On peut aussi remplacer la condition intégrale portant sur tous les intervalles de longueur constante égale à $\frac{2}{3}\pi$, par une seule inégalité imposée à l'intégrale de la fonction $p^+(t)$ étendue sur l'intervallle de périodicité tout entier et obtenir ainsi le théorème suivant, tout à fait analogue au théorème de Liapounoff:

Corollaire II. *Si la fonction $p(t)$ continue, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait aux inégalités*

$$\int_0^\pi p(t)\,dt \geqslant 0, \quad p^+(t) \leqslant 4 \quad et \quad \int_0^\pi p^+(t)\,dt \leqslant \frac{12}{2\pi+\sqrt{3}},$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Travaux cités

[1] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2) 9 (1907), p. 203-474.

[2] G. Borg, *Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen*, Ark. Mat. Astr. Fys. 31A, no 1 (1944), p. 1-31.

[3] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[4] B. Viswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences. Sect. A, N 5 (1952), p. 335-341.

[5] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 200-209.

Reçu par la Rédaction le 29. 11. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

О полиномах, все корни которых вещественны

С. Пашковский (Вроцлав)

1. Результаты. В настоящей работе $\langle a, b\rangle$ обозначает сегмент о концах a и b, т. е. множество $a \leqslant t \leqslant b$, (a, b) — интервал о тех же концах, т. е. множество $a < t < b$, $|A|$ — жорданову меру множества A, $\deg\chi$ — степень полинома χ. Для непрерывной функции ξ и сегмента I определяем норму

$$\|\xi\|_I = \max_{t\epsilon I}|\xi(t)|.$$

Малые латынские буквы обозначают вещественные числа, такие же греческие — функции вещественной переменной.

В работе изучается некоторое свойство полиномов степени выше 1, все корни которых вещественны и не все равны между собой. Для любого такого полинома χ, соседними корнями которого являются числа c и d (где $c < d$), вводится множество

$$\underset{t\epsilon\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}, \tag{1}$$

где h — любое число из сегмента $\langle 0, 1\rangle$. Множество (1) является сегментом в силу предполагаемых свойств полинома χ; его концы — это два корня уравнения $|\chi(t)| = h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}$, лежащие в сегменте $\langle c, d\rangle$.

В §§ 2 и 3 мы докажем следующую теорему:

Для любого $h\epsilon\langle 0,1\rangle$ *выполняются неравенства*

$$\Big|\underset{t\epsilon\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| \leqslant (d-c)\sqrt{1-h},\text{[1]} \tag{2}$$

$$\Big|\underset{t\epsilon\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| \geqslant (d-c)\mu_n(h) \quad \textit{при} \quad \deg\chi = n, \tag{3}$$

где

$$\mu_n(h) = \Big|\underset{t\epsilon\langle 0,1\rangle}{E}\{t^{n-1}(1-t) \geqslant h(n-1)^{n-1}/n^n\}\Big|. \tag{4}$$

---

(1) Уже после поступления настоящей работы в печать оказалось, что оценка (2) была ранее получена в работе П. Эрдеша [3]. Однако каждая из четырех лемм, составляющих нижеприведенное доказательство оценки (2), является повидимому новой.

Кроме того, в § 4 мы представим некоторые следствия неравенства (2).

Надо сразу отметить, что усиление любого из неравенств (2), (3) невозможно, так как при $\chi(t) = (c-t)(d-t)$ длина сегмента (1) равна $(d-c)\sqrt{1-h}$, а при $\chi(t) = (c-t)^{n-1}(d-t)$ равна $(d-c)\mu_n(h)$. Так же легко заметить, что без ограничения сверху степени полинома χ длину сегмента (1) для $0 < h \leqslant 1$ можно оценить снизу только нулем.

Потребность в оценках длины сегмента (1) появилась при рассмотрении некоторых вопросов из теории равномерной аппроксимации (см. [2]).

2. Доказательство неравенства (2) опирается на четыре леммы. Мы ограничимся в нем случаем $c = -1$, $d = 1$, из которого неравенство (2) в общем случае вытекает путем соответствующего линейного преобразования переменной t.

