Remark 2. It may easily be seen that if the assumptions of our existence theorem are satisfied for the functions f, φ and ψ they are satisfied also for $f+\varepsilon$, $\varphi+\varepsilon t$, $\psi+\varepsilon t$, $\sigma+\varepsilon$ and $\varepsilon > 0$ small enough. Let the solutions of such a perturbed problem be denoted by v_ε. In a natural way, as in the theory of ordinary differential inequalities, one can prove the existence of the maximal solution. It is defined as the limit $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} v_\varepsilon$. Similar constructions are possible for systems (*). The formal way is to be based on the Westphal-Prodi theorem concerning strong differential inequalities of parabolic type.

References

[1] C. Ciliberto, *Su di un problema al contorno per una equazione non lineare di tipo parabolico in due variabili*, Ricerche di Matematica 1(1952), p. 55-77.

[2] — *Su di un problema al contorno per l'equazione* $u_{xx}-u_y = f(x, y, u, u_x)$, Ricerche di Matematica 1 (1952), p. 295-316.

[3] M. Gevrey, *Equations aux dérivées partielles du type parabolique*, Journal de Mathématique Pures et Appliquées 9 (1913), p. 305-574.

[4] J. Leray et J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Annales de l'École Normale Sup. 3 (1934), p. 45-78.

[5] W. Mlak, *Limitation of solutions of parabolic equations*, Annales Pol. Math., this volume, p. 237-245.

[6] G. Prodi, *Problemi al contorno non-lineari per equazione di tipo parabolico non lineari in due variabili-soluzioni periodiche*, Rendiconti del Sem. Mat. della Università di Padova 23 (1954), p. 25-85.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur les courbes planes à courbure presque constante

par Z. Opial (Kraków)

§ 1. Soit C une courbe plane de classe C^1 donnée par les équations

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (s \geqslant 0)$$

où s est la longueur de l'arc de C compté à partir d'un point fixe. Désignons par $P(s)$ le point de la courbe C qui correspond à la valeur s du paramètre.

Définition. Nous dirons que *la courbe C s'enroule pour $s\to+\infty$ asymptotiquement autour d'une circonférence K*, si la distance entre le point $P(s)$ de la courbe et le plus proche des deux points de la circonférence K où les tangentes à la circonférence sont parallèles à la tangente à la courbe au point $P(s)$, tend vers zéro lorsque $s\to+\infty$.

Si donc la courbe C s'enroule asymptotiquement autour d'une circonférence, cela veut dire que non seulement le point mobile de la courbe $P(s)$ se rapproche, pour $s\to+\infty$, de cette circonférence, mais aussi qu'il tourne indéfiniment autour du centre de cette circonférence et que, s tendant vers l'infini, ces tours deviennent de plus en plus réguliers, des changements brusques de direction du mouvement étant impossibles.

Désignons par $\varphi(s)$ l'angle que fait le vecteur $\big(x'(s), y'(s)\big)$ tangent à la courbe C en point $P(s)$ avec l'axe des x. On voit facilement que si la courbe C s'enroule autour d'une circonférence, l'angle $\varphi(s)$ pour $s\to+\infty$ doit tendre ou bien vers $+\infty$, ou bien vers $-\infty$. Dans le premier cas nous dirons que le sens de l'enroulement est *positif* et dans le second cas qu'il est *négatif* (1). Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant que nous nous bornons à énoncer, puisque sa démonstration est tout à élémentaire:

Théorème I. *Pour que la courbe C: $x = x(s)$, $y = y(s)$ de classe C^1 (s — paramètre intrinsèque) s'enroule asymptotiquement autour d'une circon-*

(1) Nous supposons que dans le système de coordonnées adopté le sens positif des rotations est celui de Ox vers Oy et que ce sens est contraire à celui des aiguilles d'une montre.

férence de rayon r_0, il faut et il suffit que les fonctions auxiliaires

$$\xi(s) = x(s) - \varepsilon r_0 y'(s), \qquad \eta(s) = y(s) + \varepsilon r_0 x'(s)$$

($\varepsilon = +1$, si le sens de l'enroulement est positif, et $\varepsilon = -1$, s'il est négatif) tendent vers des limites finies lorsque s tend vers l'infini.

