que $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s) = +\infty$, c'est-à-dire que la courbe C fait une infinité de tours dans un sens déterminé. Prenons, en effet, une série convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ à termes positifs et posons

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \alpha_n = \beta_{n-1}+a_n, \quad \beta_n = \alpha_n+1/(n+1) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les intervalles $\langle\alpha_n, \beta_n\rangle$ et $\langle\beta_n, \alpha_{n+1}\rangle$ recouvrent la demi-droite $s \geqslant 0$ tout entière; leurs longueurs sont égales à $1/(n+1)$ et a_n respectivement. Posons maintenant

$$k_1(s) = \begin{cases} n+1 & \text{dans les intervalles } \langle\alpha_n, \beta_n\rangle \\ 1/a_n & \text{dans les intervalles } (\beta_n, \alpha_{n+1}) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$k_2(s) = \begin{cases} 0 & \text{dans les intervalles } \langle\alpha_n, \beta_n\rangle \\ -2/a_n & \text{dans les intervalles } (\beta_n, \alpha_{n+1}) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Comme il est aisé de vérifier, les fonctions $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ainsi définies satisfont aux conditions (14)-(16); en particulier

$$\int_0^\infty \frac{|k_2(s)|}{k_1(s)}\,ds = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} 2ds = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n < +\infty,$$

$$\int_0^\infty \left| d\,\frac{1}{k_1(s)} \right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Mais, pour la courbe C dont la courbure $k(s)$ est égale à la somme $k_1(s)+k_2(s)$, l'angle $\alpha(s)$ reste toujours compris entre 0 et 1. La discontinuité des fonctions $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ne diminue pas la valeur de cet exemple, car en ne changeant en rien leurs propriétés essentielles on pourrait les modifier de sorte qu'elles deviennent continues.

Pourtant, en ajoutant aux hypothèses (14)-(16) d'autres conditions accessoires, on peut aisément assurer non seulement la relation $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s) = +\infty$ mais aussi la croissance de $\alpha(s)$, au moins si s est suffisamment grand. Il suffit à cet effet de supposer, par exemple, que pour tout s: $-k_2(s) \leqslant k_1(s)$, ou bien que la fonction $k_2(s)$ soit absolument intégrable sur la demi-droite $(0, +\infty)$ tout entière.

Travaux cités

[1] E. Hobson, *The theory of function*, v. I., sec. ed., Cambridge 1921.

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

La courbure d'une courbe plane et l'existence d'une asymptote

par S. Gołąb, M. Kuczma et Z. Opial (Kraków)

Introduction. Dans la présente note nous étudierons les courbes planes suffisamment régulières pour que la courbure existe en tout point. Il s'agira d'établir pour la courbure certaines conditions, suffisantes ou nécessaires, pour que la courbe possède une asymptote.

Comme on le sait, il y a deux définitions non équivalentes de l'asymptote: l'une d'elles définit une asymptote comme la position limite vers laquelle tend la tangente à la courbe lorsque le point de contact de la tangente s'éloigne vers l'infini, suivant l'autre, l'asymptote est la droite telle que la distance du point mobile de la courbe à cette droite tend vers zéro lorsque le point s'éloigne vers l'infini. Nous adoptons la première de ces définitions qui convient mieux à nos buts bien que la seconde soit plus générale.

Nous dirons qu'une courbe possède une direction asymptotique, si l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des abscisses tend vers une limite finie lorsque le point de contact tend vers l'infini.

L'existence d'une asymptote comme position limite de la tangente a pour conséquence l'existence d'une direction asymptotique, mais l'inverse n'est pas vrai; une courbe possédant une direction asymptotique peut ne pas avoir d'asymptote.

