ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Applications du principe topologique de T. Ważewski aux équations différentielles du second ordre

par I. Barbălat (Bucuresti)

Le principe topologique de T. Ważewski [1] constitue, dans plusieurs travaux, l'instrument essentiel utilisé, soit pour l'étude de l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles [2], [3], [4], soit pour la mise en évidence des intégrales périodiques des systèmes du second ordre à petit paramètre [5], [6], [7].

A l'aide de ce même principe on va formuler des conditions pour que l'équation différentielle du second ordre et plus particulièrement l'équation des oscillations non linéaires forcées ait des intégrales bornées ou presque-périodiques ou périodiques.

Théorème 1. *Soit*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \tag{1}$$

une équation différentielle, la fonction $\Phi(x, y, t)$ *vérifiant pour* $(x, y, t) \epsilon G = \{a < x < b, -\infty < y, t < \infty\}$ *des conditions qui assurent l'unicité des intégrales dans* G. *Si*

(A) *il existe* x_0 *et* x_1 $(a < x_0 < x_1 < b)$, *tels que*

$$\Phi(x_0, 0, t) < 0, \quad \Phi(x_1, 0, t) > 0 \quad \textit{quel que soit } t,$$

l'équation admet une infinité de demi-intégrales à droite ainsi qu'une infinité de demi-intégrales à gauche bornées.

Démonstration. Soit

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = \Phi(x, y, t) \tag{2}$$

un système équivalent à l'équation (1); dans G, ce système vérifie les conditions d'unicité et de continuité des intégrales par rapport à toutes conditions initiales. Considérons l'ensemble ouvert $\Delta = \{x_0 < x < x_1, -\infty < y, t < \infty\} \subset G$ dont la frontière dans R^3 est constituée par les plans $P_0 = \{x = x_0\}$ et $P_1 = \{x = x_1\}$. Le plan P_0 est séparé par la droite $\{\Delta_0\} = \{(x_0, 0, \tau)\}$, où τ varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, en deux demi-

-plans: $P_0^+ = P_0 \frown \{y > 0\}$ et $P_0^- = P_0 \frown \{y < 0\}$, caractérisés par $x^\cdot(t) > 0$, respectivement $x^\cdot(t) < 0$. Il en résulte que l'ensemble P_0^+ est constitué exclusivement de points d'entrée stricte et P_0^- de points de sortie stricte de l'ensemble Δ pour le système (2). Pareillement, le plan P_1 est séparé par la droite $\{B_0\} = \{(x_1, 0, \tau)\}$ en P_1^+, pour lequel $x^\cdot(t) > 0$, et P_1^-, pour lequel $x^\cdot(t) < 0$, composés uniquement de points de sortie stricte respectivement d'entrée stricte (fig. 1).

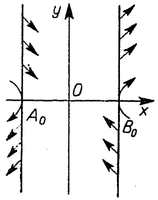

Fig. 1

Soit maintenant $L_\tau^0 = \big(x(t), y(t), t\big)$ l'intégrale de (2) qui pour $t = \tau$ passe par le point $A_\tau = (x_0, 0, \tau)$ de $\{A_0\}$. On a $x^\cdot(\tau) = 0$ et $x^{\cdot\cdot}(\tau) = \Phi(x_0, 0, \tau) < 0$ et par conséquent la fonction $x(t)$ passe par un maximum pour $t = \tau$; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \in \big\{\langle\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon\rangle - \{\tau\}\big\}$ on ait $x(t) < x(\tau) = x_0$ et la droite $\{A_0\}$ est un ensemble de points de glissement extérieur de Δ pour le système (2). D'une manière analogue on démontre que la droite $\{B_0\}$ est constituée de points de glissement extérieur de Δ pour (2). En posant $\operatorname{fr}\Delta =$ frontière de Δ on a

$$\operatorname{fr}\Delta = (P_0^+ \smile P_1^-) \smile (P_1^- \smile P_1^+) \smile \{A_0\} \smile \{B_0\},$$

$P_0^+ \frown P_1^- = \Phi = P_0^- \frown P_1^+, P_0^+, P_1^-, P_0^-, P_1^+$ ouverts et connexes dans $\operatorname{fr}\Delta$. Le domaine Δ vérifie les conditions du théorème de T. Ważewski; sur chaque arc de courbe de Δ qui joint un point de P_0^- à un point de P_1^+ il existe au moins un point tel que la demi-intégrale à droite qui y passe, reste dans Δ, et sur chaque arc de courbe de Δ qui joint un point de P_0^+ à un point de P_1^- il existe au moins un point tel que la demi-intégrale à gauche qui y passe, reste dans Δ.

Remarque 1. En particulier, pour l'équation des oscillations non linéaires forcées

$$x^{\cdot\cdot} + f(x, x^\cdot, t)x^\cdot + g(x) = p(t)$$

où $p(t)$ est continue et bornée, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\infty$ et les coefficients f et g vérifient des conditions qui assurent l'unicité des intégrales dans R^3, il existe une infinité de demi-intégrales à droite bornées ainsi qu'une infinité de demi-intégrales à gauche bornées.