§ 2. M. S. Gołąb a posé le problème suivant:

Une courbe plane C à courbure $k(s)$ presque constante, en ce sens que $\lim\limits_{s\to\infty} k(s) = k_0 \neq 0$, doit-elle forcément s'enrouler asymptotiquement autour d'une circonférence fixe à courbure égale à k_0?

La réponse à cette question est — comme nous le montrerons au § 4 — négative. On peut pourtant chercher d'autres conditions portant sur la courbure $k(s)$ de la courbe, suffisantes pour que la courbe C jouisse de la propriété demandée et dans cet ordre d'idées nous démontrons dans la présente note (théorème II) qu'il suffit pour cela d'admettre que la courbure $k(s)$ soit la somme de deux fonctions continues $k_1(s)$ et $k_2(s)$ dont l'une, par exemple $k_1(s)$, est à variation bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et tend vers une limite différente de zéro lorsque $s \to +\infty$ et l'autre — $k_2(s)$ — est absolument intégrable dans le même intervalle. Il est à remarquer que la convergence pour $s \to +\infty$ de la courbure $k(s)$ vers une limite finie différente de zéro, insuffisante pour garantir à la courbe C la propriété asymptotique en question, n'est non plus indispensable à cet effet, puisque dans le théorème que nous venons d'énoncer on n'a nullement besoin de supposer que la fonction $k_2(s)$ tende vers zéro lorsque s tend vers l'infini.

Au § 5 nous donnons, pour compléter ces résultats, une condition suffisante, portant sur la courbure $k(s)$, pour que la courbe C tende vers un point fixe lorsque s croît indéfiniment (théorème III).

§ 3. Dans la suite nous n'aurons nulle part besoin de supposer que la courbure $k(s)$ des courbes considérées soit de signe constant. Néanmoins, pour fixer les idées, nous nous bornerons à énoncer et démontrer le théorème II dans l'hypothèse que la partie principale de $k(s)$ est de signe constant, à savoir positive.

THÉORÈME II. *Si la courbure $k(s)$ (s — paramètre intrinsèque, $0 \leqslant s < +\infty$) de la courbe plane C est la somme de la fonction $k_1(s)$ continue, à variation bornée dans l'intervalle* $(0, +\infty)$

$$\int_0^\infty |dk_1(s)| < +\infty \tag{1}$$

et telle que

$$\lim_{s\to\infty} k_1(s) = k_0 > 0, \qquad k_1(s) > 0 \tag{2}$$

et de la fonction $k_2(s)$, continue et absolument intégrable

$$\int_0^\infty |k_2(s)|\,ds < +\infty, \tag{3}$$

la courbe C pour $s \to +\infty$ s'enroule asymptotiquement autour d'une circonférence de rayon $1/k_0$. Le sens de l'enroulement est positif.

Démonstration. On sait que si la courbure $k(s)$ d'une courbe plane est exprimée en fonction de l'arc s, on peut écrire explicitement les équations paramétriques de la courbe. En effet, ayant choisi le système de coordonnées de telle sorte que le point de la courbe à partir duquel on compte l'arc s en soit l'origine et que la tangente à la courbe en ce point coïncide avec l'axe des abscisses, on a

$$x(s) = \int_0^s \cos\Big(\int_0^\sigma k(t)\,dt\Big)d\sigma \quad \text{et} \quad y(s) = \int_0^s \sin\Big(\int_0^\sigma k(t)\,dt\Big)d\sigma. \tag{4}$$

Pour abréger les notations, posons

$$K_1(s) = \int_0^s k_1(t)\,dt \quad \text{et} \quad K_2(s) = \int_s^\infty k_2(t)\,dt. \tag{5}$$

On a donc $K_1'(s) = k_1(s)$ et $K_2'(s) = -k_2(s)$. Pour simplifier les calculs nous pouvons imposer à la fonction $k_2(s)$ la condition, nullement restrictive,

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s k_2(t)\,dt = \int_0^\infty k_2(t)\,dt = 2\pi.$$