La branche de la courbe B admettant une asymptote A peut être convexe et alors elle reste toujours d'un côté de l'asymptote. L'intuition nous dit que si la branche B est convexe et à courbure monotone et si elle possède une direction asymptotique, la courbure au point p de la courbe tend vers zéro lorsque le point p s'éloigne vers l'infini. L'intuition nous dit aussi que si une branche convexe et à courbure monotone possède une asymptote A, la courbure au point p tendra vers zéro encore plus vite. Pour préciser, prenons un point arbitraire p_0 de la branche B — nous l'appellerons dans la suite origine de la branche — et désignons par $s(p)$ la longueur de l'arc de B entre l'origine p_0 et le point p (toute portion bornée de la branche, comme convexe, est évidemment rectifiable). Or,

$s(p) \to \infty$ lorsque $p \to \infty$. La comparaison de la courbure $\varkappa(s)$ à la fonction $s(p)$ indéfiniment croissante nous servira de mesure de la „vitesse" avec laquelle $\varkappa(s)$ tend vers zéro. Ainsi, par exemple, pour les hyperboles $\varkappa(s)$ est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à $1/s(p)$.

En 1948, le premier de nous a établi certains simples critères suffisants pour que la branche B possède soit une direction asymptotique, soit une asymptote et il les a publiés (sans démonstrations) en 1950 (v. [2]). En essayant de trouver des conditions nécessaires il n'a obtenu que quelques résultats partiels. Récemment, le second de nous a réussi à compléter ces conditions nécessaires. C'est pourquoi le premier de nous a décidé de publier les démonstrations de ses résultats précédents. Cependant le troisième de nous a réussi à trouver des résultats plus généraux et, bien plus, à simplifier considérablement au moyen d'un artifice de calcul et d'un lemme les raisonnements des deux premiers auteurs. De là est résultée cette publication commune.

§ 1. Supposons que la courbe plane C possède une courbure continue $\varkappa(s)$ (munie d'un signe). La courbe C est alors rectifiable et on peut la paramétriser à l'aide de l'arc s (compté à partir d'un point fixe de la courbe). Si la courbe est déterminée pour tout $s \geqslant s_0$, nous dirons qu'elle possède une branche infinie. On sait que l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \varkappa(s)\,ds \tag{1}$$

donne l'angle de rotation de la tangente entre les extrémités de l'arc correspondant aux valeurs de s contenues entre s_1 et s_2. Cet angle doit être entendu dans le sens „cinématique" car le nombre (1) peut assumer toute valeur réelle.

Il est facile de voir que si la branche possède une direction asymptotique, l'intégrale impropre

$$\int_{s_0}^{\infty} \varkappa(s)\,ds \tag{2}$$

existe et elle est finie. Inversement, la convergence de l'intégrale (2) a pour conséquence l'existence d'une direction asymptotique. L'existence d'une direction asymptotique ou d'une asymptote est indépendante du choix de l'origine p_0 de la branche. La comparaison de la courbure $\varkappa(s)$ à l'arc s compté à partir de l'origine p_0, qui pourrait a priori donner des résultats dépendant de p_0, n'en dépend pas, comme nous le verrons dans la suite, ce qui est d'ailleurs facile à prévoir.

Nous chercherons les conditions de l'existence d'une asymptote de la branche B en admettant qu'elle possède déjà une direction asymptotique; il nous faut donc supposer que l'intégrale (2) existe et que l'on a

$$\left|\int_{s_0}^{\infty} \varkappa(s)\,ds\right| < +\infty. \tag{3}$$

Sans restreindre la généralité de nos raisonnements nous pouvons admettre que

$$s_0 = 0 \tag{4}$$

et

$$\int_{0}^{\infty} \varkappa(s)\,ds = \pi. \tag{5}$$

Cette dernière hypothèse peut être assurée (quant au signe) par un choix convenable de l'orientation du plan et (quant à la valeur de l'intégrale envisagée) par un choix convenable de l'origine, combiné, au besoin, à un prolongement de la branche.

THÉORÈME. *Pour qu'une courbe à courbure $\varkappa(s) \geqslant 0$ (s — paramètre intrinsèque, $0 \leqslant s < \infty$) possède une asymptote, il faut et il suffit que l'on ait la relation*

$$\int_{0}^{\infty} s\varkappa(s)\,ds < +\infty. \tag{6}$$

§ 2. Avant de passer à la démonstration du théorème nous allons démontrer un lemme.