Remarque 2. Si dans l'énoncé du théorème 1 on remplace le domaine G par $G^* = \{a < x < b, -\infty < y < \infty, t > c$ (ou $t < c$)$\}$ et la condition (A) par

(A*) il existe x_0 et x_1, $a < x_0 < x_1 < b$ et $t_0 > c$ $(t_0 < c)$ tels que

$$\Phi(x_0, 0, t) < 0 \quad \text{et} \quad \Phi(x_1, 0, t) > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0 \quad (\text{ou } t \leqslant t_0)$$

l'équation (1) admet une infinité d'intégrales à droite (ou à gauche) bornées.

En effet, l'ensemble de points $\Delta \frown (t = t_0)$ est composé uniquement de points d'entrée stricte (ou de sortie stricte) du domaine $\Delta \frown (t > t_0)$ (ou $\Delta \frown (t < t_0)$) par rapport au système (2) et l'ensemble de points de sortie stricte (ou d'entrée stricte) n'est pas connexe et possède exactement deux composantes connexes.

Théorème 2. *Si les conditions du théorème* 1 *sont vérifiées et si en plus*

1. $\Phi(x, 0, t)$ *est bornée pour* $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ *et* $-\infty < t < \infty$,

2. *la dérivée* $\Phi_y(x, y, t)$ *existe dans* $\bar{\Delta}$ *et satisfait à l'une des conditions suivantes*:

(a) $\sup\Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}$,

(b) $\inf\Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}$,

(c) $\sup\Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \geqslant 0)$ *et*
$\inf\Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \leqslant 0)$,

(d) $\inf\Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \geqslant 0)$ *et*
$\sup\Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \leqslant 0)$,

l'équation (1) *admet une infinité de demi-intégrales à droites bornées, ainsi que leurs dérivées de premier ordre, une infinité de demi-intégrales à gauche bornées, ainsi que leurs dérivées du premier ordre et une intégrale au moins qui est bornée, ainsi que sa dérivée, pour* $-\infty < t < \infty$.

Démonstration. Supposons que c'est la première des conditions 2 qui se trouve vérifiée et soient $L = \sup\Phi_y$ pour $(x, y, t) \in \bar{\Delta}$, $|\Phi(x, 0, t)| \leqslant M$ pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < t < \infty$. Considérons le plan Σ_λ

$$u(x, y) \equiv y - mx = \lambda \quad \text{pour} \quad (x, y, t) \in \bar{\Delta}$$

où $m > \max(0, L)$, $\lambda > M(m-L)^{-1} - mx_0$.

Le long des intégrales du système (2) l'on a

$$u^\cdot = y^\cdot - mx^\cdot = \Phi(x, y, t) - my = \Phi(x, 0, t) + y[\Phi_y(x, \theta y, t) - m]$$

où $0 < \theta < 1$. Il s'ensuit que l'on a quel que soit t

$$\frac{du}{dt} \leqslant M - (\lambda + mx_0)(m-L) = (m-L)\left(\frac{M}{m-L} - mx_0 - \lambda\right) < 0. \tag{3}$$

Si l'on considère maintenant le plan Σ_μ, $u(x, y) \equiv y - mx = \mu$ pour $(x, y, t) \in \bar{\Delta}$ et $\mu < -M(m-L)^{-1} - mx_1$, on trouve

$$\frac{du}{dt} \geqslant -M - (\mu + mx_1)(m-L) = (m-L)\left(-\frac{M}{m-L} - mx_1 - \mu\right) > 0. \tag{4}$$

Les plans Σ_λ, Σ_μ, ainsi que les plans P_0 et P_1 considérés plus haut, déterminent un domaine cylindrique $\omega \subset G$ (fig. 2). Soient $P_1^+ \cap \Sigma_\lambda = \{B_1\}$, $P_0^- \cap \Sigma_\mu = \{A_2\}$ les deux génératrices indiquées de la surface cylindrique $\mathrm{fr}\,\omega$. A l'aide des inégalités (3) et (4) on voit que les ensembles $\Sigma_\lambda - \{B_1\}$, $\Sigma_\mu - \{A_2\}$ sont composés uniquement de points d'entrée stricte de ω par rapport au système (2). Ces mêmes inégalités ainsi que les inégalités $x^\cdot(t) < 0$, $x^\cdot(t) > 0$ vérifiées respectivement sur P_0^-, P_1^+, permettent de conclure que les génératrices $\{A_2\}, \{B_1\}$ sont composées uniquement de points de glissement extérieur de ω par rapport au système (2). Soient

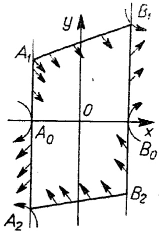

Fig. 2

$$E_1 = (P_0^+ \cap \mathrm{fr}\,\omega) \cup (\Sigma_\lambda - \{B_1\}),$$

$$E_2 = (P_1^- \cap \mathrm{fr}\,\omega) \cup (\Sigma_\mu - \{A_2\}),$$

$$S_1 = (P_1^+ \cap \mathrm{fr}\,\omega) - \{B_1\},$$

$$S_2 = (P_0^- \cap \mathrm{fr}\,\omega) - \{A_2\}.$$

On a

$$\mathrm{fr}\,\omega = (E_1 \cup E_2) \cup (S_1 \cup S_2) \cup (\{A_0\} \cup \{B_0\} \cup \{A_2\} \cup \{B_1\}),$$

