ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Problème non linéaire d'Hilbert pour un système infini de fonctions

par D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble de p lignes de Jordan $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sans points communs et limitant les domaines disjoints $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$. Soit en outre une ligne de Jordan L_0 enveloppant toutes les lignes $L_1, \ldots, L_p$ et ne les coupant pas. Toutes les lignes $L_0, L_1, \ldots, L_p$ ont une tangente continue.

Désignons par S_0^- le domaine infini situé à l'extérieur de la ligne L_0 et par S^+ le domaine limité par la ligne L_0 et les lignes $L_1, \ldots, L_p$.

Nous posons le problème non linéaire d'Hilbert suivant pour un système infini de fonctions:

Trouver une suite infinie de fonctions de la variable complexe $\{\Phi_n(z)\}$ dont chacune soit holomorphe dans les domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ séparément et dont les valeurs limites Φ_n^+, Φ_n^- relativement aux domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ satisfassent en tout point t de l'ensemble $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_p$ aux relations

$$\Phi_n^+(t) = G_n(t)\Phi_n^-(t) + F_n[t, \Phi_1^+(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^+(t), \Phi_2^-(t), \ldots] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Le problème proposé est une généralisation du problème pour un système fini de fonctions, posé et résolu par W. Pogorzelski dans les travaux [1] et [2].

Nous admettons les hypothèses suivantes:

A. Les fonctions $G_n(t)$ sont déterminées pour $t \in L$ et elles vérifient la condition de Hölder:

$$|G_n(t) - G_n(t')| \leqslant g_n|t-t'|^{\mu} \quad (0 < \mu < 1;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

En outre on suppose que les fonctions $G_n(t)$ sont toujours différentes de zéro. Nous posons $\sup_L |G_n(t)| = g_n'$.

B. Les fonctions $F_n(t, u_1, u_2, \ldots)$ sont déterminées pour $t \in L$, $|u_n| \leqslant R$ et elles vérifient la condition

$$(3)\qquad |F_n(t, u_1, \ldots)-F_n(t', u_1', \ldots)| \leqslant f_n\Big[|t-t'|^\mu+\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}|u_i-u_i'|\Big]$$

$$(0<\mu<1;\ n=1,2,\ldots),$$

où $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}$ sont des séries arbitraires à termes positifs et leurs sommes sont inférieures à l'unité.

Nous posons $\sup|F_n(t, u_1, u_2, \ldots)| = f_n'$.

En supposant que la solution $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ du problème existe et que les fonctions $\Phi_n^{\pm}(t)$ vérifient les conditions de Hölder aux coefficients bornés et avec l'exposant μ, nous pouvons affirmer, d'après les travaux de Gahoff [3] et de Hvédelidsé [4], sous les hypothèses A, B, que les fonctions de la solution vérifient les relations

$$(4)\qquad \Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}X_n(z)\int_L \frac{F_n[\tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \Phi_2^+(\tau), \Phi_2^-(\tau), \ldots]}{X_n^+(\tau)(\tau-z)}d\tau+$$

$$+X_n(z)P_n(z)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

où $X_n(z)$ désigne la solution, dite canonique, du problème d'Hilbert homogène (c'est-à-dire dans le cas $F_n\equiv 0$) donnée par les formules:

$$(5)\qquad X_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Pi_n(z)}\exp\Gamma_n(z), & z\in S^+,\\ z^{-\varkappa_n}\exp\Gamma_n(z), & z\in S^- \end{cases}$$

où

$$(6)\qquad \Gamma_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G_n^{(0)}(\tau)}{\tau-z}d\tau,\qquad G_n^{(0)}(\tau) = \tau^{-\varkappa_n}\Pi_n(\tau)G_n(\tau).$$

Le nombre entier $\varkappa_n$, dit *index* du problème, est déterminé par la somme $\varkappa_n = \sum_{i=0}^{p}\lambda_{ni}$, où $2\pi\lambda_{ni} = [\arg G_n(t)]_{L_i}$ est l'accroissement subi par l'argument de la fonction $G_n(t)$ lorsque le point t décrit la ligne fermée L_i dans le sens positif pour $i=0$ et dans le sens négatif pour $i=1,2,\ldots,p$.

