ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur les équations du mouvement d'un système holonome

par S. Łojasiewicz (Kraków)

On peut se poser la question si les équations du mouvement d'un système à liaisons peuvent être obtenues comme cas asymptotique des équations du mouvement d'un système libre

$$x_i^{\cdot\cdot} = f_i(t, x_j, x_k^{\cdot}) - M^2 F_i(t, x_j, x_k^{\cdot}) \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n),$$

lorsque le paramètre M tend vers l'infini. Il existe une théorie de A. Tichonov [1] sur un effet asymptotique de ce genre. Cette théorie ne s'applique pas dans le cas où F_i ne dépendent pas de $x_k^{\cdot}$; ce cas a été considéré par V. Volosoff [2] pour $n = 1$.

Dans cette note, je montre comment le mouvement d'un système holonome s'obtient comme limite du mouvement d'un système libre sur lequel agissent p. ex. des forces élastiques très grandes; ces forces ne dépendent pas des vitesses, elles s'annulent sur la surface des liaisons et peuvent être dérivées d'un potentiel

$$M^2 V(t, x_j) \qquad (M \to \infty).$$

Soit $S(t)$ une hypersurface à $n-p$ dimensions (dépendant du temps t) donnée par un système d'équations

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p), \tag{1}$$

où $\varphi_\nu(t, x_j)$ sont de classe C^4 dans un ouvert de (t, x_j) et

$$\text{rang de } [\partial\varphi_\nu/\partial x_i] = p \tag{2}$$

en tout point de la surface $S(t)$. Soient $f_i(t, x_j, x_k^{\cdot})$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ des fonctions de classe C^1 dans un ouvert de $(t, x_j, x_k^{\cdot})$ contenant l'ensemble:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in S(t), \qquad \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}(t, x_j) + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}(t, x_j)x_i^{\cdot} = 0.$$

(1) Cf. [3] et aussi [2], p. 119-138, où l'on trouvera la bibliographie.

(2) Cf. [4] ou [5], où l'on trouvera la bibliographie.

Soient $F_i(t, x_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ des fonctions de classe C^2 dans un ouvert de (t, x_j) contenant l'ensemble: $(x_1, \ldots, x_n) \in S(t)$. Supposons que, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in S(t)$, on ait

$$(3) \qquad F_i(t, x_j) = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x_k) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t, x_k) \quad (i, j, k = 1, \ldots, n),$$

$$(4) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x_k)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \text{rang de } \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right] = p \quad (i, j, k = 1, .., n).$$

Considérons le système suivant avec un paramètre M:

$$(5) \qquad \ddot{x_i} = f_i(t, x_j, \dot{x_k}) - M^2 F_i(t, x_j) \quad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

et le système (équations de Lagrange de première espèce)

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\ddot{x_i} = f_i(t, x_j, \dot{x_k}) - \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i}(t, x_j) \\ &\varphi_\nu(t, x_j) = 0. \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, p)$$

Nous avons:

THÉORÈME. *Soit $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ une solution du système* (6) *telle que $(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \in S(t)$, où $\alpha < t < \beta$. Soit $\alpha < \alpha_0 < t_0 < \beta_0 < \beta$, $c > 0$; il existe alors un $c_1 > 0$ et un $M_1 > 0$, tels que si*

$$(7) \qquad \begin{aligned} &M > M_1, \quad |x_i(t_0) - X_i(t_0)| \leqslant c/M, \quad |\dot{x_i}(t_0) - \dot{X_i}(t_0)| \leqslant c/M, \\ &\quad |\varphi_\nu(t_0, x_j(t_0))| \leqslant c/M^2 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, p), \end{aligned}$$

pour une solution $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ du système (5), *alors cette solution existe dans (α_0, β_0) et on a*

$$(8) \qquad |x_i(t) - X_i(t)| \leqslant c_1/M, \quad |\dot{x_i}(t) - \dot{X_i}(t)| \leqslant c_1/M, \quad |\varphi_\nu(t, x_j(t))| \leqslant c_1/M^2 \quad \textit{pour} \quad \alpha_0 < t < \beta_0.$$

Remarque 1. Les hypothèses sur F_i sont remplies si $F_i = \partial V/\partial x_i$, où $V(t, x_j)$ est une fonction de classe C^3 qui satisfait aux conditions suivantes: on a $V(t, x_j) = 0$ sur $S(t)$ et pour tout point de $S(t)$ il existe une const nte $K > 0$ telle que $V(t, x_j) > Kr^2$ dans un voisinage de ce point, où r désigne la distance de $(x_1, \ldots, x_n)$ à la surface $S(t)$.