LEMME. *Si la fonction $f(x) \geqslant 0$ est intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$, l'intégrabilité de la fonction $xf(x)$ dans l'intervalle $(0, \infty)$ est équivalente à celle de la fonction*

$$F(x) \overset{\text{df}}{=} \int_{x}^{\infty} f(t)\,dt \tag{7}$$

dans le même intervalle et on a

$$\int_{0}^{\infty} F(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx. \tag{8}$$

Démonstration. En intégrant par parties on obtient

$$\int_{0}^{y} F(x)\,dx = yF(y) - \int_{0}^{y} xF'(x)\,dx = yF(y) + \int_{0}^{y} xf(x)\,dx. \tag{9}$$

D'après l'hypothèse $f(x) \geqslant 0$ la fonction $F(x)$ est non croissante. Si donc elle est intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$, alors on a (v. [1], p. 195) $\lim_{x\to\infty} xF(x) = 0$ et de la formule (9) il résulte que la fonction $xf(x)$ est aussi intégrable et en passant à la limite on en tire la relation (8).

Inversement, supposons que la fonction $xf(x)$ soit intégrable dans l'intervalle envisagé. Comme pour $x \leqslant y$ on a, en vertu de l'hypothèse $f(y) \geqslant 0$, l'inégalité $xf(y) \leqslant yf(y)$ donc $\int_x^\infty xf(y)\,dy \leqslant \int_x^\infty yf(y)\,dy$, c'est-à-dire

$$x\int_x^\infty f(y)\,dy = xF(x) \leqslant \int_x^\infty yf(y)\,dy. \tag{10}$$

D'autre part on a

$$0 \leqslant xF(x). \tag{11}$$

Comme $\int_x^\infty yf(y)\,dy \to 0$ lorsque $x\to\infty$, des inégalités (10) et (11) on déduit que $xF(x)\to 0$. De la formule (9) il résulte que son premier membre tend vers une limite finie et en passant à la limite on en obtient (8).

§ 3. Nous passons maintenant à la démonstration du théorème énoncé dans le § 1.

De la théorie des équations intrinsèques des courbes planes on sait que, la courbure $\varkappa(s)$ d'une telle courbe étant exprimée en fonction de l'arc s, on peut écrire les équations paramétriques de la courbe sous la forme

$$x = x(s) = x_0 + \cos\alpha \int_0^s \cos K(t)\,dt - \sin\alpha \int_0^s \sin K(t)\,dt,$$

$$y = y(s) = y_0 + \sin\alpha \int_0^s \cos K(t)\,dt + \cos\alpha \int_0^s \sin K(t)\,dt$$

où nous avons posé, pour abréger

$$K(t) = \int_0^t \varkappa(u)\,du, \tag{12}$$

(x_0, y_0) est l'origine de la courbe et α l'angle que la tangente à la courbe à l'origine fait avec l'axe des abscisses. Admettant que l'origine de la courbe est aussi l'origine du système des coordonnées ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) et que l'axe des abscisses de ce système est tangent à la courbe à l'origine ($\alpha = 0$) on obtient les équations de la courbe sous la forme plus simple:

$$x = \int_0^s \cos K(t)\,dt, \qquad y = \int_0^s \sin K(t)\,dt. \tag{13}$$

De l'hypothèse (5) $K(\infty) = \pi$ et du fait que

$$x'(s) = \cos K(s) \to \cos\pi = -1, \qquad y'(s) = \sin K(s) \to 0$$

on tire immédiatement que c'est la direction du demi-axe négatif des x qui est la direction asymptotique de la courbe considérée. Donc, pour que la courbe possède une asymptote, il faut et il suffit qu'il existe une limite finie

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = y_0. \tag{14}$$

En posant

$$G(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_t^\infty \varkappa(u)\,du \tag{15}$$

et en tenant compte de l'égalité

$$\pi = \int_0^\infty \varkappa(u)\,du = \int_0^t \varkappa(u)\,du + \int_t^\infty \varkappa(u)\,du = K(t) + G(t)$$

on peut écrire au lieu de (13)

$$x = -\int_0^s \cos G(t)\,dt, \qquad y = \int_0^s \sin G(t)\,dt. \tag{16}$$

Supposons d'abord que l'on ait la relation (6). Alors, en vertu du lemme, la fonction $G(t)$ est intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty G(t)\,dt = \int_0^\infty s\varkappa(s)\,ds = \lambda < +\infty.$$

Mais $0 \leqslant G(t) \leqslant \pi$ donc $0 \leqslant \sin G(t) \leqslant G(t)$ d'où il résulte que

$$\int_0^\infty \sin G(t)\,dt \leqslant \lambda < +\infty.$$

Donc, la limite (14) existe et, par conséquent, la courbe possède une asymptote.