Nous avons

$$(7)\qquad \Pi_n(z) = (z-a_1)^{\lambda_{n1}}(z-a_2)^{\lambda_{n2}}\ldots(z-a_p)^{\lambda_{np}},$$

où a_i est un point arbitrairement choisi à l'intérieur du domaine S_i^- et le point $z=0$ se trouve à l'intérieur du domaine S^+.

$P_n(z)$ sont des fonctions entières arbitrairement choisies.

On peut montrer que les valeurs limites des fonctions $X_n(z)$ aux points des courbes L vérifient les conditions de Hölder de la forme

$$(8)\qquad |X_n^{\pm}(t)-X_n^{\pm}(t')| \leqslant x_n|t-t'|^\mu\qquad (0<\mu<1;\ n=1,2,\ldots)$$

et les inégalités

$$(9)\qquad 0<x_n'' \leqslant |X_n^{\pm}(t)| \leqslant x_n'$$

où x_n, x_n', x_n'' sont des constantes positives. Remarquons qu'il existe un nombre positif ϱ tel que la ligne L_0 soit située à l'intérieur du cercle de centre $z=0$ et de rayon ϱ. On peut choisir des nombres p_n et p_n', tels qu'on ait

$$(10)\qquad |P_n(z)-P_n(z')| \leqslant p_n|z-z'|^\mu\qquad (0<\mu<1;\ n=1,2,\ldots),$$

$$(11)\qquad |P_n(z)| \leqslant p_n'\qquad (n=1,2,\ldots),$$

si $|z|\leqslant\varrho$, $|z'|\leqslant\varrho$.

D'après les propriétés de l'intégrale du type de Cauchy, nous déduisons des relations (4) les relations suivantes:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \Phi_n^+(t) &= \frac{1}{2\pi i}X_n^+(t)\int_L \frac{F_n[\tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \ldots]}{X_n^+(\tau)(\tau-t)}d\tau+X_n^+(t)P_n(t)+\\ &\quad+\frac{1}{2}F_n[t, \Phi_1^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots]\qquad (n=1,2,\ldots),\\ \Phi_n^-(t) &= \frac{1}{2\pi i}X_n^-(t)\int_L \frac{F_n[\tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \ldots]}{X_n^+(\tau)(\tau-t)}d\tau+X_n^-(t)P_n(t)-\\ &\quad-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n^-(t)}{X_n^+(t)}F_n[t, \Phi_1^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots]\qquad (n=1,2,\ldots) \end{aligned}$$

en tout point t des courbes L.

Nous posons maintenant

$$(13)\qquad \varphi_{2n-1}(t) = \Phi_n^+(t),\qquad \varphi_{2n}(t) = \Phi_n^-(t),$$

$$(14)\qquad H_{2n-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}X_n^+(t),\qquad H_{2n}(t) = \frac{1}{2\pi i}X_n^-(t),$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} K_{2n-1}(t, u_1, u_2, \ldots) &= \frac{1}{2}F_n(t, u_1, u_2, \ldots)+X_n^+(t)P_n(t),\\ K_{2n}(t, u_1, u_2, \ldots) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n^-(t)}{X_n^+(t)}F_n(t, u_1, u_2, \ldots)+X_n^-(t)P_n(t), \end{aligned}$$

(16) $$L_{2n-1}(t, u_1, u_2, \ldots) = L_{2n}(t, u_1, u_2, \ldots) = \frac{F_n(t, u_1, u_2, \ldots)}{X_n^+(t)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après les formules (2), (3), (8), (9), (10), (11) nous avons les inégalités suivantes pour $t, t' \in L$, $|u_n| \leqslant R$:

(17) $$|H_n(t) - H_n(t')| \leqslant h_n |t-t'|^\mu \qquad (0 < \mu < 1;\ n = 1, 2, \ldots),$$

(18) $$0 < h_n'' \leqslant |H_n(t)| \leqslant h_n',$$

(19) $$|K_n(t, u_1, u_2, \ldots) - K_n(t', u_1', u_2', \ldots)| \leqslant k_n \Big[|t-t'|^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} |u_i - u_i'|\Big],$$

(20) $$\sup |K_n(t, u_1, u_2, \ldots)| \leqslant k_n',$$

(21) $$|L_n(t, u_1, u_2, \ldots) - L_n(t', u_1', u_2', \ldots)| \leqslant l_n \Big[|t-t'|^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} |u_i - u_i'|\Big],$$