$E_1 \cap E_2 = \Phi = S_1 \cap S_2$, E_1, E_2, S_1, S_2 ouverts et connexes dans $\mathrm{fr}\,\omega$. Cette frontière est composée uniquement de points d'entrée stricte, les ensembles E_1 et E_2, de points de sortie stricte, les ensembles S_1 et S_2, de points de glissement extérieur, les ensembles $\{A_0\}$, $\{B_0\}$, $\{A_2\}$ et $\{B_1\}$. Le domaine ω vérifie les conditions du théorème de Ważewski et par conséquent sur chaque arc de courbe de ω qui joint un point de S_1 (ou E_1) à un point de S_2 (ou E_2) il existe au moins un point tel que la demi-intégrale à droite (à gauche) qui y passe, reste dans ω.

La dernière affirmation du théorème résulte de la proposition suivante:

LEMME. *Soit $x_i^\cdot = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système d'équations différentielles, les fonctions f_i étant continues dans G ouvert, $G \subset E^{n+1}$ et vérifiant des conditions qui assurent l'unicité des intégrales pour tous les points de G. Soit ω un ensemble ouvert, $\bar\omega \subset G$, la projection de ω sur l'axe Ot coïncidant avec l'axe entier et la partie commune de $\bar\omega$ avec la couche $-a \leqslant t \leqslant a$ étant compacte pour tout $a > 0$.*

Envisageons une suite de nombres réels négatifs $0 > t_1 > t_2 > \ldots \ldots > t_n > \ldots$ avec $\lim t_n = -\infty$ et posons $\bar\omega_n = \bar\omega \cap (t = t_n)$.

Supposons enfin que l'ensemble $F_n \subset \bar\omega_n$ des points d'où sortent des demi-intégrales à droite qui restent dans $\bar\omega$ (pour $t \geqslant t_n$) n'est pas vide, quel que soit n.

Ceci étant admis, il existe une intégrale du système qui reste dans $\bar\omega$, quel que soit t $(-\infty < t < \infty)$.

Démonstration. Soit I_n une demi-intégrale à droite issue d'un point $P_n \in F_n$. Elle est définie dans l'intervalle $t_n \leqslant t < +\infty$ et elle coupe l'ensemble F_1 en un point Q_n. Une suite partielle de la suite Q_n tend vers un point Q. On prouve facilement que l'intégrale I issue de Q existe dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ et que $I \subset \bar\omega$, c. q. f. d.

Dans le cas où c'est une des hypothèses 2(b), 2(c), 2(d) qui se trouve vérifiée, la démonstration est tout à fait analogue. La section par le plan $t = 0$ du domaine ω de Ważewski que l'on construit dans ces cas, ainsi que l'allure des intégrales à la frontière de ω est indiquée respectivement dans les fig. 3, 4 et 5.

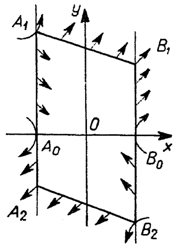

Fig. 3

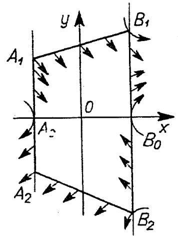

Fig. 4

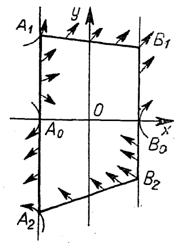

Fig. 5

Remarque 1. En particulier, *l'équation des oscillations non linéaires forcées*

$$x^{\cdot\cdot} + f(x)x^\cdot + g(x) = p(t) \tag{5}$$

où $p(t)$ est continue et bornée, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\infty$ et f, g vérifient des conditions qui assurent l'unicité dans E^3, par exemple $f(x)$ est continue et $g(x)$ est localement lipschitzienne, admet une infinité de demi-intégrales à droite (et à gauche) bornées ainsi que leurs dérivées du premier ordre et une intégrale, au moins, qui est bornée ainsi que sa dérivée pour $-\infty < t < \infty$.

Les conditions d'unicité formulées s'obtiennent en considérant le système équivalent

$$x^\cdot = y - F(x), \quad y^\cdot = -g(x) + p(t) \quad \text{où} \quad F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Remarque 2. *Si les conditions de la remarque 2 du théorème 1 sont vérifiées et si en plus*

1^*. *$\Phi(x, 0, t)$ est bornée pour $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ et $t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$),*

2^*. *la dérivée partielle $\Phi_y(x, y, t)$ existe dans $\bar{\Delta}^* = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_1, -\infty < y < \infty, t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$)$\}$ et satisfait à l'une des conditions suivantes:*

(a*) $\sup \Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^*$,

(b*) $\inf \Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^*$,

(c*) $\sup \Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^* \frown (y \geqslant 0)$ *et*
$\inf \Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^* \frown (y \leqslant 0)$,

(d*) $\inf \Phi_y > -\infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^* \frown (y \geqslant 0)$ *et*
$\sup \Phi_y < \infty$ *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta}^* \frown (y \leqslant 0)$,

l'équation (1) *admet une infinité de demi-intégrales à droite (ou à gauche) bornées ainsi que leurs dérivées du premier ordre.*

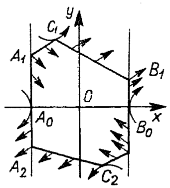

Fig. 6

La démonstration est la même que celle du théorème 2, avec la remarque que l'ensemble de points $\Delta \frown (t = t_0)$ est composé uniquement de points d'entrée stricte (ou de sortie stricte) et par conséquent l'ensemble de points de sortie stricte (ou d'entrée stricte) n'est pas connexe et possède exactement deux composantes connexes.