Remarque 2. Au lieu des conditions (3) et (4) on peut supposer que pour $(x_1, \ldots, x_n) \in S(t)$ on ait $F_i(t, x_j) = 0$, que les vecteurs $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_j}\right)$ $(j = 1, \ldots, n)$ soient perpendiculaires à la surface $S(t)$ et que p racines caractéristiques de la matrice $[\partial F_i/\partial x_j]$ soient positives, $n-p$ — égales à zéro, leurs multiplicités étant constantes et les diviseurs élémentaires étant simples. La démonstration est tout à fait pareille à celle du théorème[3].

Démonstration du théorème. Soit $\alpha < t^* < \beta$; en vertu du théorème de Borel-Lebesgue il suffit de prouver que (7) entraîne (8) dans un intervalle $\langle t_0, t_1 \rangle$ tel que $t_0 < t^* < t_1$ (resp. $t_1 < t^* < t_0$). Nous allons faire le changement de variables

$$(9) \qquad x_i = x_i(t, y_\mu, u_\nu) \quad (i = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, n-p;\ \nu = 1, \ldots, p)$$

(nous convenons dans la suite que $i, j, k = 1, \ldots, n$; $\varkappa, \lambda, \mu = 1, \ldots, n-p$; $\nu, \varrho, \sigma = 1, \ldots, p$) dans un voisinage de $(t^*, X_1(t^*), \ldots, X_n(t^*))$, tel que $x_i = x_i(t, y_\mu, 0)$ soient les équations de $S(t)$ sous la forme paramétrique, c'est-à-dire que

$$(10) \qquad \varphi_\nu(t, x_i(t, y_\mu, 0)) = 0$$

et que

$$(11) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}(t, y, 0)\frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}(t, y, 0) = 0.$$

A cet effet résolvons les équations (1) dans le voisinage de $(t^*, X_1(t^*), \ldots, X_n(t^*))$:

$$x_1 = \psi_1(t, x_{p+1}, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_p = \psi_p(t, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

(en vertu de (2) on a par exemple $\det \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\sigma} \neq 0$) et posons

$$\begin{aligned} x_1(t, y_\mu, u_\nu) &= \psi_1(t, y_1, \ldots, y_{n-p}) + u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p(t, y_\mu, u_\nu) &= \psi_p(t, y_1, \ldots, y_{n-p}) + u_p, \\ x_{p+1}(t, y_\mu, u_\nu) &= y_1 - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_1}(t, y_1, \ldots, y_{n-p})u_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t, y_\mu, u_\nu) &= y_{n-p} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_{n-p}}(t, y_1, \ldots, y_{n-p})u_\nu. \end{aligned}$$

---

[3] Une seule modification concerne la définition des $A_{\nu\sigma}$ et $B_{\nu\sigma}$: on pose $[A_{\nu\sigma}] = P'P$, $[B^{\nu}_{\cdot\sigma}] = P'JP$, où $[\partial G_\nu/\partial u_\sigma] = P^{-1}JP$, J est une matrice diagonale et P' désigne la matrice transposée de P.

Posons $Y_\mu(t) = X_{p+\mu}(t)$; pour $t = t^*$, $y_\mu = Y_\mu(t^*)$, $u_\nu = 0$, on a

$$\det\left[\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}, \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\right] = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi_\nu}{\partial y_\mu}, & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\lambda\mu}, & -\dfrac{\partial \psi_\sigma}{\partial y_\lambda} \end{bmatrix} \neq 0,$$

donc

$$\det\left[\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}, \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\right] \neq 0 \tag{12}$$

et la transformation (9) est biunivoque dans un ensemble

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad |y_\mu - Y_\mu(t)| \leqslant d, \quad |u_\nu| \leqslant d, \tag{13}$$

où $t_0 < t^* < t_1$ et $0 < d < 1$. Les équations: $x_i = x_i(t, y_\mu, 0)$ sont celles de $S(t)$; les relations (10) et (11) subsistent pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ et $|y_\mu - Y_\mu(t)| \leqslant d$; les fonctions $x_i(t, y_\mu, u_\nu)$ sont de classe C^3 dans l'ensemble (13).