(22) $$\sup |L_n(t, u_1, u_2, \ldots)| \leqslant l_n'$$

où les constantes $h_n, h_n', h_n'', k_n, k_n', l_n, l_n'$ sont données par les formules

$$h_n = \frac{x_n}{2\pi}, \qquad h_n' = \frac{x_n'}{2\pi}, \qquad h_n'' = \frac{x_n''}{2\pi},$$

$$k_{2n-1} = \frac{1}{2} f_n + x_n' p_n + x_n p_n', \qquad k_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 x_n' x_n f_n' + x_n' x_n'' f_n}{x_n''^2} + x_n' p_n + x_n p_n',$$

$$k_{2n-1}' = \frac{1}{2} f_n' + x_n' p_n', \qquad k_{2n}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n'}{x_n''} f_n' + x_n' p_n',$$

$$l_{2n} = l_{2n-1} = \frac{x_n' f_n + x_n f_n'}{x_n''^2}, \qquad l_{2n}' = l_{2n-1}' = \frac{f_n'}{x_n''}.$$

D'après (13)-(16), on peut écrire le système (12) sous la forme

(23) $$\varphi_n(t) = K_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots] + H_n(t) \int_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

où les fonctions K_n, H_n, L_n sont déterminées pour $t, \tau \in L$, $|u_n| \leqslant R$ et satisfont aux inégalités (17)-(22).

Nous supposons que les constantes du problème satisfont aux inégalités

(24) $$k_n + h_n l_n I < 1, \qquad \frac{k_n + l_n(h_n I + h_n' D) + l_n'}{1 - k_n - h_n l_n I} < \frac{R - k_n' - l_n' - h_n' l_n I}{h_n' l_n I} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

où $I = \sup_{t \in L} \int_L \frac{dl_\tau}{|t-\tau|^{1-\mu}}$ et la constante D [1] ne dépend que des lignes L.

Nous avons ramené notre problème à la résolution d'un système (23) d'équations intégrales non linéaires de seconde espèce, à singularité forte et à une infinité de fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sur L.

Pour résoudre le système (23) nous appliquerons le théorème de Tichonov [6] relatif au point invariant d'une transformation dans l'espace métrique:

Dans un espace métrique linéaire, localement convexe et complet (c'est-à-dire dans l'espace du type B_0) toute transformation continue d'un ensemble convexe, fermé et compact en son sous-ensemble a au moins un point invariant.

Considérons l'espace E composé de toutes les suites $u = \{\varphi_n(t)\}$ de fonctions continues de la variable complexe déterminées sur L. Nous admettons pour tout point u une suite dénombrable de pseudonormes homogènes: $\|u\|_n = \sup |\varphi_n(t)|$. La métrique peut être définie par exemple comme la somme de la série:

$$\varrho(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\|u-v\|_i}{1 + \|u-v\|_i}.$$

On sait que l'espace E est du type B_0.

---

[1] La constante D figure dans le théorème de Plemelj-Privaloff [5] qui sera appliqué dans ce travail:

Théorème du Plemelj-Privaloff. *Si $f(t)$ est une fonction complexe de la variable $t \in L$, qui satisfait à la condition de Hölder de la forme*

(*) $$|f(t) - f(t')| \leqslant q |t-t'|^\mu \qquad (0 < \mu < 1),$$

alors la fonction déterminée par l'intégrale singulière de Cauchy

$$F(t) = \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau \qquad (t \in L)$$

satisfait à la condition de Hölder de la forme

(**) $$|F(t) - F(t')| \leqslant q D |t-t'|^\mu$$

où la constante D ne dépend que des lignes L.

Dans l'espace E nous considérons l'ensemble Z déterminé par les conditions suivantes:

$$|\varphi_n(t)| \leqslant R, \tag{25}$$

$$|\varphi_n(t)-\varphi_n(t')| \leqslant \varkappa|t-t'|^{\mu} \tag{26}$$

où le coefficient positif $\varkappa$ est arbitrairement fixé à l'intérieur d'un intervalle déterminé plus loin.

On peut montrer que l'ensemble Z est convexe, fermé et compact.

