Это следствие вполне равносильно полученной другим путем Эрдешом и Грюнвальдом теореме I [1] и поэтому его доказательство даем в сокращении.

Если вопреки следствию все корни полинома χ вещественны, то

$$t_1-c = \frac{h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}}{|\chi'(c)|}+o(h), \qquad d-t_2 = \frac{h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}}{|\chi'(d)|}+o(h),$$

где $c<t_1<t_2<d$, $|\chi(t_1)| = |\chi(t_2)| = h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}$, а из неравенства (2) вытекает, что

$$\Big|\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)|\geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| = t_2-t_1 =$$

$$= d-c-h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\left(\frac{1}{|\chi'(c)|}+\frac{1}{|\chi'(d)|}\right)+o(h)\leqslant (d-c)\sqrt{1-h}.$$

Перенося в этом неравенстве $d-c$ в правую часть и разделяя обе части на h, мы получим в пределе при $h\to 0$ неравенство, несовместимое с (94). Итак, следствие верно.

Цитированная литература

[1] P. Erdös and T. Grünwald, *On polynomials with only real roots*, Annals of Mathematics 40 (1939), стр. 537-548.

[2] С. Пашковский, *О некотором свойстве наилучшей равномерной аппроксимации*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), стр. 195-208.

[3] P. Erdös, *Note on some elementary properties of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), стр. 954-958.

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

О некотором свойстве наилучшей равномерной аппроксимации

С. Пашковский (Вроцлав)

1. Введение. Пусть $\mathcal{C}$ — класс функций с вещественными значениями, определенных и непрерывных в сегменте (замкнутом) $I=\langle a,b\rangle$, а $\mathcal{W}_n$ — класс алгебраических полиномов степени не выше n-й.

Аппроксимируя функцию $\xi\in\mathcal{C}$, назовем ошибкой ее приближения полиномом $\psi\in\mathcal{W}_n$ число $\|\xi-\psi\|_I$, где для любой функции $\eta\in\mathcal{C}$ имеем $\|\eta\|_I=\max\limits_{t\in I}|\eta(t)|$. Теория равномерной (т. е. основанной на введенной метрике) аппроксимации изучает, между прочим, свойства ошибки наилучшей аппроксимации, т. е. числа

$$\varepsilon_n(\xi) = \inf_{\psi\in\mathcal{W}_n}\|\xi-\psi\|_I, \tag{1}$$

и свойства полинома наилучшего приближения, т. е. полинома $\psi_n\in\mathcal{W}_n$, для которого достигается нижняя грань (1):

$$\|\xi-\psi_n\|_I = \varepsilon_n(\xi). \tag{2}$$

Известно ([1], стр. 48, теорема 3), что этот полином существует и определен однозначно.

В § 2 мы приводим оценки сверху и снизу меры множества

$$A_h = \underset{t\in I}{E}\{|\xi(t)-\psi_n(t)|\geqslant h\varepsilon_n(\xi)\}, \tag{3}$$

где h — любое число из сегмента $\langle 0,1\rangle$. Это, соответственно, неравенства (5) и (21).

В § 3 мы применяем упомянутые оценки к некоторой практической задачи теории равномерной аппроксимации, а именно к оценкам чисел $\varepsilon_{n+1}(\xi), \varepsilon_{n+2}(\xi), \ldots$, когда известен полином наилучшего приближения ψ_n, построенный для функции ξ.

В § 4 применяем оценку сверху меры множества (3) для получения связи между равномерной и интегральной (с показателем p) аппроксимациями, которую выражает неравенство (31). Интегральная аппрок симация функции $\xi\in\mathcal{C}$ полиномом ψ определяется через свою ошибку $\|\xi-\psi\|_I^{(p)}$, где

$$\|\eta\|_I^{(p)} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |\eta(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \qquad (\eta\in\mathcal{C}).$$

Ошибка наилучшей интегральной аппроксимации равна

$$\varepsilon_n^{(p)}(\xi) = \inf_{\psi\in\mathcal{W}_n}\|\xi-\psi\|_I^{(p)}. \tag{4}$$

2. Оценки меры множества (3). В этом § мы предполагаем, что $\varepsilon_n(\xi)>0$. При $\varepsilon_n(\xi)=0$ функция ξ является полиномом класса $\mathcal{W}_n$, $\xi=\psi_n$ и для всех $h\in\langle 0,1\rangle$ множество (3) совпадает со всем сегментом I.