Le changement de variables (9) conduit du système (5) au système

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\mu} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}(f_i - M^2 F_i), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot u_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_\nu} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}(f_i - M^2 F_i), \tag{14}$$

où $T = \frac{1}{2}\sum \dot x_i^2$. Puisque la courbe $y_\mu = Y_\mu(t)$, $u_\nu = 0$ correspond à la courbe $x_i = X_i(t)$ et comme les seconds membres de (5) sont définis dans un voisinage de la courbe $x_i = X_i(t)$, $\dot x_i = \dot X_i(t)$, les fonctions qui interviennent dans (14) sont définies dans l'ensemble

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad |y_\mu - Y_\mu(t)| \leqslant d, \quad |\dot y_\mu - \dot Y_\mu(t)| \leqslant d, \quad |u_\nu| \leqslant d, \quad |\dot u_\nu| \leqslant d \tag{15}$$

pourvu que l'on choisisse d suffisamment petit. Si $v_\nu = \varphi_\nu\big(t, x_i(t, y_\mu, u_\sigma)\big)$ alors $\det \dfrac{\partial v_\nu}{\partial u_\sigma} = \det \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\sigma} \neq 0$ pour $u_\nu = 0$ puisque, d'après (2) et (10), le rang de la matrice $\left[\dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial y_\mu}, \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\right] = \left[0, \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\right]$ est égal à p; il existe donc une constante $\bar K$ telle que si (t, y_μ, u_ν) fait partie de l'ensemble (13), alors $\sum|v_\nu| \leqslant \bar K \sum|u_\nu|$ et $\sum|u_\nu| \leqslant \bar K \sum|v_\nu|$, pourvu que l'on choisisse d suffisamment petit. On en conclut qu'il suffit de prouver que pour tout $c > 0$ il existe un $c_1 > 0$ et un $M_1 > 0$ tels que si

$$\begin{gathered} M > M_1, \quad |y_\mu(t_0) - Y_\mu(t_0)| \leqslant \frac{c}{M}, \quad |\dot y_\mu(t_0) - \dot Y_\mu(t_0)| \leqslant \frac{c}{M}, \\ |u_\nu(t_0)| \leqslant \frac{c}{M^2}, \quad |\dot u_\nu(t_0)| \leqslant \frac{c}{M} \end{gathered} \tag{16}$$

pour une solution $y_\mu(t)$, $u_\nu(t)$ de (14), alors cette solution existe dans $\langle t_0, t_1\rangle$ et on a

$$\left.\begin{gathered} |y_\mu(t) - Y_\mu(t)| \leqslant \frac{c_1}{M}, \quad |\dot y_\mu(t) - \dot Y_\mu(t)| \leqslant \frac{c_1}{M}, \\ |u_\nu(t)| \leqslant \frac{c_1}{M^2}, \quad |\dot u_\nu(t)| \leqslant \frac{c_1}{M} \end{gathered}\right\} \quad \text{dans} \quad \langle t_0, t_1\rangle. \tag{17}$$

Soit maintenant $\begin{bmatrix} Q_{\mu i} \\ P_{\nu i} \end{bmatrix}$ la matrice inverse de la matrice $\left[\dfrac{\partial x_i}{\partial y_\mu}, \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\right]$. Les fonctions $Q_{\mu i}(t, y_\lambda, u_\sigma)$, $P_{\nu i}(t, y_\lambda, u_\sigma)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble (13) et on a

$$Q_{\mu i}\frac{\partial x_k}{\partial y_\mu} + P_{\nu i}\frac{\partial x_k}{\partial u_\nu} = \delta_{ik}, \quad Q_{\mu i}\frac{\partial x_i}{\partial u_\nu} = 0, \quad P_{\nu i}\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} = 0 \tag{18}$$

et $Q_{\mu i}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$, d'où l'on tire facilement (en vertu de (11))

$$P_{\nu i}Q_{\mu i} = 0 \quad \text{pour} \quad u_\sigma = 0, \tag{19}$$

$$Q_{\mu i}Q_{\varkappa i}\frac{\partial x_j}{\partial y_\varkappa} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \quad \text{pour} \quad u_\sigma = 0. \tag{20}$$