Cela posé, on peut, dans nos hypothèses sur la courbure $k(s)$, écrire les équations (4) de la manière suivante

$$x(s) = \int_0^s \cos\Big(K_1(\sigma) + \int_0^\sigma k_2(t)\,dt\Big)d\sigma = \int_0^s \cos\big(K_1(\sigma) + 2\pi - K_2(\sigma)\big)d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$x(s) = \int_0^s \cos\big(K_1(\sigma) - K_2(\sigma)\big)d\sigma \tag{6}$$

et pareillement

$$y(s) = \int_0^s \sin\big(K_1(\sigma) - K_2(\sigma)\big)d\sigma. \tag{6a}$$

En vertu du théorème I, pour démontrer notre théorème, il suffit de montrer que les fonctions auxiliaires

$$\xi(s) = \int_0^s \cos\big(K_1(\sigma)-K_2(\sigma)\big)\,d\sigma - \frac{1}{k_0}\sin\big(K_1(s)-K_2(s)\big), \tag{7}$$

$$\eta(s) = \int_0^s \sin\big(K_1(\sigma)-K_2(\sigma)\big)\,d\sigma + \frac{1}{k_0}\cos\big(K_1(s)-K_2(s)\big) \tag{7a}$$

tendent vers des limites finies lorsque $s\to+\infty$.

Or, en vertu de formules trigonométriques bien connues, on a

$$\int_0^s \cos\big(K_1(\sigma)-K_2(\sigma)\big)\,d\sigma = \int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\,d\sigma + \int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\,d\sigma. \tag{8}$$

Intégrant par parties la première des intégrales du second membre on obtient (v. p. ex. [1], p. 507)

$$\int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\,d\sigma = \int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\frac{k_1(\sigma)}{k_1(\sigma)}\,d\sigma \tag{9}$$

$$= \frac{\cos K_2(s)}{k_1(s)}\sin K_1(s) - \int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}\,d\sigma - $$

$$- \int_0^s \sin K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\,d\left(\frac{1}{k_1(\sigma)}\right).$$

En vertu de l'hypothèse (2) il existe un nombre positif c tel que $k_1(s)\geqslant c$ pour tout $s\geqslant 0$. Par suite, la première de ces deux dernières intégrales tend vers une limite finie lorsque $s\to\infty$, puisqu'en vertu de l'hypothèse (3), on a

$$\int_0^s |\sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)|\frac{|k_2(\sigma)|}{k_1(\sigma)}\,d\sigma \leqslant \int_0^s \frac{|k_2(\sigma)|}{k_1(\sigma)}\,d\sigma \leqslant \frac{1}{c}\int_0^s |k_2(\sigma)|\,d\sigma$$

$$\leqslant \frac{1}{c}\int_0^\infty |k_2(\sigma)|\,d\sigma < +\infty.$$

La seconde de ces intégrales jouit de la même propriété. On a en effet, en vertu de l'hypothèse (1)

$$\int_0^s |\sin K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)|\left|d\frac{1}{k_1(\sigma)}\right| \leqslant \int_0^s \left|d\frac{1}{k_1(\sigma)}\right| = \int_0^s \frac{|dk_1(\sigma)|}{k_1^2(\sigma)}$$

$$\leqslant \frac{1}{c^2}\int_0^s |dk_1(\sigma)| \leqslant \frac{1}{c^2}\int_0^\infty |dk_1(\sigma)| < +\infty.$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$\int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\,d\sigma = \frac{\cos K_2(s)}{k_1(s)}\sin K_1(s) + a_1(s), \tag{10}$$

$a_1(s)$ étant une fonction continue qui tend vers une limite finie lorsque $s\to+\infty$.

Maintenant transformons de la même façon la dernière intégrale de la relation (8). On obtient ainsi

$$\int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\,d\sigma = \int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\frac{k_1(\sigma)}{k_1(\sigma)}\,d\sigma \tag{11}$$

$$= -\frac{\sin K_2(s)}{k_1(s)}\cos K_1(s) - \int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_2(\sigma)\frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}\,d\sigma +$$

$$+ \int_0^s \cos K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\,d\frac{1}{k_1(\sigma)}.$$

$K_2(s)$ tend vers zéro lorsque $s\to\infty$, les deux autres facteurs du produit $\dfrac{\sin K_2(s)}{k_1(s)}\cos K_1(s)$ sont bornés pour tout s, ce produit tend donc vers zéro lorsque $s\to+\infty$. De même, on peut aisément vérifier que les deux dernières intégrales de la relation (11) tendent vers des limites finies lorsque $s\to+\infty$. On peut donc l'écrire sous la forme

$$\int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_2(\sigma)\,d\sigma = a_2(s), \tag{12}$$

$a_2(s)$ étant une fonction continue telle que $\lim\limits_{s\to\infty} a_2(s)$ est un nombre fini.