Remarque 3. *Si l'on remplace les inégalités* (a), (b), (c), (d) *du théorème* 2 *par l'une des conditions suivantes:*

il existe $\alpha \in (x_0, x_1)$ et $\beta \in (x_0, x_1)$ tel que

(a**) $\sup \Phi_y < \infty$ *pour* $x \in \langle x_0, \alpha\rangle$, $y \geqslant 0$, $-\infty < t < \infty$ *et* $\inf \Phi_y > -\infty$ *pour* $x \in \langle \alpha, x_1\rangle$, $y \geqslant 0$, $-\infty < t < \infty$ *ainsi que l'une des secondes inégalités* (c) *ou* (d) *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \leqslant 0)$,

(b**) $\inf \Phi_y > -\infty$ *pour* $x \in \langle x_0, \beta\rangle$, $y \leqslant 0$, $-\infty < t < \infty$ *et* $\sup \Phi_y < \infty$ *pour* $x \in \langle \beta, x_1\rangle$, $y \leqslant 0$, $-\infty < t < \infty$ *ainsi que l'une des premières inégalités de* (c) *ou* (d) *pour* $(x, y, t) \in \bar{\Delta} \frown (y \geqslant 0)$,

(c**) *les deux premières inégalités de* (a**) *ainsi que les deux premières inégalités de* (b**),

les conclusions du théorème 2 *restent valables.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2. Dans la fig. 6 nous avons indiqué la section par le plan $t = 0$ du domaine ω de Ważewski que l'on construit dans le cas (c**) ainsi que l'allure des intégrales à la frontière de ω.

Dans ces cas on peut facilement formuler un théorème analogue à celui de la remarque 2 et qui fournira des intégrales bornées ainsi que leurs dérivées, pour $t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$).

Remarque 4. Nous allons énoncer un autre théorème analogue au théorème 2, et qui n'exige plus l'existence de la dérivée Φ_y.

Si les conditions du théorème 1 *sont vérifiées et s'il existe $\alpha > 0$ fini ou infini et $\beta < 0$ fini ou infini tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < t < \infty$ (et dans le cas où α ou β est infini on suppose que les conditions respectives sont vérifiées uniformément*(1) *pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < t < \infty$):*

(B_1) $\limsup\limits_{y \to \alpha} \Phi(x, y, t) < 0$ *et* $\liminf\limits_{y \to \beta} \Phi(x, y, t) > 0$,

(B_2) $\liminf\limits_{y \to \alpha} \Phi(x, y, t) > 0$ *et* $\limsup\limits_{y \to \beta} \Phi(x, y, t) < 0$,

(B_3) $\limsup\limits_{y \to \alpha} \Phi(x, y, t) < 0$ *et* $\limsup\limits_{y \to \beta} \Phi(x, y, t) < 0$,

(B_4) $\liminf\limits_{y \to \alpha} \Phi(x, y, t) > 0$ *et* $\liminf\limits_{y \to \beta} \Phi(x, y, t) > 0$,

alors les conclusions du théorème 2 *restent valables.*

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle du théorème 2. Les quatre cas qui correspondent aux hypothèses (B_i) ($i = 1, 2, 3, 4$), conduisent à des domaines de Ważewski qui en section par le plan $t = 0$ sont analogues à ceux des fig. 2, 3, 4 et 5 où A_1B_1 et A_2B_2 sont parallèles à Ox et A_1B_1, par exemple, est située à la distance α de Ox si α est fini et à une distance α_0 suffisamment grande de Ox si α est infini, de manière à ce que sur $y = \alpha_0$ on ait $\Phi(x, \alpha_0, t) < 0$ quels que soient $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ et $-\infty < t < \infty$.

Remarque 5. *Si Φ vérifie les conditions du théorème* 1 *et la condition* 2 *du théorème* 2 *et si en plus*

(C_1) *$\Phi(x, y, t)$ est presque-périodique en t, uniformément par rapport à x et y pour $(x, y) \in D = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_1, -\infty < y < \infty\}$,*

(C_2) *$\Phi_x \geqslant m > 0$ pour $(x, y) \in D$,*

les intégrales bornées $x(t)$ et leurs dérivées sont presque-périodiques.

Si Φ vérifie les conditions de la remarque 2 *du théorème* 1 *ainsi que la condition* 2^* *de la remarque* 2 *du théorème* 2 *et la condition* (C_2) *et si en plus*

(C_1^*) *$\Phi(x, y, t)$ est asymptotiquement presque-périodique pour $t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$) uniformément par rapport à x et y pour $(x, y) \in D$,*

(1) Le fait que l'inégalité $\limsup\limits_{y \to \alpha} \Phi(x, y, t) < 0$ est vérifiée uniformément pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < t < +\infty$ exprime que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un γ tel que $\gamma < \alpha$ et que $\Phi(x, y, t) < -\varepsilon$ pour $\gamma < y < \alpha$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < t < +\infty$.

alors les demi-intégrales à droite (à gauche) bornées et leurs dérivées sont asymptotiquement presque-périodiques pour $t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$).