Revenons au système (14). On a

$$T(t, y_\mu, \dot y_\lambda, u_\nu, \dot u_\sigma) = \frac{1}{2}\sum_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}\dot y_\mu + \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\dot u_\nu\right]^2$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\mu} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_\varkappa}\ddot y_\varkappa + \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\ddot u_\nu + \Psi_\mu(t, y_\lambda, \dot y_\varkappa, u_\sigma, \dot u_\varrho),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot u_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_\nu} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_\varkappa}\ddot y_\varkappa + \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\ddot u_\sigma + \Phi_\nu(t, y_\lambda, \dot y_\varkappa, u_\sigma, \dot u_\varrho),$$

d'où

$$\begin{gathered} \ddot y_\mu = h_\mu(t, y_\varkappa, \dot y_\lambda, u_\sigma, \dot u_\varrho) - M^2 H_\mu(t, y_\varkappa, u_\sigma), \\ \ddot u_\nu = g_\nu(t, y_\varkappa, \dot y_\lambda, u_\sigma, \dot u_\varrho) - M^2 G_\nu(t, y_\varkappa, u_\sigma), \end{gathered} \tag{21}$$

où

$$h_\mu = Q_{\mu i}(f_i - Q_{\lambda i}\Psi_\lambda - P_{\varrho i}\Phi_\varrho), \quad g_\nu = P_{\nu i}(f_i - Q_{\lambda i}\Psi_\lambda - P_{\varrho i}\Phi_\varrho) \tag{22}$$

sont des fonctions de classe C^1 dans l'ensemble (15) et

$$H_\mu = Q_{\mu i}F_i, \quad G_\nu = P_{\nu i}F_i, \tag{23}$$

sont des fonctions de classe C^2 dans l'ensemble (13).

Comme les $X_i(t)$ satisfont au système (6) et $x_i = x_i(t, y_\mu, 0)$ sont les équations de $S(t)$, $y_\mu = Y_\mu(t)$ ($\mu = 1, \ldots, n-p$) est une solution du système

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar T}{\partial \dot y_\mu}\right) - \frac{\partial \bar T}{\partial y_\mu} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}(t, y_\lambda, 0) f_i\big(t, x_j(t, y_\lambda, 0)\big),$$

où

$$\bar T(t, y_\mu, \dot y_\lambda) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}\dot y_\mu\right]^2_{u_\nu=0} = T(t, y_\mu, \dot y_\lambda, 0, 0),$$

et par suite

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar T}{\partial \dot y_\mu}\right) - \frac{\partial \bar T}{\partial y_\mu} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y_\varkappa}\ddot y_\varkappa + \psi_\mu(t, y_\lambda, \dot y_\varkappa, 0, 0).$$

D'après (20) il en résulte que

$$\ddot y_\mu = Q_{\mu i} Q_{\varkappa i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_\varkappa} f_j - \psi_\varkappa\right) = Q_{\mu i}\left(Q_{\varkappa i}\frac{\partial x_j}{\partial y_\varkappa} + P_{\nu i}\frac{\partial x_j}{\partial u_\nu}\right) f_j - Q_{\mu i}Q_{\varkappa i}\psi_\varkappa$$

$$= Q_{\mu i}(f_i - Q_{\varkappa i}\psi_\varkappa) = h_\mu(t, y_\varkappa, \dot y_\lambda, 0, 0),$$

en tenant compte de (18), (19) et (22). Ainsi nous avons

(24) $\ddot Y_\mu = h_\mu(t, Y_\varkappa, \dot Y_\lambda, 0, 0)$ dans $\langle t_0, t_1\rangle$.