En s'appuyant maintenant sur les formules (10) et (12) on peut donner à la relation (7) la forme suivante:

$$(13)\qquad \xi(s) = a(s) + \frac{\sin K_1(s)}{k_1(s)}\cos K_2(s) - \frac{1}{k_0}\sin\big(K_1(s)-K_2(s)\big),$$

où $a(s)$ est une fonction continue et $\lim\limits_{s\to\infty} a(s) = a_0$ — un nombre fini.

Des pareilles transformations appliquées à la formule (7a) nous permettent de la mettre sous la forme

$$(13a)\qquad \eta(s) = b(s) - \frac{\cos K_1(s)}{k_1(s)}\cos K_2(s) + \frac{1}{k_0}\cos\big(K_1(s)-K_2(s)\big)$$

où $\lim\limits_{s\to\infty} b(s) = b_0$ — un nombre fini.

Or, en remplaçant dans la formule (13) $\sin\big(K_1(s)-K_2(s)\big)$ par la somme $\sin K_1(s)\cos K_2(s) - \cos K_1(s)\sin K_2(s)$ et en tenant compte de (2) et de ce que $\lim\limits_{s\to\infty} K_2(s) = 0$, on vérifie que $\lim\limits_{s\to\infty}\xi(s) = \lim\limits_{s\to\infty} a(s) = a_0$. De la formule (13a) on obtient de la même façon $\lim\limits_{s\to\infty}\eta(s) = \lim\limits_{s\to\infty} b(s) = b_0$.

Le théorème II se trouve ainsi démontré.

Remarque I. [2] Dans le cas où $k_1(s) \equiv k_0 > 0$, on peut démontrer un théorème analogue au théorème II en remplaçant la relation (3) par la condition

$$(3')\qquad \int\limits_0^\infty \Big|\int\limits_s^\infty k_2(t)\,dt\Big|\,ds = \int\limits_0^\infty |K_2(s)|\,ds < +\infty,$$

et en y ajoutant l'hypothèse de l'existence de la limite $\lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_0^s k_2(\sigma)\,d\sigma$.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que sous ces hypothèses la fonction $\xi(s)$ peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \int\limits_0^s \cos\big(k_0\sigma - K_2(\sigma)\big)\,d\sigma - \frac{1}{k_0}\sin\big(k_0 s - K_2(s)\big) \\ &= \int\limits_0^s \big[\cos\big(k_0\sigma - K_2(\sigma)\big) - \cos k_0\sigma\big]\,d\sigma + \frac{1}{k_0}\big[\sin k_0 s - \sin\big(k_0 s - K_2(s)\big)\big].\end{aligned}$$

Le second terme de la dernière somme tend évidemment vers zéro lorsque $s \to +\infty$, puisque $K_2(s) \to 0$. Le premier tend aussi vers une limite finie, ce qu'on peut aisément constater en utilisant la formule $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ et en profitant ensuite de l'hypothèse (3'). La fonction $\xi(s)$ tend donc vers une limite finie lorsque $s \to +\infty$. De même on peut montrer que la fonction $\eta(s)$ jouit de la même propriété.

[2] Je dois cette remarque à M. J. Kisyński.

Remarque II. Supposons que la courbure $k(s)$ de la courbe C, tendant pour $s \to +\infty$ vers une limite finie différente de zéro, soit à variation bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Dans ce cas particulier on peut considérablement simplifier la démonstration du théorème II. Il suffit en effet d'envisager, à côté de la courbe C, sa développée D. Comme on le sait, la longueur totale de la développée D est égale à la variation totale de la courbure $k(s)$.

Donc, dans l'hypothèse que cette variation soit finie, la longueur totale de la courbe D l'est aussi. Le centre de courbure $D(s)$ de la courbe C au point $P(s)$ doit donc tendre pour $s \to +\infty$ vers un point fixe O et, par conséquent, la courbe C doit s'enrouler autour de la circonférence de centre O et de rayon $1/k_0$.