Теорема 1. *Если m обозначает наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_{n+m}(\xi)<\varepsilon_n(\xi)$, то выполняется неравенство*

$$\Big|\mathop{E}_{t\in I}\{|\xi(t)-\psi_n(t)|\geqslant h\,\varepsilon_n(\xi)\}\Big| \leqslant \begin{cases} b-a & \text{при } 0\leqslant h<\delta(\xi),\\ (b-a)\sqrt{\dfrac{1-h+2\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}} & \text{при } \delta(\xi)\leqslant h\leqslant 1, \end{cases} \tag{5}$$

где $\delta(\xi)=\varepsilon_{n+m}(\xi)/\varepsilon_n(\xi)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{W}_n\subset\mathcal{W}_{n+1}\subset\ldots$, то из определения (1) следует, что $\varepsilon_n(\xi)\geqslant\varepsilon_{n+1}(\xi)\geqslant\ldots$ Известно также (теорема Вейерштрасса), что $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k(\xi)=0$. Поэтому из предположения $\varepsilon_n(\xi)>0$ вытекает существование натурального числа m, при котором

$$\varepsilon_n(\xi)=\varepsilon_{n+1}(\xi)=\ldots=\varepsilon_{n+m-1}(\xi), \tag{6}$$

$$\varepsilon_{n+m}(\xi)<\varepsilon_n(\xi). \tag{7}$$

Полином ψ_{n+m} наилучшего приближения для функции ξ в классе $\mathcal{W}_{n+m}$ удовлетворяет, в силу его определения, равенству

$$\|\xi-\psi_{n+m}\|_I=\varepsilon_{n+m}(\xi). \tag{8}$$

При $t\in I$ мы имеем $|\xi(t)-\psi_{n+m}(t)|\leqslant\varepsilon_{n+m}(\xi)$, откуда

$$\varepsilon_{n+m}(\xi)\geqslant|\xi(t)-\psi_n(t)+\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant|\xi(t)-\psi_n(t)|-|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|$$

и при $t\in I$

$$|\xi(t)-\psi_n(t)|\leqslant\varepsilon_{n+m}(\xi)+|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|.$$

Отсюда следует, что неравенство $\varepsilon_{n+m}(\xi)+|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant h\varepsilon_n(\xi)$ слабее неравенства $|\xi(t)-\psi_n(t)|\geqslant h\,\varepsilon_n(\xi)$, следовательно, мы получаем

$$|A_h|\leqslant\Big|\mathop{E}_{t\in I}\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant h\,\varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi)\}\Big|.$$

Так как из (2) и (8) вытекает, что $\varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi)\geqslant\|\psi_n-\psi_{n+m}\|_I$, то возможно преобразование вышеприведенного неравенства к виду

$$\begin{aligned}|A_h|&\leqslant\Big|\mathop{E}_{t\in I}\Big\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant\frac{h\,\varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi)}{\varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi)}\|\psi_n-\psi_{n+m}\|_I\Big\}\Big|=\\ &=\Big|\mathop{E}_{t\in I}\Big\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant\frac{h-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}\|\psi_n-\psi_{n+m}\|_I\Big\}\Big|.\end{aligned} \tag{9}$$

В силу равенства (6) полином ψ_n является полиномом наилучшего приближения для функции ξ в классе $\mathcal{W}_{n+m-1}$. Из (7) вытекает, что $\psi_n\neq\psi_{n+m}$. Поэтому ([2], стр. 38, теорема 8.1 с заменой n числом $n+m-1$) все корни полинома $\psi_n-\psi_{n+m}$ вещественны и принадлежат к сегменту I. Итак, к этому полиному можно применить следствие 2 из статьи [3], что даст неравенство

$$\Big|\mathop{E}_{t\in I}\Big\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)|\geqslant\frac{h-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}\|\psi_n-\psi_{n+m}\|_I\Big\}\Big|\leqslant(b-a)\sqrt{1-\frac{h-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}}.$$

Отсюда и из (9) вытекает при $\delta(\xi)\leqslant h\leqslant 1$ второе неравенство (5). При остальных значениях h действует очевидное неравенство $|A_h|\leqslant\leqslant b-a$, получающееся из соотношения $A_h\subset I$.

В дальнейшем символ $\tau_n(h)$ при $h\geqslant 0$ обозначает наибольший корень уравнения $|T_n(t)|=h$, где T_n является n-м полиномом Чебышева: $T_n(t)=\cos n\arccos t$. Число $\tau_n(h)$ не меньше чем $\cos\pi/2n$, т. е. чем наибольший корень полинома $T_n(t)$. Пусть, кроме этого

$$\mu_n(h)=\Big|\mathop{E}_{t\in\langle 0,1\rangle}\{t^{n-1}(1-t)\geqslant h(n-1)^{n-1}/n^n\}\Big|.$$

Теорема 2. *Если полином n-й степени χ имеет вещественные корни $u_1,u_2,\ldots,u_n$ такие, что $a<u_1<u_2<\ldots<u_n<b$ и если число r таково, что*

$$0<r\leqslant\|\chi\|_I^{-1}\min\{|\chi(a)|,\ \|\chi\|_{\langle u_1,u_2\rangle},\ldots,\|\chi\|_{\langle u_{n-1},u_n\rangle},|\chi(b)|\}, \tag{10}$$

то выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\Big|\mathop{E}_{t\in I}\{|\chi(t)|\geqslant h\min_{1\leqslant k\leqslant n-1}\|\chi\|_{\langle u_k,u_{k+1}\rangle}\}\Big|&\geqslant\\ \geqslant&\begin{cases}\dfrac{\tau_n(r)-\tau_n(h)+\mu_n(h)\cos\pi/2n}{\tau_n(r)}(b-a) & \text{при } 0\leqslant h\leqslant r,\\ \dfrac{\mu_n(h)\cos\pi/2n}{\tau_n(h)}(b-a) & \text{при } r<h\leqslant 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. I. Пусть $f = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} \|\chi\|_{\langle u_k, u_{k+1}\rangle}$. Из этого определения и из неравенства (3) статьи [3], примененного к сегменту $\langle c, d\rangle = \langle u_k, u_{k+1}\rangle$, вытекает, что

$$\Big|\underset{t\in\langle u_k,u_{k+1}\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant \Big|\underset{t\in\langle u_k,u_{k+1}\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle u_k,u_{k+1}\rangle}\}\Big| \geqslant (u_{k+1}-u_k)\,\mu_n(h)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Суммируя все эти неравенства получим

$$\Big|\underset{t\in\langle u_1,u_n\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant (u_n-u_1)\,\mu_n(h). \tag{12}$$

II. Легко заметить, что при $-\cos\pi/2n \leqslant t \leqslant \cos\pi/2n$ имеем

$$u_1 \leqslant \frac{u_n-u_1}{2\cos\pi/2n}\,t + \frac{u_1+u_n}{2} \leqslant u_n.$$

Следовательно, полином

$$\bar\chi(t) = \chi\left(\frac{u_n-u_1}{2\cos\pi/2n}\,t + \frac{u_1+u_n}{2}\right)$$

выполняет предположения теорем 9.2 и 9.3 статьи [2], т. е. он имеет n различных вещественных корней, крайними из которых являются $-\cos\pi/2n$ и $\cos\pi/2n$. Эти теоремы дают неравенство

$$f|T_n(t)| \leqslant |\bar\chi(t)| \leqslant \|\bar\chi\|_{\langle -\cos\pi/2n, \cos\pi/2n\rangle}|T_n(t)|,$$

соблюдающееся при $t \leqslant -\cos\pi/2n$, $t \geqslant \cos\pi/2n$, т. е. для полинома χ дают неравенство

$$f\left|T_n\left(\frac{2t-u_1-u_n}{u_n-u_1}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant |\chi(t)| \leqslant \|\chi\|_{\langle u_1,u_n\rangle}\left|T_n\left(\frac{2t-u_1-u_n}{u_n-u_1}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right|, \tag{13}$$

соблюдающееся при $t \leqslant u_1$, $t \geqslant u_n$.

Из левой части неравенства (13) вытекает, что

$$\Big|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant \left|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\left\{\left|T_n\left(\frac{2t-u_1-u_n}{u_n-u_1}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right| \geqslant h\right\}\right|. \tag{14}$$

Наибольшим корнем n-го полинома Чебышева является $\cos\pi/2n$ значит, полином $T_n\left(\frac{2t-u_1-u_n}{u_n-u_1}\cos\frac{\pi}{2n}\right)$ возрастает в интервале $\langle u_n, +\infty$, от 0 до $+\infty$, а значения h достигает при t_h таком, что

$$\frac{2t_h-u_1-u_n}{u_n-u_1}\cos\frac{\pi}{2n} = \tau_n(h),$$

т. е. при

$$t_h = \frac{u_1+u_n}{2} + \frac{\tau_n(h)}{2\cos\pi/2n}(u_n-u_1).$$

Когда $t_h \leqslant b$, то множество, мера которого составляет правую часть неравенства (14), является сегментом $\langle t_h, b\rangle$, а когда $t_h > b$, это множество пусто. Следовательно,

$$\Big|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant \max\left\{0,\, b-\frac{u_1+u_n}{2}-\frac{\tau_n(h)}{2\cos\pi/2n}(u_n-u_1)\right\}. \tag{15}$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\Big|\underset{t\in\langle a,u_1\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant \max\left\{0,\, \frac{u_1+u_n}{2}-a-\frac{\tau_n(h)}{2\cos\pi/2n}(u_n-u_1)\right\}. \tag{16}$$

Суммируя неравенства (12), (15) и (16) и вводя обозначения $u_n-u_1 = d$, $u_1+u_n = s$,

$$\frac{\tau_n(h)}{\cos\pi/2n} = \gamma(h) \tag{17}$$

мы получаем неравенство

$$\Big|\underset{t\in I}{E}\{|\chi(t)| \geqslant hf\}\Big| \geqslant \mu_n(h)d + \max\{0, \tfrac12 s - a - \tfrac12\gamma(h)d\} + \tag{18}$$
$$+\max\{0, b - \tfrac12 s - \tfrac12\gamma(h)d\}.$$

III. Чтобы получить оценку (11) найдем минимум функции

$$\alpha(d, s) = \mu_n(h)d + \max\{0, \tfrac12 s - a - \tfrac12\gamma(h)d\} + \max\{0, b - \tfrac12 s - \tfrac12\gamma(h)d\}$$

в области, которой может принадлежать точка (d, s). Так как $a < u_1 < u_n < b$, то точка (d, s) принадлежит треугольнику BCD (см. рис. 1). Добавочные условия, касающиеся положения этой точки, вытекают из неравенства (13). Если в (13) примем $t = b$, то получим

$$f\left|T_n\left(\frac{2b-s}{d}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant |\chi(b)|, \qquad |\chi(b)| \leqslant \|\chi\|_{\langle u_1,u_n\rangle}\left|T_n\left(\frac{2b-s}{d}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right|.$$