Considérons une transformation de l'ensemble Z, définie par les formules

$$\psi_n(t) = K_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]+ \tag{27}$$
$$+H_n(t)\int_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau-t}\,d\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

qui font correspondre à tout point $u = \{\varphi_n(t)\}$ de l'ensemble Z un point $v = \{\psi_n(t)\}$ de l'espace E. Nous allons démontrer que la transformation (27) est continue. Dans ce but il suffit de démontrer que pour chaque n la convergence uniforme d'une suite $\{\varphi_n^{(m)}\}$ à φ_n implique la convergence uniforme de la suite $\{\psi_n^{(m)}\}$ des fonctions qui correspondent aux $\varphi_n^{(m)}$ vers une fonction ψ_n qui correspond à φ_n.

Nous pouvons écrire

$$\psi_n(t)-\psi_n^{(m)}(t) = K_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]-K_n[t, \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots]+ \tag{28}$$
$$+H_n(t)\pi i\{L_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]-L_n[t, \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots]\}+$$
$$+H_n(t)\Big\{\int_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]-L_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]}{\tau-t}\,d\tau -$$
$$-\int_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \varphi_2^{(m)}(\tau), \ldots]-L_n[t, \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots]}{\tau-t}\,d\tau\Big\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pour la première différence, I_1, nous avons l'inégalité

$$|I_1| \leqslant k_n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}|\varphi_i(t)-\varphi_i^{(m)}(t)|.$$

Remarquons qu'il existe un M_n^{I} assez grand pour que $\sum_{i=M_n^{\mathrm{I}}}^{\infty} a_{ni} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{12Rk_n}$. On peut choisir ensuite le nombre M_n^{II} de manière que pour $m > M_n^{\mathrm{II}}$ on ait

$$|\varphi_i(t)-\varphi_i^{(m)}(t)| \leqslant \varepsilon/6k_n, \quad \text{si} \quad i = 1, 2, \ldots, M_n^{\mathrm{I}}-1.$$

On aura alors

$$|I_1| \leqslant \varepsilon/3, \quad \text{si} \quad m > M_n^{\mathrm{II}}.$$

Pour la seconde différence, I_2, nous avons

$$|I_2| \leqslant \pi h_n' l_n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}|\varphi_i(t)-\varphi_i^{(m)}(t)|.$$

Or, il existe un M_n^{III} assez grand pour que $\sum_{i=M_n^{\mathrm{III}}}^{\infty} a_{ni} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{12h_n' l_n R}$. On peut ensuite choisir M_n^{IV} de manière que pour $m > M_n^{\mathrm{IV}}$ on ait

$$|\varphi_i(t)-\varphi_i^{(m)}(t)| \leqslant \varepsilon/6h_n' l_n \quad (i = 1, 2, \ldots, M_n^{\mathrm{III}}-1).$$

On aura alors

$$|I_2| \leqslant \varepsilon/3, \quad \text{si} \quad M > M_n^{\mathrm{IV}}.$$

Pour la troisième différence, I_3, nous considérons le cercle Λ de centre t et de rayon ϱ assez petit pour que Λ ne contienne qu'un arc l des lignes L et nous décomposons I_3 en deux parties:

$$I_3 = I_3^l+I_3^{L-l}$$

où l'intégration s'étend à l'arc l et aux lignes $L-l$.

Pour chaque m et aussi pour la limite, l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\left|H_n(t)\int_l \frac{L_n[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \varphi_2^{(m)}(\tau), \ldots]-L_n[t, \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots]}{\tau-t}\,d\tau\right|$$
$$\leqslant h_n'(1+\varkappa)\int_l \frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}} \leqslant \frac{\varepsilon}{12},$$

si l'arc l est suffisamment petit, d'où

$$|I_3^l| \leqslant \varepsilon/6.$$

Dans l'intégrale I_3^{L-l} le point t est situé à l'extérieur du domaine d'intégration, donc pour chaque n et pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir un nombre M_n^{V} tel qu'on ait

$$|I_3^{L-l}| \leqslant \varepsilon/3, \quad \text{si} \quad m > M_n^{\mathrm{V}}$$

quel que soit $t \in L$.

En somme nous avons

$$|\psi_n^{(m)}(t)-\psi_n(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{si} \quad m > \max(M_n^{\mathrm{II}}, M_n^{\mathrm{IV}}, M_n^{\mathrm{V}}),$$

donc la transformation (27) est continue.