Inversement, supposons que la courbe possède une asymptote. On a alors la relation (14):

$$\int_0^\infty \sin G(t)\,dt = y_0 < +\infty.$$

Prenons un s_0 suffisamment grand pour que l'on ait $\int_{s_0}^{\infty} \varkappa(u)\,du \leqslant \frac{1}{2}\pi$. On a alors

$$\int_0^{s_0} \sin G(t)\,dt + \int_{s_0}^{\infty} \sin G(t)\,dt = y_0.$$

Mais $\sin G(t) \geqslant \frac{1}{2} G(t)$ (car $\sin\alpha \geqslant \frac{1}{2}\alpha$ pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$) et par suite

$$\int_{s_0}^{\infty} \sin G(t)\,dt \geqslant \tfrac{1}{2}\int_{s_0}^{\infty} G(t)\,dt.$$

Donc l'intégrale $\int_{s_0}^{\infty} G(t)\,dt$ et, par conséquent, l'intégrale $\int_0^{\infty} G(t)\,dt$ est finie, d'où, en vertu du lemme démontré dans le § 2, on obtient la relation (6). Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Si l'on supposait $\varkappa(s) \leqslant 0$ pour la courbe tout entière, la démonstration serait tout à fait analogue.

De même, on pourrait étendre partiellement le théorème que nous venons de démontrer aux courbes dont la courbure change de signe, c'est-à-dire aux courbes non nécessairement convexes. On devrait à cet effet remplacer la condition (6) par celle-ci:

$$\int_0^{\infty} s|\varkappa(s)|\,ds < +\infty,$$

mais, dans ce cas, on n'obtient qu'une condition suffisante de l'existence d'une asymptote.

§ 4. Comme nous l'avons démontré, une courbe à courbure non négative $\varkappa(s)$ possède une asymptote si et seulement si la fonction $s\varkappa(s)$ est intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$. D'autre part, dans le cas où la fonction $\varkappa(s)$ est non croissante, l'intégrabilité dans l'intervalle $(0, \infty)$ de $s\varkappa(s)$ entraîne — comme on le sait (v. [1], p. 195) — la convergence vers zéro, pour $s \to \infty$, du produit $s^2\varkappa(s)$. D'où on obtient

Corollaire I. *Si une courbe à courbure $\varkappa(s)$ monotone possède une asymptote, alors*

$$\lim_{s\to\infty} s^2\varkappa(s) = 0.$$

Supposons qu'une courbe à courbure non négative $\varkappa(s)$ possède une asymptote. En vertu du théorème énoncé dans le § 1, ce n'est possible que dans le cas où la fonction $\varkappa(s)$ satisfait à la condition (6). Mais alors on peut, en intégrant par parties, obtenir la formule suivante

$$\frac{1}{s}\int_0^s \sigma^2\varkappa(\sigma)\,d\sigma = \int_0^s \sigma\varkappa(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{s}\int_0^s \Big(\int_0^{\sigma} t\varkappa(t)\,dt\Big)\,d\sigma. \tag{17}$$

La fonction non décroissante $\int_0^s \sigma\varkappa(\sigma)\,d\sigma$ tend, pour $s \to \infty$, vers une limite finie. La valeur moyenne de cette fonction: $\frac{1}{s}\int_0^s \Big(\int_0^{\sigma} t\varkappa(t)\,dt\Big)\,d\sigma$ tend évidemment vers la même limite. De la relation (17) on tire donc

Corollaire II. *Si une courbe à courbure non négative $\varkappa(s)$ possède une asymptote, alors*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s \sigma^2\varkappa(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