Ослабление этих неравенств при помощи соотношений $|\chi(b)|, \|\chi\|_{\langle u_1,u_n\rangle} \leqslant \|\chi\|_I$,

$$f, |\chi(b)| \geqslant \min\{|\chi(a)|, \|\chi\|_{\langle u_1,u_2\rangle}, \ldots, \|\chi\|_{\langle u_{n-1},u_n\rangle}, |\chi(b)|\}$$

с учетом предположения (10) дает

$$r \leqslant \left|T_n\left(\frac{2b-s}{d}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant r^{-1}.$$

В этом неравенстве аргумент в полиноме T_n превышает наибольший корень этого полинома, т. е. число $\cos\pi/2n$ (ибо $b > u_n$), и из определения функции τ_n следует, что

$$\tau_n(r) \leqslant \frac{2b-s}{d}\cos\frac{\pi}{2n} \leqslant \tau_n(r^{-1}),$$

$$2b-\gamma(r^{-1})d \leqslant s \leqslant 2b-\gamma(r)d. \tag{19}$$

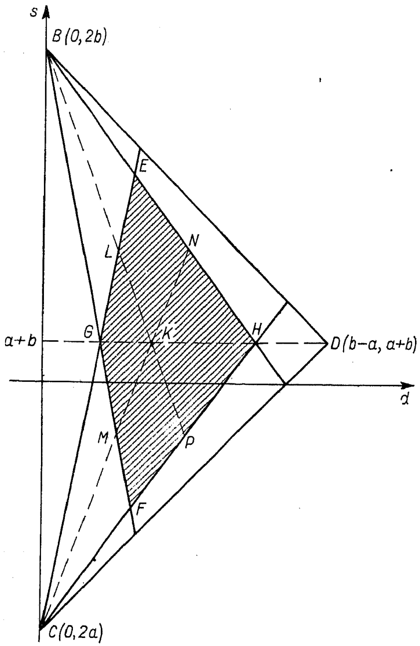

Рис. 1

Аналогичным образом, подставляя $t = a$ в неравенстве (13), доказывается, что

$$2a+\gamma(r)d \leqslant s \leqslant 2a+\gamma(r^{-1})d. \tag{20}$$

Точки плоскости (d, s), удовлетворяющие неравенствам (19), (20), лежат в четырехугольнике $EGFH$ (см. рис. 1), содержащимся между прямыми с уравнениями

$s = 2a+\gamma(r)d$ (прямая FH), $\quad s = 2b-\gamma(r)d$ (прямая EH),
$s = 2a+\gamma(r^{-1})d$ (прямая GE), $\quad s = 2b-\gamma(r^{-1})d$ (прямая GF).

Четырехугольник $EGFH$ лежит в треугольнике BCD, так как вышеуказанные прямые проходят через точку B или C и так как $1 < \gamma(r) \leqslant \leqslant \gamma(r^{-1})$ в силу определения (17).

IV. Предположим вначале, что $h \leqslant r$. Так как во всем четырехугольнике $EGFH$ выполняются неравенства $\frac{1}{2}s-a-\frac{1}{2}\gamma(r)d \geqslant 0$, $b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\gamma(r)d \geqslant 0$, а γ — возрастающая функция, то тем более имеем $\frac{1}{2}s-a-\frac{1}{2}\gamma(h)d \geqslant 0$, $b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\gamma(h)d \geqslant 0$ и $\alpha(d, s) = b-a-\big(\gamma(h)-\mu_n(h)\big)d$. При любом $h \in \langle 0, 1\rangle$ мы имеем $\gamma(h) \geqslant 1$, $\mu_n(h) \leqslant 1$, следовательно, функция $\alpha(d, s)$ достигает минимума в точке H (обладающей наибольшей координатой d), для которой $d_H = (b-a)/\gamma(r)$. Итак,

$$\min_{EGFH} \alpha(d, s) = \frac{\gamma(r)-\gamma(h)+\mu_n(h)}{\gamma(r)}(b-a)$$

и, учитывая определение (17) и неравенство (18), мы получаем заключение (11) в том случае, когда $h \leqslant r$.

V. Предположим теперь, что $r < h \leqslant 1$. Если точку K определим как точку пересечения прямых $s = 2a+\gamma(h)d$, $s = 2b-\gamma(h)d$, то она принадлежит к четырехугольнику $EGFH$, а в четырехугольниках

$GLKM$, $\quad ELKN$, $\quad FMKP$, $\quad HNKP$

величина $\frac{1}{2}s-a-\frac{1}{2}\gamma(h)d$ соответственно

неотрицательна, неотрицательна, неположительна, неположительна,

а величина $b-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\gamma(h)d$ соотвественно

неотрицательна, неположительна, неотрицательна, ноположительна.