Лемма 1. *Если полином χ и число $z \in (-1, 1)$ выполняют следующие условия:*

$(\mathcal{H}_1)$ $\chi(-1) = \chi(1) = 0$,

$(\mathcal{H}_2)$ *все корни полинома χ вещественны и лежат вне интервала $(-1, 1)$,*

$(\mathcal{H}_3)$ $\chi'(z) = 0$,

то существует полином ψ такой, что

$(\mathcal{T}_1)$ $\psi(-1) = \psi(1) = 0$,

$(\mathcal{T}_2)$ *корни полинома $\psi/(1-t^2)$ вещественны и все лежат на полупрямой $(-\infty, -1\rangle$ или все на полупрямой $\langle 1, +\infty)$,*

$(\mathcal{T}_3)$ $\psi'(z) = 0$,

$(\mathcal{T}_4)$ $\psi(z) = \chi(z)$,

$(\mathcal{T}_5)$ $|\chi(t)| \leqslant |\psi(t)|$ *при* $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Доказательство. Лемма верна, когда $\deg\chi = 2$ и $\deg\chi = 3$, а также для любого полинома χ высшей степени, для которого все корни полинома $\chi/(1-t^2)$ лежат на полупрямой $(-\infty, -1\rangle$ или все на полупрямой $\langle 1, +\infty)$. Действительно, во всех этих случаях условия $(\mathcal{T}_1)$-$(\mathcal{T}_5)$ выполняются полиномом $\psi = \chi$.

В доказательстве пользуемся принципом математической индукции относительно степени полинома χ. Следовательно, рассмотрим любой полином χ такой, что $\deg\chi \geqslant 4$ и что существуют корни

$$u^- \leqslant -1, \quad u^+ \geqslant 1 \tag{5}$$

полинома $\chi/(1-t^2)$. Мы предполагаем, что лемма верна для всех полиномов степени ниже $\deg\chi$, выполняющих условия $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_3)$.

Пусть

$$\chi = (u^- - t)(u^+ - t)\varrho; \tag{6}$$

ϱ является полиномом, все корни которого вещественны и лежат вне интервала $(-1, 1)$. Из (6) и $(\mathcal{H}_3)$ вытекает, что

$$\chi(z) = (u^- - z)(u^+ - z)\varrho(z),$$

$$\chi'(z) = -(u^- + u^+ - 2z)\varrho(z) + (u^- - z)(u^+ - z)\varrho'(z) = 0.$$

Пусть

$$\chi_0 = \big(u^- u^+ - z^2 - (u^- + u^+ - 2z)t\big)\varrho. \tag{7}$$

Полином χ_0 выполняет условия, аналогичные условиям $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_3)$, с числом z, определенным равенством $\chi'(z) = 0$. Действительно, мы имеем $\chi_0(-1) = \chi_0(1) = 0$,

$$\chi_0(z) = \big(u^- u^+ - z^2 - (u^- + u^+)z + 2z^2\big)\varrho(z) = (u^- - z)(u^+ - z)\varrho(z) = \chi(z), \tag{8}$$

$$\chi_0'(z) = -(u^- + u^+ - 2z)\varrho(z) + (u^- - z)(u^+ - z)\varrho'(z) = 0. \tag{9}$$

Условие $(\mathcal{H}_2)$ для полинома χ_0 при $u^- + u^+ - 2z = 0$ вытекает непосредственно из верной тогда формулы $\chi_0 = (u^- u^+ - z^2)\varrho$ и соответствующего свойства полинома ϱ. Если $u^- + u^+ - 2z \neq 0$, то, кроме корней полинома ϱ, корнем χ_0 является число $u = (u^- u^+ - z^2)/(u^- + u^+ - 2z)$. Тогда для доказательства неравенства $|u| \geqslant 1$ надо посчитать, что

$$\frac{1}{u-z} = \frac{u^- + u^+ - 2z}{u^- u^+ - z^2 - (u^- + u^+)z + 2z^2} = \frac{u^- + u^+ - 2z}{(u^- - z)(u^+ - z)} = \frac{1}{u^+ - z} - \frac{1}{z - u^-},$$

где в силу (5) мы имеем $u^+ - z > 0$, $z - u^- > 0$.

При $u^+ - z < z - u^-$ вытекают оттуда по очереди неравенства

$$0 < \frac{1}{u-z} < \frac{1}{u^+ - z}, \quad u - z > u^+ - z, \quad u > u^+ \geqslant 1,$$

а при $u^+ - z > z - u^-$ — неравенства

$$0 > \frac{1}{u-z} > \frac{1}{u^- - z}, \quad u - z < u^- - z, \quad u < u^- \leqslant -1,$$

которые надо было доказать.