§ 4. Il reste à montrer que la condition $\lim\limits_{s\to\infty} k(s) = k_0 \neq 0$ n'est pas suffisante pour garantir à la courbe l'enroulement asymptotique autour d'une circonférence fixe.

Prenons à cet effet sur le plan (x, y) deux suites de circonférences K_n et $\bar{K}_n$ données par les équations

$$K_n:\quad \Big(x - 2\sum_{k=1}^{n-1} 1/k\Big)^2 + y^2 = 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$\bar{K}_n:\quad \Big(x - 2\sum_{k=1}^{n} 1/k + 1/n\Big)^2 + y^2 = (1+1/n)^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Imaginons maintenant un point mobile P qui se meut d'abord à partir du point $(-1, 0)$ sur la circonférence $\bar{K}_1$. Après avoir parcouru la moitié inférieure de cette circonférence, le point P aboutit au point $(3, 0)$ (voir fig. 1). Mais le point $(3, 0)$ est aussi sur la circonférence K_2. On peut donc faire de sorte que le point P se meuve sur la moitié supérieure de cette circonférence jusqu'au point $(1, 0)$ où P quitte cette circonférence et commence à se mouvoir sur $\bar{K}_2$. Le point mobile P, se mouvant ainsi tour à tour sur les moitiés inférieures et supérieures des circonférences K_n, décrit une courbe C qui possède en chacun de ses points une

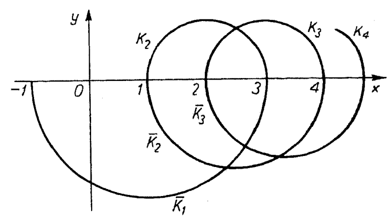

Fig. 1

courbure bien déterminée, évidemment sauf aux points d'intersection avec l'axe des abscisses, où la courbure change de valeur d'une manière discontinue. Il est aisé de voir que cette courbure tend vers l'unité lorsque $s \to +\infty$, mais la courbe C s'éloigne lorsque s croît indéfiniment, et par suite il n'existe aucune circonférence autour de laquelle elle puisse s'enrouler. La courbe C que nous venons de définir possède, il est vrai, une infinité de points où elle n'a pas de courbure, mais en introduisant de légères modifications aux voisinages des points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses on pourrait surmonter cet obstacle sans pourtant changer les propriétés essentielles de la courbe[3].

§ 5. Par une simple modification de la démonstration du théorème II on peut obtenir une condition suffisante pour que la courbe C à courbure croissante se rapproche pour $s \to +\infty$ d'un point fixe, à savoir:

THÉORÈME III. *Si la courbure $k(s)$ $(0 \leqslant s < +\infty)$ de la courbe C est la somme de deux fonctions continues $k_1(s)$ et $k_2(s)$ satisfaisant aux conditions*

$$\int_0^\infty \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| = \int_0^\infty \frac{|dk_1(s)|}{k_1^2(s)} < +\infty, \tag{14}$$

$$\lim_{s\to\infty} k_1(s) = +\infty \qquad (k_1(s) > 0), \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \frac{|k_2(s)|}{k_1(s)} ds < +\infty, \tag{16}$$

la courbe C se rapproche asymptotiquement d'un point fixe.

Démonstration. Nous nous bornerons à indiquer les changements les plus importants qu'il faudra faire dans la démonstration du théorème précédent. Posons

$$K_3(s) = \int_0^s k_2(t)\,dt.$$

Au lieu des équations (6) et (6a) on peut maintenant écrire

$$x(s) = \int_0^s \cos\big(K_1(\sigma)+K_3(\sigma)\big)d\sigma \quad \text{et} \quad y(s) = \int_0^s \sin\big(K_1(\sigma)+K_3(\sigma)\big)d\sigma.$$

Nous allons montrer que dans nos hypothèses les fonctions $x(s)$ et $y(s)$ tendent vers des limites finies lorsque $s \to +\infty$. Il suffit d'ailleurs