Таким образом, из определения функции $\alpha(d, s)$ вытекает, что

$$\alpha(d, s) = \begin{cases} b-a-\big(\gamma(h)-\mu_n(h)\big)d & \text{в четырехугольнике } GLKM, \\ \big(\mu_n(h)-\frac{1}{2}\gamma(h)\big)d+\frac{1}{2}s-a & \quad ,, \qquad ,, \qquad ELKN, \\ \big(\mu_n(h)-\frac{1}{2}\gamma(h)\big)d+b-\frac{1}{2}s & \quad ,, \qquad ,, \qquad FMKP, \\ \mu_n(h)d & \quad ,, \qquad ,, \qquad HNKP. \end{cases}$$

В любом из этих четырехугольников α является линейной функцией d и s. Кроме того, в четырехугольниках $GLKM$ и $HNKP$ функция α не зависит от s и в первом из них является убывающей, а во втором возрастающей функцией d. Из последнего замечания следует, что

$$\min_{GLKM} \alpha(d, s) = \min_{HNKP} \alpha(d, s) = \alpha(d_K, s_K) = \frac{\mu_n(h)}{\gamma(h)}(b-a).$$

Итак, чтобы найти $\min\limits_{EGFH} \alpha(d, s)$, достаточно будет вычислить еще и сравнить с $\alpha(d_K, s_K)$ значения функции α в точках E и F. Так как

$$d_E = d_F = \frac{2(b-a)}{\gamma(r)+\gamma(r^{-1})}, \qquad s_E = 2\frac{a\gamma(r)+b\gamma(r^{-1})}{\gamma(r)+\gamma(r^{-1})}, \qquad s_F = 2\frac{b\gamma(r)+a\gamma(r^{-1})}{\gamma(r)+\gamma(r^{-1})},$$

то

$$\alpha(d_E, s_E) = \alpha(d_F, s_F) = \frac{\gamma(r^{-1})-\gamma(h)+2\mu_n(h)}{\gamma(r)+\gamma(r^{-1})}(b-a).$$

Выполняется неравенство $\alpha(d_K, s_K) \leqslant \alpha(d_E, s_E)$, т. е.

$$\frac{\mu_n(h)}{\gamma(h)} \leqslant \frac{\gamma(r^{-1})-\gamma(h)+2\mu_n(h)}{\gamma(r)+\gamma(r^{-1})},$$

так как оно слабее неравенства

$$\frac{\mu_n(h)}{\gamma(h)} \leqslant \frac{\gamma(r^{-1})-\gamma(h)+2\mu_n(h)}{\gamma(h)+\gamma(r^{-1})},$$

которое равносильно следующему: $\big(\gamma(r^{-1})-\gamma(h)\big)\big(\mu_n(h)-\gamma(h)\big) \leqslant 0$. Таким образом, мы доказали, что $\min\limits_{EGFH} \alpha(d, s) = \dfrac{\mu_n(h)}{\gamma(h)}(b-a)$ и доказали (11) в том случае, когда $r < h \leqslant 1$.

Теорема 3. *Если m — наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_{n+m}(\xi) < \varepsilon_n(\xi)$, и если $\delta(\xi) = \varepsilon_{n+m}(\xi)/\varepsilon_n(\xi) \leqslant \frac{1}{2}$, то выполняется неравенство*

(21) $$\Big|\underset{t\epsilon I}{E}\{|\xi(t)-\psi_n(t)| \geqslant h\varepsilon_n(\xi)\}\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \begin{cases} \dfrac{\tau_{n+m}\left(\dfrac{1-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}\right) - \tau_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right) + \mu_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right)\cos\dfrac{\pi}{2(n+m)}}{\tau_{n+m}\left(\dfrac{1-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}\right)}(b-a) & \text{при} \quad 0 \leqslant h \leqslant \dfrac{1-3\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}, \\ \dfrac{\mu_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right)\cos\dfrac{\pi}{2(n+m)}}{\tau_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right)}(b-a) & \text{при} \quad \dfrac{1-3\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)} < h \leqslant 1-2\delta(\xi), \\ 0 & \text{при} \quad 1-2\delta(\xi) < h \leqslant 1. \end{cases}$$

Обозначения, употребляемые в неравенстве (21) и в его доказательстве, введены в предыдущих теоремах.

Доказательство. Из равенства (8) следует, что для $t \epsilon I$

$$\varepsilon_{n+m}(\xi) \geqslant |\xi(t)-\psi_{n+m}(t)| \geqslant |\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)| - |\xi(t)-\psi_n(t)|,$$

т. е. для $t \epsilon I$ мы имеем $|\xi(t)-\psi_n(t)| \geqslant |\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)| - \varepsilon_{n+m}(\xi)$, а в обозначениях (3)

(22) $$|A_h| \geqslant \Big|\underset{t\epsilon I}{E}\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)| \geqslant h\varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi)\}\Big|.$$

В доказательстве теоремы 1 мы заметили, что ψ_n является полиномом наилучшего приближения для функции ξ в классе $\mathcal{W}_{n+m-1}$. Поэтому ([2], стр. 38-39, теоремы 8.1 и 8.2 с заменой n числом $n+m-1$) полином $\psi_n-\psi_{n+m}$ имеет $n+m$ различных корней $u_1, u_2, \ldots, u_{n+m}$ ($u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+m}$), принадлежащих к интервалу (открытому) (a, b) и выполняются неравенства