Мы доказали, что полиномом χ_0 выполняются условия, аналогичные условиям $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_3)$, с числом z, определенным в предположениях леммы. Так как $\deg\chi_0 < \deg\chi$, то в силу индукционной гипотезы существует полином ψ_0 такой, что

1° $\psi_0(-1) = \psi_0(1) = 0$,

2° корни полинома $\psi_0/(1-t^2)$ вещественны и все лежат на полупрямой $(-\infty, -1\rangle$ или все на полупрямой $\langle 1, +\infty)$,

3° $\psi_0'(z) = 0$,

4° $\psi_0(z) = \chi_0(z)$,

5° $|\chi_0(t)| \leqslant |\psi_0(t)|$ при $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Из условий (8), (9), $(\mathcal{H}_3)$ вытекает, что z является двукратным корнем полинома $\chi_0-\chi$. Число z, принадлежащее по определению интервалу $(-1, 1)$, не является корнем полинома ϱ, следовательно является двукратным корнем полинома $(\chi_0-\chi)/\varrho$ и в силу (6) и (7) мы имеем

$$\chi_0-\chi = -(z-t)^2\varrho = -\frac{(z-t)^2}{(u^- -t)(u^+ -t)}\chi.$$

Так как у полиномов χ_0, χ нет корней в интервале $(-1, 1)$, то из полученной формулы и из (8) вытекает, что при $t \in (-1, 1)$ мы имеем

$$\operatorname{sign}\big(\chi_0(t)-\chi(t)\big) = \operatorname{sign}\chi(t) = \operatorname{sign}\chi_0(t).$$

Поэтому при $t \in (-1, 1)$ выполняется одно из двух неравенств $0 < \chi(t) \leqslant \leqslant \chi_0(t)$, $\chi_0(t) \leqslant \chi(t) < 0$, а затем и неравенство

$$|\chi(t)| \leqslant |\chi_0(t)|. \tag{10}$$

Выполнение леммы 1 для полинома χ вытекает при $\psi = \psi_0$ из условий 1°-5° и формул (8)-(10).

Заметим, что из условий $(\mathcal{T}_2)$-$(\mathcal{T}_4)$ вытекает, что $\|\chi\|_{\langle -1,1\rangle} = |\chi(z)| = |\psi(z)| = \|\psi\|_{\langle -1,1\rangle}$, поэтому в силу $(\mathcal{T}_5)$ мы имеем для всех $0 \leqslant h \leqslant 1$

$$\underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle -1,1\rangle}\} \subset \underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{|\psi(t)| \geqslant h\|\psi\|_{\langle -1,1\rangle}\},$$

$$\Big|\underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle -1,1\rangle}\}\Big| \leqslant \Big|\underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{|\psi(t)| \geqslant h\|\psi\|_{\langle -1,1\rangle}\}\Big|. \tag{11}$$

В дальнейшем символ $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет обозначать гармоническое среднее чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. число $n\big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\big)^{-1}$.

Лемма 2. *Если полином $\psi \neq 0$ и число $z \in (-1, 1)$ таковы, что*

$(\mathcal{H}_1)$ $\psi(-1) = \psi(1) = 0$,

$(\mathcal{H}_2)$ *корни полинома $\psi/(1-t^2)$ вещественны и все лежат на полупрямой $(-\infty, -1\rangle$ или все на полупрямой $\langle 1, +\infty)$; числа u и $\tilde{u} > u$ являются корнями этого полинома,*

$(\mathcal{H}_3)$ $\psi'(z) = 0$,

то полином

$$\overline{\psi} = \frac{(u-z)(\tilde{u}-z)}{\mu^2(u-z, \tilde{u}-z)} \cdot \frac{\big(z+\mu(u-z, \tilde{u}-z)-t\big)^2}{(u-t)(\tilde{u}-t)}\psi \tag{12}$$

выполняет следующие условия:

$(\mathcal{T}_1)$ $\overline{\psi}(-1) = \overline{\psi}(1) = 0$,

$(\mathcal{T}_2)$ *корни полинома $\overline{\psi}/(1-t^2)$ вещественны и все лежат на полупрямой $(-\infty, -1\rangle$ или все на полупрямой $\langle 1, +\infty)$,*