[3] M. S. Gołąb a bien voulu me communiquer un autre exemple, encore plus simple, trouvé par M. J. Krzyż:

$$x = \ln t + \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leqslant t < +\infty).$$

de le démontrer pour $x(s)$, puisque la démonstration pour $y(s)$ serait tout à fait analogue. Or, pour $x(s)$ on obtient facilement la formule suivante

$$x(s) = \int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_3(\sigma)\,d\sigma - \int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_3(\sigma)\,d\sigma.$$

L'intégration par parties de ces deux dernières intégrales donne

$$\begin{aligned} x(s) = {} & \frac{\sin K_1(s)}{k_1(s)}\cos K_3(s) + \frac{\cos K_1(s)}{k_1(s)}\sin K_3(s) + \\ & + \int_0^s \sin K_1(\sigma)\sin K_3(\sigma)\frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}d\sigma - \int_0^s \sin K_1(\sigma)\cos K_3(\sigma)\,d\frac{1}{k_1(\sigma)} - \\ & - \int_0^s \cos K_1(\sigma)\cos K_3(\sigma)\frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}d\sigma - \int_0^s \cos K_1(\sigma)\sin K_3(\sigma)\,d\frac{1}{k_1(\sigma)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Les deux premiers termes du second membre de cette égalité tendent, en vertu de l'hypothèse (15), vers zéro lorsque $s \to +\infty$. On peut aisément vérifier que tous les autres termes tendent aussi vers des limites finies lorsque s tend vers l'infini. On a par exemple, en tenant compte de (16)

$$\int_0^s |\sin K_1(\sigma)\sin K_3(\sigma)|\frac{|k_2(\sigma)|}{k_1(\sigma)}d\sigma \leqslant \int_0^s \frac{|k_2(\sigma)|}{k_1(\sigma)}d\sigma \leqslant \int_0^\infty \frac{|k_2(\sigma)|}{k_1(\sigma)}d\sigma < +\infty$$

et pareillement, en vertu de (14)

$$\int_0^s |\sin K_1(\sigma)\cos K_3(\sigma)| \left|d\frac{1}{k_1(\sigma)}\right| \leqslant \int_0^s \left|d\frac{1}{k_1(\sigma)}\right| \leqslant \int_0^\infty \left|d\frac{1}{k_1(\sigma)}\right| < +\infty.$$

On peut vérifier de la même manière que les deux autres intégrales de la formule (17) tendent aussi vers des limites finies et, par conséquent, l'abscisse $x(s)$ du point $P(s)$ de la courbe C jouit de la même propriété: $\lim_{s\to\infty} x(s) = x_0$ — nombre fini. Par un raisonnement analogue on peut ensuite démontrer que l'ordonnée $y(s)$ de ce point tend vers une limite finie y_0. Le point $P(s)$ se rapproche donc, lorsque s croît indéfiniment, du point $O(x_0, y_0)$ et notre théorème se trouve ainsi démontré.

§ 6. Dans l'hypothèse du théorème III nous avons admis que la première et principale composante de la courbure $k(s)$ — la fonction $k_1(s)$ — tend vers l'infini pour $s \to +\infty$, mais de telle manière que la fonction $1/k_1(s)$ soit à variation bornée sur la demi-droite $s \geqslant 0$. Or, on peut aisément remplacer cette condition par une autre équivalente. A cet effet nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME IV. *Pour que la fonction $k_1(s)$ continue et positive pour $s \geqslant 0$ satisfasse aux conditions* (14) *et* (15) *il faut et il suffit qu'elle soit le quotient $\alpha(s)/\beta(s)$ de deux fonctions continues, positives et non-décroissantes $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ telles que*

$$\lim_{s\to\infty}\alpha(s) = +\infty, \tag{18}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} < +\infty. \tag{19}$$