En effet, en utilisant des résultats dûs à C. Corduneanu [8] et [9], il s'ensuit que dans les conditions (C_1), (C_2) les intégrales bornées sont presque-périodiques. Mais $\Phi(x, y, t)$ étant borné dans tout sous-ensemble borné de D, $-\infty < t < \infty$, il en résulte que $x^{\cdot\cdot}(t)$ est bornée, donc $x^{\cdot}(t)$ est uniformément continue pour $-\infty < t < \infty$, donc presque-périodique.

La démonstration est analogue dans le cas où Φ est asymptotiquement presque-périodique. Enfin, en utilisant la remarque 5 on peut énoncer un autre critère d'existence de solutions presque-périodiques (ou asymptotiquement presque-périodiques) pour l'équation différentielle (1).

Remarque 6. *Considérons l'équation des oscillations non linéaires*

$$x^{\cdot\cdot} + f(x^{\cdot}) + g(x) = p(t)$$

où l'on suppose que

(i) $p(t)$ *est presque-périodique,*

(ii) $g(x)$ *et* $g'(x)$ *continues,* $g'(x) < 0$ *quel que soit* x *et* $\lim g(x) = \mp\infty$ *pour* $x \to \pm\infty$,

(iii) $f(y)$ *est dérivable et une des conditions suivantes est vérifiée*

(a) $\lim |f(y)| = \infty$ *pour* $|y| \to \infty$,

(b) $\sup f'(y) < \infty$ *pour* $-\infty < y < \infty$,

(c) $\inf f'(y) > -\infty$ *pour* $-\infty < y < \infty$,

(d) $\sup f'(y) < \infty$ *pour* $y \geqslant 0$ *et* $\inf f'(y) > -\infty$ *pour* $y \leqslant 0$,

(e) $\inf f'(y) > -\infty$ *pour* $y \geqslant 0$ *et* $\sup f'(y) < \infty$ *pour* $y \leqslant 0$;

alors l'équation considérée admet des intégrales presque-périodiques dont les dérivées premières sont aussi presque-périodiques. (Même énoncé dans le cas asymptotiquement presque-périodique.)

La condition (ii) permet de trouver $x_0 < x_1$ dans les conditions du théorème 2 et sur $\langle x_0, x_1\rangle$ on a $g'(x) \leqslant \max g'(x) < 0$. Enfin on utilise soit les conditions (B_i) de la remarque 4 soit les conditions (a), (b), (c), (d) du théorème 2.

Remarque 7. *Si $\Phi(x, y, t)$ est périodique par rapport à t, de la période T, vérifie les conditions du théorème 1 dans R^3, une des conditions* (a), (b), (c), (d) *du théorème* 2 *ou une des conditions* (B_i) *de la remarque* 4 *et s'il existe* $a > 0$ *et une fonction* $\omega(z)$ *de type Wintner*(2) *définie pour*

(2) Cela veut dire que l'on a $\int_a^\infty \frac{dz}{\omega(z)} = \infty$ et que la fonction $\omega(z)$ est croissante au sens large dans l'intervalle $a \leqslant z < +\infty$.

$z \geqslant a$ et tel que

$$|\Phi(x, y, t)| \leqslant \omega(|x|+|y|) \quad \text{pour} \quad |x|+|y| > a,$$

l'équation (1) *admet une intégrale périodique de période T.*

Démonstration. Pour les seconds membres du système (2) on a pour $|x|+|y| > a$,

$$|y| \leqslant |x|+|y|+\omega(|x|+|y|) = \omega_1(|x|+|y|),$$

$$|\Phi(x, y, t)| \leqslant \omega(|x|+|y|) \leqslant \omega_1(|x|+|y|).$$

La fonction $\omega_1(z)$ est aussi de type Wintner [10] et les intégrales du système (2) sont prolongeables pour toutes les valeurs de t. Le système admet au moins une intégrale bornée en vertu du théorème 2 et alors, en vertu d'un théorème de J. L. Massera [11] le système admet au moins une intégrale périodique et de période T.

Remarque 8. *Si l'équation* (5) *vérifie les conditions de la remarque* 1 *du théorème* 2, *si $p(t)$ est périodique de période T et s'il existe $a > 0$ et $\omega(z)$ de type Wintner définie pour $z \geqslant a$ tel que pour $|x| > a$ on ait*

$$|g(x)| \leqslant \omega(|x|) \quad \text{et} \quad \left|\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \omega(|x|),$$

alors l'équation en question admet une intégrale périodique de période T.

En effet, pour les seconds membres du système (6) on a pour $|x| > a$

$$|y-F(x)| \leqslant |y|+\omega(|x|) \leqslant |x|+|y|+\omega(|x|+|y|),$$

$$|-g(x)+p(t)| \leqslant K+\omega(|x|) \leqslant |x|+|y|+\omega(|x|+|y|)$$

où $K = \max|p(t)|$ et $a > K$, en augmentant, au besoin, la constante a.