$(\mathcal{T}_3)$ $\overline{\psi}'(z) = 0$,

$(\mathcal{T}_4)$ $\overline{\psi}(z) = \psi(z)$,

$(\mathcal{T}_5)$ $|\psi(t)| \leqslant |\overline{\psi}(t)|$ *при* $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Доказательство. Выполнение условий $(\mathcal{T}_1)$ и $(\mathcal{T}_4)$ очевидно. Условие $(\mathcal{T}_2)$ вытекает из $(\mathcal{H}_2)$ и из того, что $u < z+\mu(u-z, \tilde{u}-z) < \tilde{u}$. Для проверки $(\mathcal{T}_3)$ примем

$$\psi = (u-t)(\tilde{u}-t)\varrho. \tag{13}$$

В силу $(\mathcal{H}_3)$ мы имеем

$$\psi'(z) = -(u+\tilde{u}-2z)\varrho(z)+(u-z)(\tilde{u}-z)\varrho'(z) = 0$$

(во всех формулах этой леммы переменной дифференцирования является t), откуда

$$\varrho'(z) = \frac{u+\tilde{u}-2z}{(u-z)(\tilde{u}-z)}\varrho(z) = \frac{2\varrho(z)}{\mu(u-z, \tilde{u}-z)}. \tag{14}$$

В то же время из (12) вытекает, что

$$\overline{\psi} = \frac{(u-z)(\tilde{u}-z)}{\mu^2(u-z, \tilde{u}-z)}\big(z+\mu(u-z, \tilde{u}-z)-t\big)^2\varrho,$$

$$\overline{\psi}'(z) = \frac{(u-z)(\tilde{u}-z)}{\mu^2(u-z, \tilde{u}-z)}\big(-2\mu(u-z, \tilde{u}-z)\varrho(z)+\mu^2(u-z, \tilde{u}-z)\varrho'(z)\big) =$$

$$= (u-z)(\tilde{u}-z)\left(-\frac{2\varrho(z)}{\mu(u-z, \tilde{u}-z)}+\varrho'(z)\right),$$

следовательно, из (14) вытекает $(\mathcal{T}_3)$.

На основании $(\mathcal{H}_3)$ и доказанных уже условий $(\mathcal{T}_3)$, $(\mathcal{T}_4)$ мы можем утверждать, что z является двукратным корнем полинома

$$\overline{\psi}-\psi = \left(\frac{(u-z)(\tilde{u}-z)}{\mu^2(u-z, \tilde{u}-z)}\big(z+\mu(u-z, \tilde{u}-z)-t\big)^2-(u-t)(\tilde{u}-t)\right)\varrho. \tag{15}$$

Так как из $(\mathcal{H}_2)$ следует, что $\varrho(z) \neq 0$, то z является двукратным корнем полинома, заключенного в большие скобки в формуле (15), и учитывая значение коэффициента при t^2 в этом полиноме, мы получаем

$$\bar{\psi}-\psi = \left(\frac{(u-z)(\tilde{u}-z)}{\mu^2(u-z,\,\tilde{u}-z)}-1\right)(z-t)^2\varrho =$$

$$= \left(\frac{(u-z+\tilde{u}-z)^2}{4(u-z)(\tilde{u}-z)}-1\right)(z-t)^2\varrho = \frac{(u-\tilde{u})^2}{4(u-z)(\tilde{u}-z)}(z-t)^2\varrho.$$

Так как $\operatorname{sign}(u-z) = \operatorname{sign}(\tilde{u}-z)$, то из вышеприведенного равенства, из (13) и $(\mathcal{T}_4)$ вытекает при $t\epsilon(-1,1)$ равенство $\operatorname{sign}\big(\bar{\psi}(t)-\psi(t)\big) = \operatorname{sign}\bar{\psi}(t) = \operatorname{sign}\psi(t)$, значит — как в лемме 1 — вытекает $(\mathcal{T}_5)$.

В силу леммы 2 полиномы ψ и $\bar{\psi}$ связаны неравенством, вытекающим из (11) путем замены χ на ψ и ψ на $\bar{\psi}$.