Supposons d'abord que la fonction $k_1(s)$ soit le quotient de deux telles fonctions. On a alors $\lim\limits_{s\to\infty} k_1(s) = +\infty$. En effet, pour tout $s \geqslant s_0 > 0$ on a

$$\frac{1}{k_1(s)} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\beta(0)}{\alpha(s)} + \frac{1}{\alpha(s)}\int_0^s d\beta(s) \leqslant \frac{\beta(0)}{\alpha(s)} + \frac{1}{\alpha(s)}\int_0^{s_0} d\beta(s) + \int_{s_0}^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut donc choisir deux nombres s_0 et s_1 ($s_0 < s_1$) tels que chacun des termes de la dernière somme soit moindre que ε pour $s \geqslant s_1$. Il en résulte immédiatement que $\limsup\limits_{s\to\infty} 1/k_1(s) \leqslant 3\varepsilon$. ε étant tout à fait arbitraire, on en déduit la relation: $\lim\limits_{s\to\infty} k_1(s) = +\infty$. On peut aussi aisément démontrer que la fonction $1/k_1(s)$ est à variation bornée sur la demi-droite $s \geqslant 0$. On a en effet pour tout $s \geqslant 0$

$$\int_0^s \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| = \int_0^s \left| d\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \right| \leqslant \int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} + \int_0^s \beta(s)\frac{d\alpha(s)}{\alpha^2(s)}.$$

Mais, en intégrant par parties, en obtient

$$\int_0^s \beta(s)\frac{d\alpha(s)}{\alpha^2(s)} = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\Big|_0^s + \int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} \leqslant K + \int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)}$$

K étant un nombre positif convenablement choisi. Ces deux dernières inégalités donnent, en vertu de l'hypothèse (19), l'inégalité suivante:

$$\int_0^s \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| \leqslant K + 2\int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} \leqslant K + 2\int_0^\infty \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} < +\infty$$

d'où il résulte que la fonction $k_1(s)$ satisfait à la condition (14).

Nous avons donc montré que le quotient $\alpha(s)/\beta(s)$ des fonctions qui remplissent les hypothèses (18) et (19) satisfait aux conditions (14) et (15). Inversement, toute fonction $k_1(s)$ qui satisfait à ces conditions se laisse représenter sous la forme du quotient de deux fonctions non-décroissantes et positives $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ qui remplissent les relations (18) et (19). En effet, la fonction $k_1(s)$ étant à variation bornée dans tout intervalle fini, son logarithme qui possède évidemment la même propriété peut être décomposé, d'après le théorème bien connu de Jordan, en une différence des logarithmes de deux fonctions positives, non-décroissantes et continues $\alpha(s)$ et $\beta(s)$:

$$\ln k_1(s) = \ln\alpha(s) - \ln\beta(s) \qquad (\beta(0) = 1) \tag{20}$$

d'où il résulte que $k_1(s) = \alpha(s)/\beta(s)$.

$k_1(s)$ tend vers l'infini avec s, on doit donc avoir aussi $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s) = +\infty$, c'est-à-dire la relation (18). Pour montrer que l'on a aussi (19) supposons que la décomposition (20) soit canonique, c'est-à-dire que les fonctions $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ soient les plus petites possibles. On a alors

$$\int_0^s \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| = \int_0^s \left| d\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \right| = \int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} + \int_0^s \beta(s)\frac{d\alpha(s)}{\alpha^2(s)}$$
$$= 2\int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} + \frac{\beta(0)}{\alpha(0)}$$

d'où il résulte que

$$\int_0^s \frac{d\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{2}\left[\int_0^s \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| + \frac{1}{k_1(0)} - \frac{1}{k_1(s)}\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| + L\right] < +\infty$$

L étant un nombre fini. Pour $s = +\infty$ on en obtient la relation (19) et notre théorème se trouve ainsi entièrement démontré.

§ 7. Remarque III. Le théorème III ne précise pas dans quelle mesure l'allure de la courbe C pour s suffisamment grands ressemble à celle des courbes telles que, par exemple, la spirale logarithmique. Pour que cela soit possible il faudrait connaître certaines propriétés de la courbe C qui dépendent de l'angle $\alpha(s)$ fait par la tangente $T(s)$ à la courbe au point $P(s)$ avec l'axe des abscisses. Or cet angle est donné par la formule

$$\alpha(s) = \int_0^s k(t)\,dt = \int_0^s k_1(t)\,dt + \int_0^s k_2(t)\,dt$$

et on peut aisément montrer que les conditions (14), (15) et (16) imposées aux fonctions $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ne nous permettent même pas de conclure que $\lim\limits_{s\to\infty} a(s) = +\infty$, c'est-à-dire que la courbe C fait une infinité de tours dans un sens déterminé. Prenons, en effet, une série convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ à termes positifs et posons

