choisissant ε assez petit $|f|^{p/q}/|g|$ est majorée sur L_ε). C'est aussi l'exposant de Łojasiewicz de la restriction de f et g sur l'ensemble fermé borné $K = \{y \in X \mid \|y - a_0\| \leq \varepsilon\}$.

D'après la proposition précédente, il existe une courbe semi-algébrique tracée sur K, donc sur X, sur laquelle $l_X(f,g) = p/q$ est l'exposant de Łojasiewicz de la restriction de f et g à $\tau([0,l[\,)$. ■

COROLLAIRE 4.2. *Soit $f(x,t)$ et $g(x,t)$ deux fonctions semi-algébriques continues en x sur X de $R^n \times R^p$ avec $z(g) \subset z(f)$. Alors il existe une partition finie en ensembles semi-algébriques de la projection de X sur R^p telle que l'exposant de Łojasiewicz $l_{S_i}(f,g)$ sur $X|S_i$ est égal à l'exposant de Łojasiewicz calculé sur une famille de courbes semi-algébriques $\Gamma : [0,1[\, \times S_i \to X|S_i$ (Γ commutant avec la projection sur S_i).*

Preuve. On note $l(f_\alpha, g_\alpha)$ l'exposant de Łojasiewicz de f_α par rapport à g_α sur X_α. D'après la proposition précédente, il existe une courbe semi-algébrique $\gamma : \,]0,1[_{k(\alpha)} \to X_\alpha$ sur laquelle l'exposant est atteint, γ est la fibre en α d'une famille de courbes $\Gamma : [0,1[\, \times S^\alpha \to X|S^\alpha$ où Γ est semi-algébrique continue, avec $\alpha \in \widetilde{S^\alpha}$. Quitte à restreindre S^α, on peut supposer que l'exposant $l(f_t, g_t)$ reste constant et égal à $l(f_\alpha, g_\alpha)$ pour $t \in S^\alpha$, et que cet exposant est atteint sur la courbe Γ_t.

Les $\widetilde{S}^\alpha$ recouvrent le tilda de la projection de X sur R^p, donc par compacité de la topologie du spectre réel il existe un nombre fini de ces S^α qui recouvrent la projection de X sur R^p. ■

Références

[1] J. Bochnak, M. Coste et M. F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 12, Springer, 1987.
[2] J. Bochnak et J. J. Risler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 493–507.
[3] T.-C. Kuo, *Computation of Lojasiewicz exponent of* $f(x, y)$, ibid. 49 (1974), 201–213.
[4] M. Lejeune et B. Teissier, *Dépendance intégrale sur les idéaux et équisingularité*, Séminaire Ecole Polytechnique, Publ. Inst. Fourier, 1974.
[5] B. Lichtin, *Estimation of Lojasiewicz exponents and Newton polygons*, Invent. Math. 64 (1981), 417–429.
[6] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, notes multigraphiées, I.H.E.S., 1965.
[7] G. Raby, *Théorème des zéros sous-analytiques et inégalités de Lojasiewicz*, dans : Lecture Notes in Math. 1028, Springer, 1983, 253–265.
[8] R. Walker, *Algebraic Curves*, Dover, 1962.

ECOLE ROYALE NAVALE
Bd SOUR JDID
CASABLANCA 01, MAROC

Reçu par la Rédaction le 6.12.1989