On peut facilement construire une fonction positive $\varkappa(s)$ satisfaisant à la condition (6), mais telle que l'on ait $\limsup_{s\to\infty} s^2\varkappa(s) > 0$. En vertu du théorème du § 1 une courbe à courbure égale à $\varkappa(s)$ possède une asymptote, mais pour sa courbure la relation $\lim_{s\to\infty} s^2\varkappa(s) = 0$ cesse d'être vraie. Cela veut dire que le corollaire I ne se laisse pas étendre à toutes les courbes possédant une asymptote. Néanmoins, par une modification convenable de l'énoncé de ce corollaire, il est possible d'obtenir un théorème analogue, vrai pour toutes les courbes de ce genre. Désignons à cet effet par $m(s, \varepsilon)$ la mesure de la partie de l'intervalle $(0, s)$ dans laquelle $s^2\varkappa(s) \geqslant \varepsilon > 0$. Cela posé, du corollaire II on obtient immédiatement

Corollaire III. *Si une courbe à courbure non négative $\varkappa(s)$ possède une asymptote, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ on a*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{m(s, \varepsilon)}{s} = 0.$$

§ 5. Supposons, en particulier, que l'on ait

$$\lim_{s\to\infty} \varkappa(s)s^{\alpha} = g \neq 0 \tag{18}$$

où α est un nombre constant. Sans restreindre la généralité on peut admettre que $g > 0$, ce qui entraîne, pour s suffisamment grands, l'inégalité $\varkappa(s) > 0$. Sous l'hypothèse (18) on a pour s suffisamment grands

$$\varkappa(s) < (g+\varepsilon)s^{-\alpha} \quad (\varepsilon > 0)$$

et par suite

$$s\varkappa(s) \leqslant (g+\varepsilon)s^{1-a}.$$

Pour que l'intégrale $\int\limits_1^\infty s\varkappa(s)ds$ (on prend 1 au lieu de 0 par égard au second membre de la dernière inégalité) soit finie, il suffit que l'intégrale $\int\limits_1^\infty s^{1-a}ds$ le soit, ce qui n'a lieu que lorsque $a>2$. Si, au contraire, $a \leqslant 2$, on a

$$(g-\varepsilon)s^{-1} < s\varkappa(s) \quad \text{(on suppose que } g-\varepsilon > 0\text{)}$$

et de la divergence de l'intégrale $\int\limits_1^\infty \frac{ds}{s}$ il résulte que la courbe n'a pas d'asymptote. La valeur limite $a=2$ est atteinte par les branches des courbes exponentielles $y=a^x$ $(a>1)$ qui, possédant des directions asymptotiques, n'ont pas d'asymptotes.

Si l'on a $a>1$, alors

$$\int\limits_1^s \varkappa(u)du < \int\limits_1^s (g+\varepsilon)u^{-a}du = \frac{g+\varepsilon}{a-1}[1-s^{1-a}].$$

Mais dans ce cas $s^{1-a}\to 0$ lorsque $s\to\infty$. L'intégrale $\int\limits_1^s \varkappa(u)du$ est donc bornée, d'où, vu l'inégalité $\varkappa(s)\geqslant 0$, il résulte que l'intégrale $\int\limits_1^\infty \varkappa(s)ds$ est convergente et, par conséquent, la courbe envisagée possède une direction asymptotique.

Si l'on a au contraire $a\leqslant 1$, alors pour $u\geqslant 1$

$$(g-\varepsilon)u^{-1} \leqslant \varkappa(u)$$

et par suite

$$\int\limits_1^\infty \varkappa(u)du = +\infty,$$

ce qui veut dire que la direction asymptotique n'existe pas.

Si $0<a<1$, la branche se déroule en spirale vers l'infini (ce résultat fera l'objet d'une note séparée).

Le cas $a=0$ est le sujet d'une note [3] du troisième de nous. Si enfin $a<0$, la branche s'enroule en spirale autour d'un point, ce qui est un cas particulier d'un théorème général du troisième de nous, contenu dans la note mentionnée, c'est pourquoi nous omettons la démonstration qu'en a donnée le premier de nous.

Travaux cités

[1] Б. Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Москва 1954.

[2] S. Gołąb, *O pewnym warunku istnienia asymptoty krzywej płaskiej*, VI Zjazd Matematyków Polskich, Dodatek do rocznika PTM, t. XXII (1950), p. 53-54.

[3] Z. Opial, *Sur les courbes planes à courbure presque constante*, ce volume, p. 263-274.

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1957