(23) $$f = \min_{1\leqslant k\leqslant n+m-1} \|\psi_n-\psi_{n+m}\|_{\langle u_k, u_{k+1}\rangle} \geqslant \varepsilon_{n+m-1}(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi) = \varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi),$$

(24) $$\begin{cases} |\psi_n(a)-\psi_{n+m}(a)| \geqslant \varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi), \quad |\psi_n(b)-\psi_{n+m}(b)| \geqslant \varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi), \\ \|\psi_n-\psi_{n+m}\|_I \leqslant \varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi). \end{cases}$$

Из неравенств (22), (23) вытекает, что

$$|A_h| \geqslant \left|\underset{t\epsilon I}{E}\left\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)| \geqslant \frac{h\varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi)}{\varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi)}f\right\}\right| =$$

$$= \left|\underset{t\epsilon I}{E}\left\{|\psi_n(t)-\psi_{n+m}(t)| \geqslant \frac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}f\right\}\right|.$$

Полином $\psi_n-\psi_{n+m}$ выполняет условия теоремы 2 (с заменой n числом $n+m$). Принимая

$$r = \frac{\varepsilon_n(\xi)-\varepsilon_{n+m}(\xi)}{\varepsilon_n(\xi)+\varepsilon_{n+m}(\xi)} = \frac{1-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}$$

(и удовлетворяя тем самим неравенству (10), что вытекает из (23), (24)), мы получим из (11) после замены n числом $n+m$, χ — полиномом $\psi_n-\psi_{n+m}$ и h — числом $\big(h+\delta(\xi)\big)/\big(1-\delta(\xi)\big)$ искомые оценки (21). При этом, согласно предположению теоремы 2, должно быть $0 \leqslant \big(h+\delta(\xi)\big)/\big(1-\delta(\xi)\big) \leqslant 1$, т. е. надо предположить, что $\delta(\xi) \leqslant \frac{1}{2}$ и $0 \leqslant h \leqslant 1-2\delta(\xi)$. При остальных значениях h (и остальных значениях $\delta(\xi)$) верна только очевидная оценка $|A_h| \geqslant 0$. Заметим еще, что первая часть неравенства (21) получается из первой части (11) при $0 \leqslant \dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)} \leqslant \dfrac{1-\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}$, т. е. при $0 \leqslant h \leqslant \dfrac{1-3\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}$.

3. Оценки ошибки наилучшей равномерной аппроксимации. В теории равномерной аппроксимации известны многие теоремы, в которых оценивается сверху (или, значительно реже, снизу) ошибка $\varepsilon_n(\xi)$ наилучшего приближения непрерывной функции ξ полиномами класса $\mathfrak{M}_n^0$. Эти оценки зависят от структурных свойств функции ξ, например от существования некоторого количества производных, от выполнения условия Липшица и т. д.

Оценки, приведенные в этом §, другого типа. Это оценки снизу числа $\varepsilon_{n+m}(\xi)$ с наименьшим индексом $n+m$ таким, что $\varepsilon_{n+m}(\xi) < \varepsilon_n(\xi)$, которые зависят от функции ξ только через меры множеств

$$A_h = \mathop{E}_{t\epsilon I}\{|\xi(t)-\psi_n(t)| \geqslant h\varepsilon_n(\xi)\}$$

при $h\epsilon(0,1)$. Следовательно, эти оценки можно применять в том случае, когда полином ψ_n, наилучшего приближения для функции ξ в классе $\mathfrak{M}_n^0$, известен. Тогда определенное выше число m тоже известно, т. е. оценки касаются числа, стоящего на вполне определенном месте в последовательности $\{\varepsilon_k(\xi)\}$. Действительно, известно, что $m+n+1$ равняется максимальному числу точек сегмента $\langle a, b\rangle$, расположенных в порядке возрастания, в которых разность $\xi(t)-\psi_n(t)$ равняется по очереди $\varepsilon_n(\xi)$ и $-\varepsilon_n(\xi)$ ([1], стр. 51, теорема 2).

Легко доказать, что знание самых чисел $|A_h|$ и числа m не дает никакой оценки сверху числа $\varepsilon_{n+m}(\xi)$, конечно, кроме неравенства $\varepsilon_{n+m}(\xi) < \varepsilon_n(\xi)$.