Remarque 9. *Soit $x^{\cdot\cdot} = \varphi(x, t)$ une équation différentielle où l'on suppose que*

(i) *$\varphi(x, t)$ est continue pour $(x, t) \in R^2$, périodique par rapport à t, la période étant T,*

(ii) *$0 < m \leqslant \varphi_x(x, t) \leqslant M$, quels que soient x et t; alors l'équation admet une intégrale périodique unique et la période de cette solution est T.*

Démonstration. On a

$$mx \leqslant \varphi(x, t)-\varphi(0, t) \leqslant Mx \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 0,$$

$$-mx \leqslant \varphi(0, t)-\varphi(x, t) \leqslant -Mx \qquad \text{pour} \quad x \leqslant 0.$$

Si l'on pose $K = \max|\varphi(0, t)|$, il s'ensuit que $|\varphi(x, t)| \leqslant M|x|+K$ et toutes les intégrales du système $x^{\cdot} = y$, $y^{\cdot} = \varphi(x, t)$ sont prolongeables.

Enfin, on peut trouver $x_0 < 0$ et $x_1 > 0$ tels que $\varphi(x_0, t) < 0$ et $\varphi(x_1, t) > 0$. Il suffit de prendre $x_0 < -Km^{-1}$ et $x_1 > Km^{-1}$. Les conditions du théorème 2 sont vérifiées et par conséquent le système admet au moins une intégrale $\big(x(t), x^{\cdot}(t)\big)$ bornée pour $-\infty < t < \infty$.

En vertu du théorème de Massera le système admet au moins une intégrale périodique de période T, $\big(x_1(t), x_1^{\cdot}(t)\big)$. Mais, en vertu d'une proposition dûe à C. Corduneanu [12] l'équation donnée admet une intégrale unique bornée pour $-\infty < t < \infty$ et par conséquent cette intégrale coïncide avec $x_1(t)$. Il est à remarquer également que pour tout autre intégrale $x_2(t)$ de l'équation donnée on a pour $-\infty < t < \infty$, $\sup|x_2(t)-$ $-x_1(t)| = \infty$.

Remarque 10. Dans la proposition suivante, relative à l'équation (5), on ne suppose plus que la fonction perturbatrice $p(t)$ soit bornée.

THÉORÈME 3. *Soit*

$$x^{\cdot\cdot}+f(x)x^{\cdot}+g(x) = p(t) \tag{7}$$

une équation différentielle d'oscillations non linéaires où

(i) *$p(t)$ est sommable sur tout intervalle fini et la fonction $P(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau$ est bornée pour $-\infty < t < \infty$;*

(ii) *$g(x)$ est localement lipschitzienne, il existe $a > 0$ tel que pour $|x| \geqslant a$ on ait $xg(x) < 0$;*

(iii) *$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = -\infty$;*

(iv) *$f(x)$ est continue quel que soit x et vérifie une des conditions suivantes:*

$$\sup_{x\geqslant 0}\int_0^x f(\xi)d\xi < \infty \quad \text{et} \quad \inf_{x\leqslant 0}\int_0^x f(\xi)d\xi > -\infty, \tag{a$_1$}$$

$$\inf_{x\geqslant 0}\int_0^x f(\xi)d\xi > -\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x\leqslant 0}\int_0^x f(\xi)d\xi < \infty, \tag{a$_2$}$$

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^x f(\xi)d\xi < \infty, \tag{a$_3$}$$

$$\inf_{-\infty<x<\infty}\int_0^x f(\xi)d\xi > -\infty. \tag{a$_4$}$$

Alors l'équation (7) *admet une infinité de demi-intégrales à droite bornées, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, une infinité de demi-intégrales à gauche bornées, ainsi que leurs dérivées du premier ordre et une intégrale au moins qui est bornée, ainsi que sa dérivée, pour $-\infty < t < \infty$.*

Démonstration. On considère le système

$$x^{\cdot} = y-F(x)+P(t), \qquad y^{\cdot} = -g(x) \qquad \text{où} \qquad F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi. \tag{8}$$

La fonction $P(t)$ étant absolument continue, ce système vérifie les conditions d'unicité et de continuité des intégrales par rapport à toutes conditions initiales. Il est équivalent à l'équation (7) dans le sens que $x^{\cdot}(t)$, qui est absolument continue, admet une dérivée telle que (7) soit vérifiée pour tous les t tels que $P_1'(t) = p(t)$, c'est-à-dire presque pour tous les t. Soient

$$|g(x)| < M \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant a \tag{9}$$

$$\text{et} \qquad G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi.$$

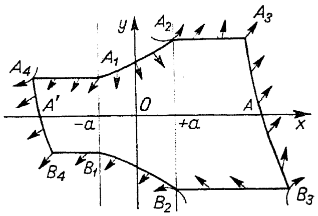

Fig. 7

Nous allons construire un domaine cylindrique ω, dont la frontière sera sans contact; à cet effet nous allons construire une courbe simple fermée C, section de $\mathrm{fr}\,\omega$ par le plan $t = 0$ (fig. 7).