Nous donnerons maintenant quelques évaluations dans lesquelles la constante L ne dépend que des fonctions $h_\mu, g_\nu, H_\mu, G_\nu$ et de l'ensemble (15). Les fonctions h_μ, g_ν étant de classe C^1, on a

(25)
$$|g_\nu|, \left|\frac{\partial g_\nu}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial g_\nu}{\partial y_\varkappa}\right|, \left|\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot y_\lambda}\right|, \left|\frac{\partial g_\nu}{\partial u_\sigma}\right|, \left|\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot u_\varrho}\right|,$$
$$|h_\mu|, \left|\frac{\partial h_\mu}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial h_\mu}{\partial y_\varkappa}\right|, \left|\frac{\partial h_\mu}{\partial \dot y_\varkappa}\right|, \left|\frac{\partial h_\mu}{\partial u_\sigma}\right|, \left|\frac{\partial h_\mu}{\partial \dot u_\varrho}\right| \leqslant L$$

dans l'ensemble (15). Les fonctions H_μ, G_ν sont de classe C^2 dans l'ensemble (13) et

$$H_\mu(t, y_\varkappa, 0) = G_\nu(t, y_\varkappa, 0) = 0,$$

d'après (3) et (23). On a donc

(26)
$$|G_\nu(t, y_\varkappa, u_\sigma)| \leqslant L\sum|u_\nu|,$$
$$\left|G_\nu(t, y_\varkappa, u_\sigma) - \frac{\partial G_\nu}{\partial u_\varrho}(t, y_\varkappa, 0)u_\varrho\right| \leqslant L\sum u_\nu^2$$

dans l'ensemble (13). D'après (23), (3), (18) et (19) on a

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0) = Q_{\mu i}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u_\nu} = Q_{\mu k}\left(Q_{\lambda k}\frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda} + P_{\sigma k}\frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\right)\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u_\nu}$$
$$= Q_{\mu k}Q_{\lambda k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial u_\nu}.$$

En vertu de (3) on a $F_i\big(t, x_j(t, y_\lambda, 0)\big) = 0$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda} = 0$ pour $u_\nu = 0$, donc $\frac{\partial H_\mu}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0) = 0$. Il en résulte que

(27) $$|H_\mu(t, y_\varkappa, u_\sigma)| \leqslant L\sum u_\sigma^2.$$

Pareillement on a pour $u_\sigma = 0$ (d'après (23), (11), (18))

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho}\cdot\frac{\partial G_\varrho}{\partial u_\nu} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho}P_{\varrho j}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u_\nu}$$
$$= \frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho}P_{\varrho j} + \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu}Q_{\mu j}\right)\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial x_\nu};$$

nous avons donc

(28) $$A_{\sigma\varrho}\frac{\partial G_\varrho}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0) = B_{\sigma\nu}, \quad \text{pour} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad |y_\varkappa - Y_\varkappa(t)| \leqslant d,$$

où

$$A_{\nu\sigma}(t, y_\varkappa) = \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0)\frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}(t, y_\varkappa, 0),$$

$$B_{\nu\sigma}(t, y_\varkappa) = \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0)\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\big(t, x_j(t, y_\varkappa, 0)\big)\frac{\partial x_k}{\partial u_\sigma}(t, y_\varkappa, 0).$$

Les fonctions $A_{\nu\sigma}$, $B_{\nu\sigma}$ sont de classe C^2 dans l'ensemble $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|y_\varkappa - Y_\varkappa(t)| \leqslant d$, donc

(29) $$|A_{\nu\sigma}|, \left|\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial y_\varkappa}\right|, |B_{\nu\sigma}|, \left|\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial y_\varkappa}\right| \leqslant L.$$