Теорема 4. *Если m — наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_{n+m}(\xi) < \varepsilon_n(\xi)$, то при любом $h\epsilon(0,1)$ выполняется неравенство*

$$\varepsilon_{n+m}(\xi) \geqslant \frac{h+\big(|A_h|/(b-a)\big)^2-1}{2-\big(|A_h|/(b-a)\big)^2}\varepsilon_n(\xi). \tag{25}$$

Доказательство. Величина, равная

$$\begin{cases} b-a & \text{для} \quad 0\leqslant h<\delta, \\ (b-a)\sqrt{\dfrac{1-h+2\delta}{1+\delta}} & \text{для} \quad \delta\leqslant h\leqslant 1 \end{cases} \tag{26}$$

является при любом h неубывающей функцией параметра δ. Поэтому в силу неравенства (5) частное $\delta(\xi) = \varepsilon_{n+m}(\xi)/\varepsilon_n(\xi)$ не меньше того числа δ, для которого $|A_h|$ равняется величине (26). Так как при $h>0$ мы имеем $|A_h| < b-a$ (ибо разность $\xi-\psi_n$ является непрерывной функцией, принимающей в некоторых точках значение 0), то число δ надо определить посредством равенства $|A_h| = (b-a)\sqrt{\dfrac{1-h+2\delta}{1+\delta}}$,

из которого вытекает, что

$$\left(\frac{|A_h|}{b-a}\right)^2(1+\delta) = 1-h+2\delta, \qquad \delta = \frac{h+\big(|A_h|/(b-a)\big)^2-1}{2-\big(|A_h|/(b-a)\big)^2},$$

т. е неравенство (25) выполняется.

Конечно, в правой части неравенства (25) можно написать символ $\max\limits_{0\leqslant h\leqslant 1}$, но в этом новом виде труднее это неравенство фактически применить.

В нижеследующей теореме, во избежание некоторых трудностей, мы воспользуемся неравенством, которое немного слабее неравенства (21):

$$\Big|\mathop{E}_{t\epsilon I}\{|\xi(t)-\psi_n(t)| \geqslant h\varepsilon_n(\xi)\}\Big| \geqslant \tag{27}$$

$$\geqslant \begin{cases} \dfrac{\mu_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right)\cos\dfrac{\pi}{2(n+m)}}{\tau_{n+m}\left(\dfrac{h+\delta(\xi)}{1-\delta(\xi)}\right)}(b-a) & \text{для} \quad 0\leqslant h\leqslant 1-2\delta(\xi), \\ 0 & \text{для} \quad 1-2\delta(\xi)<h\leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема 5. *Если m — наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_{n+m}(\xi) < \varepsilon_n(\xi)$, то при любом $h\epsilon(0,1)$ выполняется неравенство*

$$\varepsilon_{n+m}(\xi) \geqslant \frac{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)-h}{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)+1}\varepsilon_n(\xi), \tag{28}$$

где ι_{n+m} — функция, обратная по отношению к функции

$$\frac{\mu_{n+m}(h)\cos\pi/2(n+m)}{\tau_{n+m}(h)}. \tag{29}$$

Доказательство. Заметим вначале, что функция, обратная по отношению к функции (29), существует и определена в сегменте $\langle 0,1\rangle$, так как при h, изменяющемся от 0 до 1, функция μ_{n+m} убывает от 1 до 0 а функция τ_{n+m} возрастает от $\cos\pi/2(n+m)$ до 1.

Далее, заметим, что если $\delta(\xi) > \frac{1}{2}$, т. е. $\varepsilon_{n+m}(\xi) > \frac{1}{2}\varepsilon_n(\xi)$, то неравенство (28) соблюдено, так как

$$\frac{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)-h}{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)+1} \leqslant \frac{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)}{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому предположим, что $\delta(\xi) \leqslant \frac{1}{2}$. Из замечаний, сделанных о μ_{n+m} и τ_{n+m}, вытекает, что величина, определенная как

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\mu_{n+m}\big((h+\delta)/(1-\delta)\big)\cos\pi/2(n+m)}{\tau_{n+m}\big((h+\delta)/(1-\delta)\big)}(b-a) & \text{для} \quad 0 \leqslant h \leqslant 1-2\delta, \\ 0 & \text{для} \quad 1-2\delta < h \leqslant 1 \end{array}$$

и имеющая смысл при $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}$, является убывающей функцией δ. Отсюда и из неравенства (27), так же как в доказательстве предыдущей теоремы, следует, что частное $\delta(\xi)$ не меньше того числа δ, при котором

$$|A_h| = \frac{\mu_{n+m}\big((h+\delta)/(1-\delta)\big)\cos\pi/2(n+m)}{\tau_{n+m}\big((h+\delta)/(1-\delta)\big)}(b-a),$$

т. е. такого, что

$$\frac{h+\delta}{1-\delta} = \iota_{n+m}\left(\frac{|A_h|}{b-a}\right), \qquad \delta = \frac{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)-h}{\iota_{n+m}\big(|A_h|/(b-a)\big)+1},$$

что и надо было доказать.

В окончание этого § выясним, какова область применения оценок (25) и (28).