Лемма 3. *Если полином*

$$(16) \qquad \psi = (1-t^2)\prod_{i=1}^{n}(u_i-t)$$

и число $z\epsilon(-1,1)$ таковы, что

$(\mathcal{H}_1)$ $\quad u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant -1$ *или* $1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$,

$(\mathcal{H}_2)$ $\quad \psi'(z) = 0$,

то полином переменной t

(17)

$$\omega = \frac{\prod_{i=1}^{n}(u_i-z)}{\mu^n(u_1-z,\,u_2-z,\,\ldots,\,u_n-z)}(1-t^2)\big(z+\mu(u_1-z,\,u_2-z,\,\ldots,\,u_n-z)-t\big)^n$$

выполняет следующие условия:

$(\mathcal{T}_1)$ $\quad \omega(-1) = \omega(1) = 0$,

$(\mathcal{T}_2)$ $\quad$ *единственный корень полинома $\omega/(1-t^2)$ вещественен и лежит вне интервала $(-1,1)$,*

$(\mathcal{T}_3)$ $\quad \omega'(z) = 0$,

$(\mathcal{T}_4)$ $\quad \omega(z) = \psi(z)$,

$(\mathcal{T}_5)$ $\quad |\psi(t)| \leqslant |\omega(t)|$ *при* $t\epsilon\langle -1,1\rangle$.

Доказательство. Определим рекуррентно последовательность полиномов

$$(18) \qquad \psi = \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,$$

которые все имеют вид (16) и корни которых выполняют гипотезу $(\mathcal{H}_1)$. Так как в нижеследующих определениях полином ω_l получается из полинома ω_{l-1}, предшествующего ему в последовательности (18), путем итерирования операций, которые в лемме 2 вели от полинома ψ к полиному $\bar{\psi}$, то имеют место формулы

$$\left.\begin{array}{lll} (19) & \omega_l'(z) = 0, & \\ (20) & \omega_l(z) = \psi(z), & \\ (21) & |\psi(t)| \leqslant |\omega_l(t)| \quad \text{при} \quad t\epsilon\langle -1,1\rangle & \end{array}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Надо здесь вспомнить, что в лемме 2 полином $\bar{\psi}$ получился из ψ путем замены некоторых корней u и $\tilde{u}$ полинома $\psi/(1-t^2)$ „усредненным" двукратным корнем, равным $z+\mu(u-z,\,\tilde{u}-z)$, и такого нормирования, чтобы удовлетворить равенству $\bar{\psi}(z) = \psi(z)$. Следовательно, формулы (19), (20), (21) вытекают соответственно из условий $(\mathcal{T}_3)$, $(\mathcal{T}_4)$, $(\mathcal{T}_5)$ леммы 2 и из того, что полином $\bar{\psi}$, определенный формулой (12), удовлетворяет условиям леммы 2.

Полином ω_l будем обозначать символом

$$(22) \qquad \omega_l = \begin{bmatrix} u_{l1} & u_{l2} & \ldots & u_{lm_l} \\ p_{l1} & p_{l2} & \ldots & p_{lm_l} \end{bmatrix},$$

где расположенные по порядку числа $u_{l1}, u_{l2}, \ldots, u_{lm_l}$ являются всеми различными корнями полинома $\omega_l/(1-t^2)$, с кратностями, равными соответственно $p_{l1}, p_{l2}, \ldots, p_{lm_l}$. Мы будем также писать

$$\mu_z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z+\mu(x_1-z,\, x_2-z,\, \ldots,\, x_n-z).$$

О полиноме

$$(23) \qquad \psi = \omega_0 = \begin{bmatrix} u_{01} & u_{02} & \ldots & u_{0m_0} \\ p_{01} & p_{02} & \ldots & p_{0m_0} \end{bmatrix}$$

можем предположить, что $m_0 > 1$, т. е., что среди чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n$ находятся по меньшей мере два различные, ибо в противоположном случае лемма тривиально выполняется (и $\omega = \psi$). Предположим вначале, что существует такое i, что $p_{0i} > 2$, $p_{0,i+1} \leqslant 2, \ldots, p_{0m_0} \leqslant 2$. Тогда мы принимаем

$$(24) \quad \omega_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} u_{01} & \mu_z(u_{01}, u_{02}) & u_{02} & \ldots & u_{0m_0} \\ p_{01}-1 & 2 & p_{02}-1 & \ldots & p_{0m_0} \end{bmatrix} & \text{при} \quad i = 1, \\ \begin{bmatrix} u_{01} \ldots & u_{0,i-1} & \mu_z(u_{0,i-1}, u_{0i}) & u_{0i} & \ldots u_{0m_0} \\ p_{01} \ldots & p_{0,i-1}-1 & 2 & p_{0i}-1 & \ldots p_{0m_0} \end{bmatrix} & \text{при} \quad i > 1. \end{cases}$$

Пропуская те столбцы таблицы, в которых нижнее число (кратность корня) равно нулю, мы получаем полином (22) при $l = 1$. При помощи формул, аналогичных (24), определяем следующие полиномы и после конечного числа шагов достигаем полинома