Considérons la courbe

$$v(x, y) \equiv \tfrac{1}{2}y^2+G(x)-Mx = \tfrac{1}{2}b^2, \qquad |x| \leqslant a \tag{10}$$

où $b^2 > 4Ma$; la courbe ne coupe pas l'axe Ox car

$$|G(x)-Mx| = \Big|\int_0^x \big(g(\xi)-M\big)d\xi\Big| \leqslant \int_0^a 2Md\xi = 2Ma < \tfrac{1}{2}b^2.$$

Elle est symétrique par rapport à Ox et composée de deux branches: A_1A_2 située au dessus de Ox et B_1B_2 au dessous. On a, sur la courbe,

$$y\frac{dy}{dx} = M-g(x) > 0, \qquad |x| \leqslant a.$$

Soient

$$K = \sup|P(t)| \qquad \text{pour} \qquad -\infty < t < \infty,$$

$$L = \max|F(x)| \qquad \text{pour} \qquad |x| \leqslant a.$$

Prenons

$$b^2 > \max\{4Ma,\, 4(K+L)^2+2Ma+2G(-a)\}. \tag{11}$$

Le long des intégrales du système (8) on a

$$v^{\cdot} = -My+\big(g(x)-M\big)\big(P(t)-F(x)\big). \tag{12}$$

Les ordonnées y_1 et y_2 des points A_1 et A_2 sont données par

$$(13)\qquad y_1^2 = b^2-2Ma-2G(-a) < y_2^2 = b^2+2Ma-2G(a).$$

Le signe de $v^\cdot$ sera donnée par le premier terme de (12), car

$$My_1 > 2M(K+L) \geqslant |g(x)-M|\cdot|P(t)-F(x)| \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant a,$$

quel que soit t, comme il est facile à voir à l'aide de (11) et (13).

Par les points A_2 et B_2 on mène les demi-droites $y = \pm y_2$, pour $x \geqslant a$; sur ces demi-droites on a $y^\cdot = -g(x) > 0$.

Dans ce qui suit on suppose que c'est la condition (a_1) qui se trouve vérifiée. Soit la courbe

$$(14)\qquad u(x, y) \equiv \tfrac{1}{2}y^2+G(x)-ly = \tfrac{1}{2}y_2^2+G(\lambda)-ly_2$$

où $a < \lambda \leqslant x$, $|y| \leqslant y_2$, $l > \max(y_2, N_1+K)$, $N_1 = \sup F(x)$ pour $x \geqslant a$.

La courbe (14) passe par le point $A_3 = (\lambda, y_2)$ et sur cette courbe on a

$$y'(y-l) = -g(x), \quad \text{donc} \quad y' < 0.$$

Pour $x \geqslant \lambda$ l'ordonnée sur la courbe (14) décroit strictement. La courbe rencontre — et une seule fois — l'axe Ox en $A = (x_2, 0)$ et la droite $y = -y_2$ en $B_3 = (x_3, -y_2)$. En effet, l'abscisse du point B_3 vérifie l'équation

$$(15)\qquad G(x)+ly_2 = G(\lambda)-ly_2 \quad \text{ou encore} \quad \int_\lambda^x g(\xi)\,d\xi = -2ly_2.$$

En vertu de la condition (iii) l'intégrale de (15) tend vers $-\infty$ pour $\lambda > a$ fixe et $x \to \infty$ et la dérivée de l'intégrale est négative en vertu de la condition (ii), quel que soit $x \geqslant \lambda$; il existe donc un $x_3 > \lambda$ unique tel que l'équation (15) soit vérifiée.

Sur la courbe (14) on a, le long des intégrales du système (8)

$$u^\cdot = -g(x)\big(F(x)-P(t)-l\big) < 0, \quad \text{car} \quad l > N_1+K.$$

Par les points A_1 et B_1 on mène les demi-droites $y = \pm y_1$ pour $x \leqslant -a$; sur ces demi-droites on a $y^\cdot = -g(x) < 0$, le long des intégrales du système (8).

Soit maintenant la courbe

$$(16)\qquad w(x, y) \equiv \tfrac{1}{2}y^2+G(x)+sy = \tfrac{1}{2}y_1^2+G(\mu)-sy_1$$

où $x \leqslant \mu < -a$, $|y| \leqslant y_1$, $s > \max(y_1, K-N_2)$, $N_2 = \inf\limits_{x\leqslant -a} F(x)$. La courbe (16) passe par le point $B_4 = (\mu, -y_1)$ et sur cette courbe l'on a

$$y'(s+y) = -g(x), \quad \text{donc} \quad y' < 0$$

et donc pour $x \leqslant \mu$ l'ordonnée sur la courbe croit strictement quand x décroit. La courbe rencontre — et une seule fois — l'axe Ox en $A' = (x_2', 0)$ et la droite $y = y_1$ en $A_4 = (x_4, y_1)$. En effet, l'abscisse du point A_4 vérifie l'équation

$$(17)\qquad G(x)+sy_1 = G(\mu)-sy_1 \quad \text{ou} \quad \int_\mu^x g(\xi)\,d\xi = -2sy_1.$$