Nous allons démontrer que l'ensemble Z' des points transformés $v = \{\psi_n(t)\}$ fait partie de l'ensemble Z. Nous avons

$$(29)\qquad |\psi_n(t)| \leqslant |K_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]| + \\ +|H_n(t)|\cdot \left| \int\limits_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t}\, d\tau \right| \\ \leqslant k_n' + h_n' \left| \int\limits_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots] - L_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots]}{\tau - t}\, d\tau + \right. \\ \left. + \pi i L_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots] \right| \leqslant k_n' + h_n'[l_n(1+\varkappa)I + \pi l_n'].$$

De la même façon nous aurons

$$(30)\qquad |\psi_n(t) - \psi_n(t')| \leqslant |K_n[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots] - K_n[t', \varphi_1(t'), \varphi_2(t'), \ldots]| + \\ +|H_n(t) - H_n(t')|\cdot \left| \int\limits_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t}\, d\tau \right| + \\ +|H_n(t)|\cdot \left| \int\limits_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t}\, d\tau - \int\limits_L \frac{L_n[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t'}\, d\tau \right|$$

d'où, d'après le théorème de Plemelj-Privaloff (voir la note de la p. 297):

$$(31)\qquad |\psi_n(t) - \psi_n(t')| \\ \leqslant \{k_n(1+\varkappa) + h_n[l_n I(1+\varkappa) + \pi l_n'] + h_n' l_n D\}|t-t'|^{\mu} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

où la constante D ne dépend que des lignes L.

Nous en concluons, d'après (25), (26), (29) et (30), que le point transformé v appartient à l'ensemble Z, si les constantes du problème satisfont aux inégalités

$$\begin{gathered} k_n' + h_n'[l_n' I(1+\varkappa) + \pi l_n'] \leqslant R, \\ k_n(1+\varkappa) + h_n[l_n I(1+\varkappa) + \pi l_n'] + h_n' l_n D \leqslant \varkappa \end{gathered} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

d'où

$$(32)\qquad 0 < \frac{k_n + h_n l_n I + \pi l_n' + h_n' l_n D}{1 - k_n - h_n l_n I} \leqslant \varkappa \leqslant \frac{R - k_n' - k_n' l_n I - \pi l_n'}{h_n' l_n I} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après les hypothèses (24) il existe un nombre $\varkappa$ qui satisfait à cette inégalité.

Toutes les conditions du théorème de Tichonov sont satisfaites, donc il existe au moins une solution $\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots$ du système d'équations (23).

Nous allons montrer que le système de fonctions

$$(33)\qquad \Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} X_n(z) \int\limits_L \frac{F_n[\tau, \varphi_1^*(\tau), \varphi_2^*(\tau), \ldots]}{X_n^+(\tau)(\tau - z)}\, d\tau + X_n(z) P_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

fournit la solution du problème de Hilbert proposé. En effet, d'après la propriété limite de l'intégrale du type de Cauchy démontrée par Plemelj, les valeurs limites des fonctions (33) en tout point t de la frontière L sont

$$(34)\qquad \Phi_n^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} X_n^{\pm}(t) \int\limits_L \frac{F_n[\tau, \varphi_1^*(\tau), \varphi_2^*(\tau), \ldots]}{X_n^+(\tau)(\tau - t)}\, d\tau \pm \\ \pm \frac{X_n^{\pm}(t)}{X_n^+(t)} F_n[t, \varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots] + X_n^{\pm}(t) P_n(t).$$

Il en résulte, d'après le système résolu (23), que les valeurs limites (34) vérifient les relations (1), c'est-à-dire que le système de fonctions (33) représente bien la solution du problème généralisé de Hilbert.

Nous avons donc le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions* $G_n(t)$ *et* $F_n(t, u_1, u_2, \ldots)$ *remplissent les conditions* A *et* B *et si les constantes du problème vérifient les inégalités* (24), *il existe au moins une suite infinie de fonctions holomorphes* $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ *dont les valeurs limites satisfont aux relations proposées* (1).

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 1-13.

[2] — *Problème aux limites d'Hilbert généralisé*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 136-144.

[3] Ф. Гахов, *Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного*, Известия Казанского Университета 10.3 (1938), p. 39-79.

[4] Б.В. Хведелидзе, *Об одной граничной задаче Римана*, Сообщения А. Н. Груз. ССР 4.4 (1943), p. 289-296.

[5] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen-Holland 1953, p. 42.

[6] A. N. Tichonov, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. 111 (1935), p. 767-776.

Reçu par la Rédaction le 2. 4. 1957