Les matrices $[A_{\nu\sigma}]$, $[B_{\nu\sigma}]$ sont symétriques (en vertu de (3)) et les $A_{\nu\sigma}\xi_\nu\xi_\sigma$, $B_{\nu\sigma}\eta_\nu\eta_\sigma$ sont définies positives. En effet, d'après (4), on a $A_{\nu\sigma}\xi_\nu\xi_\sigma \geqslant 0$ et $B_{\nu\sigma}\eta_\nu\eta_\sigma \geqslant 0$; on a $\det A_{\nu\sigma} \neq 0$, car, d'après (12), rang de $\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\right] = p$;

finalement, si l'on aurait $B_{\nu\sigma}\eta_\nu\eta_\sigma = 0$ où $\sum|\eta_\nu| > 0$, alors $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\zeta_i^{(\alpha)}\zeta_j^{(\alpha)} = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-p)$, où $\zeta_i^{(0)} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\eta_\nu$, $\zeta_i^{(\mu)} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_\mu}$, ce qui contredit à (4) car, d'après (11), les vecteurs $(\zeta_1^{(\alpha)}, \ldots, \zeta_n^{(\alpha)})$ sont linéairement indépendants. Nous avons donc

$$(30) \qquad A_{\nu\sigma}(t, y_\varkappa)\xi_\nu\xi_\sigma \geqslant a\sum \xi_\nu^2 \quad \text{et} \quad B_{\nu\sigma}(t, y_\varkappa)\eta_\nu\eta_\sigma \geqslant b\sum \eta_\nu^2$$

pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|y_\varkappa - Y_\varkappa(t)| \leqslant d$, où a, b sont des constantes positives.

Nous disons qu'il suffit de démontrer que pour tout $c > 0$ il existe un $c_1 > 0$ et un $M_0 > 1$ tels que si $t_0 < t' \leqslant t_1$ et si $y_\mu(t)$, $u_\nu(t)$ dans $\langle t_0, t'\rangle$ est une solution de (21) qui satisfait aux inégalités (15), pour laquelle

$$(31) \qquad |u_\nu(t_0)| \leqslant c/M^2, \qquad |\dot{u}_\nu(t_0)| \leqslant c/M,$$

alors

$$(32) \qquad |u_\nu(t)| \leqslant c_1/M^2, \qquad |\dot{u}_\nu(t)| \leqslant c_1/M \qquad \text{dans} \quad \langle t_0, t'\rangle.$$

En effet, supposons que cette solution satisfasse de plus aux conditions $|y_\mu(t_0) - Y_\mu(t_0)| \leqslant c/M$, $|\dot{y}_\mu(t_0) - \dot{Y}_\mu(t_0)| \leqslant c/M$ et considérons les équations (21) et (24). On a, d'après (25), (27) et (32),

$$\left|h_\mu\big(t, y_\varkappa, \dot{y}_\lambda, u_\sigma(t), \dot{u}_\varrho(t)\big) - M^2H_\mu\big(t, y_\varkappa, u_\nu(t)\big) - h_\mu(t, y_\varkappa, \dot{y}_\lambda, 0, 0)\right|$$
$$\leqslant Lp(c_1/M^2 + c_1/M + c_1^2/M^2),$$

pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|y_\varkappa - Y_\varkappa(t)| \leqslant d$, $|\dot{y}_\lambda - \dot{Y}_\varkappa(t)| \leqslant d$, donc (cf. [1], p. 152-153), en vertu de (25),

$$|y_\varkappa(t) - Y_\varkappa(t)| \leqslant c_2/M, \qquad |\dot{y}_\varkappa(t) - \dot{Y}_\varkappa(t)| \leqslant c_2/M \qquad \text{dans} \quad \langle t_0, t'\rangle,$$

où c_2 ne dépend que de L_1, c_1 et t_1. On a donc

$$(33) \qquad |y_\mu(t) - Y_\mu(t)|, |\dot{y}_\mu(t) - \dot{Y}_\mu(t)|, |u_\nu(t)|, |\dot{u}_\nu(t)| \leqslant d/2 \qquad \text{dans} \quad \langle t_0, t'\rangle,$$

pourvu que $M \geqslant M_1 = \max(M_0, 2c_1/d, 2c_2/d)$. Il en résulte que si $M \geqslant M_1$ et si une solution $y_\mu(t)$, $u_\nu(t)$ de (21) satisfait aux conditions (16) et aux inégalités (15) dans $\langle t_0, t'\rangle$, elle satisfait aussi aux inégalités (33). On en conclut que chaque solution de (21) satisfaisant aux conditions (16) est définie dans $\langle t_0, t_1\rangle$ et satisfait aux inégalités (17) dans $\langle t_0, t_1\rangle$.