En vertu de la condition (iii) l'intégrale de (17) tend vers $-\infty$ pour $\mu < -a$ fixe et $x \to -\infty$ et la dérivée de l'intégrale est positive quel que soit $x \leqslant \mu$ en vertu de la condition (ii), donc l'intégrale décroit quand x décroit. Il existe donc un $x_4 < \mu$ unique qui vérifie l'équation (17). Sur la courbe (16) on a le long des intégrales du système (8),

$$w^\cdot = g(x)\big(P(t)-F(x)-s\big) < 0 \quad \text{car} \quad s > K-N_2.$$

Considérons la courbe fermée $C = A_1A_2A_3B_3B_2B_1B_4A_4A_1$ et le domaine cylindrique ω tel que la frontière de sa section par le plan $t = 0$ soit la courbe simple fermée C. Les surfaces ouvertes $(A_4A_1A_2)$, (B_3B_2) qui se projettent sur les arcs ouverts respectifs de la courbe C sont composées uniquement de points d'entrée stricte de ω par rapport au système (8) et les surfaces ouvertes $(A_2A_3B_3)$, $(B_2B_1B_4A_4)$ de points de sortie stricte. Enfin les génératrices $\{A_2\}$, $\{B_3\}$, $\{B_2\}$, $\{A_4\}$ sont composées uniquement de points de glissement extérieur. La démonstration s'achève avec les mêmes arguments que ceux du théorème 2.

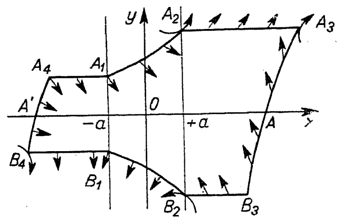

Fig. 8

Dans le cas (a_2) à la place de la courbe (14) on utilise la courbe

$$u(x, y) \equiv \tfrac{1}{2}y^2+G(x)+ly = \tfrac{1}{2}y_2^2+G(\lambda)-ly_2$$

qui passe par $B_3 = (\lambda, -y_2)$, avec

$$l > \max\{y_2, K-\inf F(x) \text{ pour } x \geqslant a\}$$

et à la place de la courbe (16) la courbe

$$w(x, y) \equiv \tfrac{1}{2}y^2+G(x)-sy = \tfrac{1}{2}y_1^2+G(\mu)-sy_1$$

qui passe par $A_4 = (\mu, y_1)$, avec

$$s > \max\{y_1, K+\sup F(x) \text{ pour } x \leqslant -a\}.$$

La construction est indiquée dans la fig. 8. Enfin les constructions qui correspondent aux conditions (a_3) et (a_4) ainsi que l'allure des intégrales du système (8) à la frontière du domaine respectif sont indiquées dans les fig. 9 et 10.

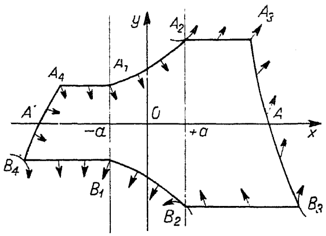

Fig. 9

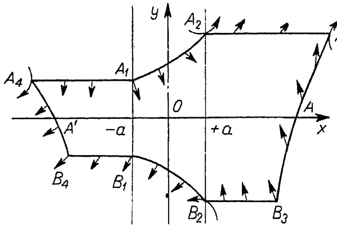

Fig. 10

Remarque. Si la fonction $P(t)$ est bornée seulement pour $t \geqslant t_0$ (ou $t \leqslant t_0$) l'équation (7) admet une infinité de demi-intégrales à droite (ou à gauche) bornées ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Travaux cités

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 279-313.

[2] K. Tatarkiewicz, *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska 7 (1953), p. 19-81.

[3] Z. Szmydt, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 253-276.

[4] Z. Mikołajska, *Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singulier*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 277-305.

[5] A. Halanay, *Points singuliers et solutions périodiques*, Bul. St. de l'Acad. R. P. R. 7 (1955), p. 319-324.

[6] I. Barbălat, *Remarques sur la Note „Points singuliers et solutions périodiques"*, Bul. St. de l'Acad. R. P. R. 7 (1955), p. 325-328.

[7] F. Albrecht, *Points singuliers et solutions périodiques*, Com. Acad. R. P. R., t. V, nr 7 (1955), p. 1035-1040.

[8] C. Corduneanu, *Solutions presque-périodiques des équations différentielles non linéaires du second ordre*, Com. Acad. R. P. R., t. V, nr 5 (1955), p. 793-797.

[9] C. Corduneanu, *Solutions asymptotiquement presque-périodiques des équations différentielles non linéaires du second ordre*, Studii şi Cercetări Stiinţifice, Acad. R. P. R. Filiala Iaşi 6, nr 3-4 (1955), p. 1-3.

[10] C. Foiaş, G. Gussi et V. Poenaru, *Une méthode directe dans l'étude des équations aux dérivées partielles hyperboliques quasilinéaires en deux variables*, Mathematische Nachrichten 15 (1956), p. 89-116.

[11] J. L. Massera, *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. Journal 17 (1950), p. 457-475.

[12] C. Corduneanu, *Théorèmes d'existence sur l'axe réel des solutions des équations différentielles non-linéaires du second ordre*, Bul. St. de l'Acad. R. P. R. 7 (1955), p. 645-651.

Reçu par la Rédaction le 16. 10. 1956