Если, как до этого, полином ψ_n есть полином наилучшего приближения для функции ξ в классе $\mathcal{W}_n^1$ и

$$A_h = \mathop{E}_{t\epsilon I}\{|\xi(t)-\psi_n(t)| \geqslant h\varepsilon_n(\xi)\},$$

то при любом h точка $\big(h, |A_h|/(b-a)\big)$ принадлежит к единичному квадрату. В теоремах 4 и 5 представлены оценки снизу числа $\varepsilon_{n+m}(\xi)$ для непересекающихся множеств точек $\big(h, |A_h|/(b-a)\big)$. Недостатком этих оценок является факт, что названные множества не охватывают всего единичного квадрата. Остается множество, заключающееся между графиками функций переменной h:

$$(30) \qquad \frac{\mu_{n+m}(h)\cos\big(\pi/2(n+m)\big)}{\tau_{n+m}(h)}, \qquad \sqrt{1-h}$$

и увеличивающееся, когда $n+m$ возрастает. Следовательно, если при любом $h\epsilon(0,1)$ величина $|A_h|/(b-a)$ содержится между числами (30) (исключая равенство), то метод, описанный в настоящей работе, дает только тривиальную оценку $\varepsilon_{n+m}(\xi) \geqslant 0$. Что такой случай возможен, на это указывает пример функции $\xi = |t|$ при $I = \langle -1, 1\rangle$, $n = 2$. Тогда $\psi_2 = t^2+\frac{1}{8}$, $m = 2$,

$$\frac{|A_h|}{b-a} = 1+\sqrt{\frac{1-h}{2}}-\sqrt{\frac{1+h}{2}}$$

и упомянутые неравенства выполняются.

Мне кажется, что тот невыгодный случай, когда величина $|A_h|/(b-a)$ заключается между числами (30), имеет место для достаточно регулярных функций ξ, что, конечно, уменьшает практическое значение приведенных теорем.

4. Интегральная аппроксимация. Для любой функции $\xi\epsilon\mathcal{C}$ числа $\varepsilon_n(\xi)$ и $\varepsilon_n^{(p)}(\xi)$ (см. § 1) связаны неравенством $\varepsilon_n^{(p)}(\xi) \leqslant \varepsilon_n(\xi)$, вытекающим прямо из их определения. Теорема 1 позволяет усилить это неравенство равномерно по отношению к величинам $\varepsilon_n(\xi), \varepsilon_{n+1}(\xi), \ldots$

Теорема 6. *Для любой функции $\xi\epsilon\mathcal{C}$ и любого $p > 0$ выполняется неравенство*

$$(31) \qquad \varepsilon_n^{(p)}(\xi) \leqslant \varepsilon_n(\xi)\left(\delta^p(\xi)+p\int_{\delta(\xi)}^{1}\sqrt{\frac{1-x+2\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}}\,x^{p-1}dx\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Для любой функции η, непрерывной и неотрицательной в сегменте $I = \langle a, b\rangle$, выполняется очевидное равенство

$$(32) \qquad \int_a^b \eta(t)\,dt = \int_0^{\|\eta\|_I}\Big|\mathop{E}_{t\epsilon I}\{\eta(t) \geqslant x\}\Big|dx = \|\eta\|_I\int_0^1\Big|\mathop{E}_{t\epsilon I}\{\eta(t) \geqslant h\|\eta\|_I\}\Big|dh.$$

Записывая соотношения (2), (5) в следующем виде: $\|(\xi-\psi_n)^p\|_I = \varepsilon_n^p(\xi)$,

$$\Big|\mathop{E}_{t\epsilon I}\{|\xi(t)-\psi_n(t)|^p \geqslant h\varepsilon_n^p(\xi)\}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} b-a & \text{для} \quad 0 \leqslant h < \delta^p(\xi), \\ (b-a)\sqrt{\dfrac{1-h^{1/p}+2\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}} & \text{для} \quad \delta^p(\xi) \leqslant h \leqslant 1, \end{cases}$$

вычисляем при помощи (32), что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b|\xi(t)-\psi_n(t)|^p\,dt \leqslant \varepsilon_n^p(\xi)\left(\delta^p(\xi)+\int_{\delta^p(\xi)}^1\sqrt{\frac{1-h^{1/p}+2\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}}\,dh\right) =$$
$$= \varepsilon_n^p(\xi)\left(\delta^p(\xi)+p\int_{\delta(\xi)}^1\sqrt{\frac{1-x+2\delta(\xi)}{1+\delta(\xi)}}\,x^{p-1}dx\right),$$

что и надо было доказать.

Заметим, что неравенство (31) является сильнейшим при $\delta(\xi) = 0$, т. е. в частности в том случае, когда ξ — полином $(n+1)$-й степени. Если $\delta(\xi) = 0$, то интеграл в неравенстве (31) равен $\int_0^1(1-x)^{1/2}x^{p-1}dx$, откуда вытекает, что $\varepsilon_n^{(p)}(\xi) \leqslant p^{1/p}B^{1/p}(\frac{3}{2}, p)\,\varepsilon_n(\xi)$, а в частности $\varepsilon_n^{(1)}(\xi) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_n(\xi)$, $\varepsilon_n^{(2)}(\xi) \leqslant \sqrt{\frac{8}{15}}\,\varepsilon_n(\xi)$. Надо также заметить, что при $\delta(\xi)\to 1$ правая сторона неравенства (31) стремится к $\varepsilon_n(\xi)$.

Цитированная литература

[1] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций,* Москва-Ленинград 1949.

[2] S. Paszkowski, *On approximation with nodes*, Rozprawy Matematyczne 14 (1957).

[3] С. Пашковский, *О полиномах, все корни которых вещественны,* Ann. Polon. Math. 5 (1958), стр. 165-194.

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1956

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.