Supposons donc que $t_0 < t' \leqslant t_0$ et soit $y_\mu(t)$, $u_\nu(t)$ une solution de (21) dans $\langle t_0, t'\rangle$ satisfaisant aux inégalités (15) et (31). Posons

$$(34) \qquad a_{\nu\sigma}(t) = A_{\nu\sigma}\big(t, y_\varkappa(t)\big), \qquad b_{\nu\sigma}(t) = B_{\nu\sigma}\big(t, y_\varkappa(t)\big)$$

et $\gamma_\nu(t) = a_{\nu\sigma}(t)g_\sigma\big(t, y_\varkappa(t), \dot{y}_\lambda(t), u_\sigma(t), \dot{u}_\varrho(t)\big)$. On a, d'après (28),

$$(35) \qquad a_{\varrho\nu}(t)\frac{\partial G_\varrho}{\partial u_\sigma}\big(t, y_\varkappa(t), 0\big) = b_{\nu\sigma}(t)$$

et, d'après (29), (30), (25)

$$(36) \qquad \begin{gathered} a\sum \dot{u}_\nu^2 \leqslant a_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\dot{u}_\sigma, \qquad b\sum u_\nu^2 \leqslant b_{\nu\sigma}u_\varrho u_\sigma, \\ |a_{\varrho\sigma}| \leqslant L, \qquad |b_{\varrho\sigma}| \leqslant L, \qquad |\gamma_\nu| \leqslant pL^2 \end{gathered}$$

et

$$(37) \qquad |\dot{a}_{\nu\sigma}|, |\dot{b}_{\nu\sigma}| \leqslant L(1+pl) = L_1,$$
$$|\dot{\gamma}_\nu| \leqslant pL(L_1 + L(1+pl+pd) + 2L^2\Big(1 + M^2\sum|u_\nu|\Big) \leqslant L_2\Big(1 + M^2\sum|u_\nu|\Big),$$

où $l = d + \max\limits_{\varkappa}\max\limits_{\langle t_0, t_1\rangle}|\dot{Y}_\varkappa(t)|$, car, d'après (21), (26), (27), on a $|\ddot{y}_\mu|, |\ddot{u}_\nu| \leqslant L\big(1 + M^2\sum|u_\nu|\big)$. Posons $V(t) = a_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\dot{u}_\sigma - 2\gamma_\nu u_\nu + M^2 b_{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma$. On a, d'après (36),

$$(38) \qquad V(t) \geqslant a\sum \dot{u}_\nu^2 - 2pL^2\sum|u_\nu| + bM^2\sum u_\nu^2,$$

et, d'après (21), (34), (35), (37), (36), (26)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \dot{a}_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\dot{u}_\sigma - 2\dot{\gamma}_\nu u_\nu + M^2\dot{b}_{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma + 2a_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\ddot{u}_\sigma - 2\gamma_\nu\dot{u}_\nu + 2M^2 b_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho u_\sigma$$
$$= \dot{a}_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\dot{u}_\sigma - 2\dot{\gamma}_\nu u_\nu + M^2\dot{b}_{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma - 2M^2 a_{\varrho\sigma}\dot{u}_\varrho\left(G_\sigma(t, y_\varkappa, u_\sigma) - \frac{\partial G_\sigma}{\partial u_\nu}(t, y_\varkappa, 0)u_\nu\right)$$
$$\leqslant pL_1\sum \dot{u}_\nu^2 + 2L_2\Big(1 + M^2\sum|u_\nu|\Big)\sum|u_\nu| + pL_1M^2\sum u_\nu^2 + 2p^2L^2dM^2\sum u_\nu^2$$
$$= pL_1\sum \dot{u}_\nu^2 + 2L_2\sum|u_\nu| + L_3M^2\sum u_\nu^2.$$