$$a_0 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad a_n = \beta_{n-1} + a_n, \quad \beta_n = a_n + 1/(n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les intervalles $\langle a_n, \beta_n\rangle$ et $\langle \beta_n, a_{n+1}\rangle$ recouvrent la demi-droite $s \geqslant 0$ tout entière; leurs longueurs sont égales à $1/(n+1)$ et a_n respectivement. Posons maintenant

$$k_1(s) = \begin{cases} n+1 & \text{dans les intervalles } \langle a_n, \beta_n\rangle \\ 1/a_n & \text{dans les intervalles } (\beta_n, a_{n+1}) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$k_2(s) = \begin{cases} 0 & \text{dans les intervalles } \langle a_n, \beta_n\rangle \\ -2/a_n & \text{dans les intervalles } (\beta_n, a_{n+1}) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Comme il est aisé de vérifier, les fonctions $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ainsi définies satisfont aux conditions (14)-(16); en particulier

$$\int_0^{\infty} \frac{|k_2(s)|}{k_1(s)} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\beta_n}^{a_{n+1}} 2ds = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n < +\infty,$$

$$\int_0^{\infty} \left| d\frac{1}{k_1(s)} \right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Mais, pour la courbe C dont la courbure $k(s)$ est égale à la somme $k_1(s)+k_2(s)$, l'angle $a(s)$ reste toujours compris entre 0 et 1. La discontinuité des fonctions $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ne diminue pas la valeur de cet exemple, car en ne changeant en rien leurs propriétés essentielles on pourrait les modifier de sorte qu'elles deviennent continues.

Pourtant, en ajoutant aux hypothèses (14)-(16) d'autres conditions accessoires, on peut aisément assurer non seulement la relation $\lim\limits_{s\to\infty} a(s) = +\infty$ mais aussi la croissance de $a(s)$, au moins si s est suffisamment grand. Il suffit à cet effet de supposer, par exemple, que pour tout s: $-k_2(s) \leqslant k_1(s)$, ou bien que la fonction $k_2(s)$ soit absolument intégrable sur la demi-droite $(0, +\infty)$ tout entière.

Travaux cités

[1] E. Hobson, *The theory of function*, v. I., sec. ed., Cambridge 1921.

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

La courbure d'une courbe plane et l'existence d'une asymptote

par S. Gołąb, M. Kuczma et Z. Opial (Kraków)

Introduction. Dans la présente note nous étudierons les courbes planes suffisamment régulières pour que la courbure existe en tout point. Il s'agira d'établir pour la courbure certaines conditions, suffisantes ou nécessaires, pour que la courbe possède une asymptote.

Comme on le sait, il y a deux définitions non équivalentes de l'asymptote: l'une d'elles définit une asymptote comme la position limite vers laquelle tend la tangente à la courbe lorsque le point de contact de la tangente s'éloigne vers l'infini, suivant l'autre, l'asymptote est la droite telle que la distance du point mobile de la courbe à cette droite tend vers zéro lorsque le point s'éloigne vers l'infini. Nous adoptons la première de ces définitions qui convient mieux à nos buts bien que la seconde soit plus générale.

Nous dirons qu'une courbe possède une direction asymptotique, si l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des abscisses tend vers une limite finie lorsque le point de contact tend vers l'infini.

L'existence d'une asymptote comme position limite de la tangente a pour conséquence l'existence d'une direction asymptotique, mais l'inverse n'est pas vrai; une courbe possédant une direction asymptotique peut ne pas avoir d'asymptote.

La branche de la courbe B admettant une asymptote A peut être convexe et alors elle reste toujours d'un côté de l'asymptote. L'intuition nous dit que si la branche B est convexe et à courbure monotone et si elle possède une direction asymptotique, la courbure au point p de la courbe tend vers zéro lorsque le point p s'éloigne vers l'infini. L'intuition nous dit aussi que si une branche convexe et à courbure monotone possède une asymptote A, la courbure au point p tendra vers zéro encore plus vite. Pour préciser, prenons un point arbitraire p_0 de la branche B — nous l'appellerons dans la suite origine de la branche — et désignons par $s(p)$ la longueur de l'arc de B entre l'origine p_0 et le point p (toute portion bornée de la branche, comme convexe, est évidemment rectifiable). Or,