Choisissons un $K > 0$ de façon que $pL_1 - Ka \leqslant -1$, $L_3 - Kb \leqslant -1$, et posons $K_1 = L_2 + KpL^2$. On a alors, d'après (38),

$$dV/dt - KV \leqslant -\sum \dot{u}_\nu^2 + 2K_1\sum|u_\nu| - M^2\sum u_\nu^2 \leqslant pK_1^2/M^2,$$

d'où

$$dV/dt \leqslant KV + pK_1^2/M^2.$$

Comme on a, d'après (36) et (31),

$$V(t_0) \leqslant (p^2Lc^2+2pL^2c+p^2L^2c^2)\frac{1}{M^2} = \frac{L_4}{M^2},$$

donc (cf. [6])

$$V(t) \leqslant \left(\frac{L_4}{M^2}+\frac{pK_1^2}{KM^2}\right)e^{K(t_1-t_0)}-\frac{pK_1^2}{KM^2} \leqslant \frac{L_5}{M^2}.$$

Mais on a, en vertu de (38)

$$V(t) \geqslant a\sum u_\nu^{\cdot 2}+bM^2\sum\left(|u_\nu|-\frac{pL^2}{bM^2}\right)^2-\frac{p^2L^4}{bM^2},$$

d'où

$$u_\nu^{\cdot 2} \leqslant \frac{L_6}{M^2}, \qquad \left(|u_\nu|-\frac{pL^2}{bM^2}\right)^2 \leqslant \frac{L_7}{M^4};$$

en posant $c_1 = \max(\sqrt{L_6}, \sqrt{L_7}+pL^2/b)$, nous obtenons donc

$$|u_\nu| \leqslant c_1/M^2, \qquad |u_\nu^{\cdot}| \leqslant c_1/M \qquad \text{dans} \quad \langle t_0, t'\rangle, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[2] Л. Э. Эльсгольц, *Качественные методы в математическом анализе*, Москва 1955.

[3] А. Н. Тихонов, *О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра*, Мат. сборник 22 (64) (1948), p. 193-204.

[4] В. М. Волосов, *Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной*, Мат. сборник 30 (72) (1952), p. 245-270.

[5] — *Квазиоднородные дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие малый параметр*, Мат. сборник 36 (78) (1955), p. 501-554.

[6] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Reçu par la Rédaction le 7. 1. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

The first boundary value problem for a non-linear parabolic equation

by W. Mlak (Kraków)

We consider the first boundary problem for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t, u).$$

In the proof of the existence of a solution of that problem the topological method of Leray-Schauder is used. To obtain the so called a priori limitation of solutions, needed in this method, some qualitative conditions are formulated. These conditions make it possible to find in a simple way the topological degree of a suitable completely continuous vector field associated with our boundary problem. Conditions of a similar character have been discussed in [1], [2] and [6].

1. To begin with let us formulate the following condition:

(A) The function $\sigma(t, y)$ is continuous for $0 \leqslant t \leqslant b$ $(0 < b)$ and $y \geqslant 0$. For all $\eta \geqslant 0$ the right maximal integrals $\omega(t, \eta)$ of the differential equation $y' = \sigma(t, y)$ such that $\omega(0, \eta) = \eta$ exist in the interval $\langle 0, b\rangle$.

Theorem 3 of [5] implies the following lemma:

Lemma 1. *Assume that the function $\sigma(t, y)$ satisfies the condition* (A). *The function $f(x, t, u)$ is defined for $0 \leqslant x \leqslant a$ $(0 < a)$, $0 \leqslant t \leqslant b$ $(0 < b)$ and an arbitrary u. We assume that*

$$|f(x, t, u)| \leqslant \sigma(t, |u|).$$

Suppose that $v(x, t)$ is continuous in $R = \underset{(x,t)}{E}\{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant t \leqslant b\}$ and possesses the continuous derivative $\partial^2 v/\partial x^2$ in the interior of R. Assume that $z = v(x, t)$ satisfies in the interior of R the equation

$$\partial z/\partial t = \partial^2 z/\partial x^2+f(x, t, z)$$

and the boundary inequalities

$$|v(0, t)| \leqslant \eta, \quad |v(a, t)| \leqslant \eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant b; \quad |v(x, 0)| \leqslant \eta, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$