(25)
$$\omega_j = \begin{bmatrix} u_{j1} & u_{j2} & \dots & u_{jm_j} \\ p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{jm_j} \end{bmatrix}$$

такого, что $p_{j1} \leqslant 2$, $p_{j2} \leqslant 2, \ldots, p_{jm_j} \leqslant 2$. Действительно, любой следующий полином $\omega_l/(1-t^2)$ имеет менее корней с кратностью, превышающей 2, чем предыдущий, или сниженную кратность одного из таких корней по сравнению с предыдущей. Если полином (23) таков, что $p_{0i} \leqslant 2$ при $i = 1, 2, \ldots, m_0$, то $j = 0$.

Предположим, что в формуле (25) существует такое $i > 1$, что $p_{ji} = 1$. Для максимального значения индекса i, выполняющего это условие, мы принимаем

$$\omega_{j+1} = \begin{bmatrix} u_{j1} & \dots & u_{j,i-1} & \mu_z(u_{j,i-1}, u_{ji}) & u_{j,i+1} & \dots & u_{jm_j} \\ p_{j1} & \dots & p_{j,i-1}-1 & 2 & p_{j,i+1} & \dots & p_{jm_j} \end{bmatrix}.$$

Полином ω_{j+1} имеет больше двукратных корней, превышающих наибольший простой корень, чем полином ω_j. Поэтому, определяя аналогичным образом полиномы $\omega_{j+2}, \ldots$, мы получаем после конечного числа шагов: при четном n полином

(26)
$$\omega_k = \begin{bmatrix} u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{km} \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

где $m = n/2$, а при нечетном n — полином

(27)
$$\omega_k = \begin{bmatrix} u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{km} \\ 1 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

где $m = (n+1)/2$. Если полиномом (25) выполнялись условия $p_{j1} = p_{j2} = \ldots = p_{jm_j} = 2$ (при четном n) или $p_{j1} = 1$, $p_{j2} = \ldots = p_{jm_j} = 2$ (при нечетном n), то $k = j$.

Рассмотрим вначале случай (26) (когда n четно). Образуем следующую систему полиномов:

$$\omega_k = \begin{bmatrix} u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{km} \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_{k1} & \mu_z(u_{k1}, u_{k2}) & u_{k2} & \dots & u_{km} \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_{k1} & \mu_z(u_{k1}, u_{k2}) & \mu_z(u_{k2}, u_{k3}) & \dots & u_{km} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

. . . .

$$\begin{bmatrix} u_{k1} & \mu_z(u_{k1}, u_{k2}) & \mu_z(u_{k2}, u_{k3}) & \dots & \mu_z(u_{k,m-1}, u_{km}) & u_{km} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mu_z(u_{k1}, \mu_z(u_{k1}, u_{k2})) & \mu_z(u_{k1}, u_{k2}) & \mu_z(u_{k2}, u_{k3}) & \dots & \mu_z(u_{k,m-1}, u_{km}) & u_{km} \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mu_z(u_{k1}, \mu_z(u_{k1}, u_{k2})) & \mu_z(\mu_z(u_{k1}, u_{k2}), \mu_z(u_{k2}, u_{k3})) & \mu_z(u_{k2}, u_{k3}) & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dots & \mu_z(u_{k,m-1}, u_{km}) & u_{km} \\ \dots & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

. . . .

$$\omega_{k+1} = \begin{bmatrix} \mu_z(u_{k1}, \mu_z(u_{k1}, u_{k2})) & \mu_z(\mu_z(u_{k1}, u_{k2}), \mu_z(u_{k2}, u_{k3})) & \dots \\ 2 & 2 & \dots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dots & \mu_z(\mu_z(u_{k,m-2}, u_{k,m-1}), \mu_z(u_{k,m-1}, u_{km})) & \mu_z(\mu_z(u_{k,m-1}, u_{km}), u_{km}) \\ \dots & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Из определения среднего μ_z следует, что

$$\mu_z(\mu_z(u, v), \mu_z(v, w)) = z + 2\left[(\mu_z(u, v)-z)^{-1} + (\mu_z(v, w)-z)^{-1}\right]^{-1} =$$
$$= z + 2\left[\frac{(u-z)^{-1}+(v-z)^{-1}}{2} + \frac{(v-z)^{-1}+(w-z)^{-1}}{2}\right]^{-1} = \mu_z(u, v, v, w),$$

а в частности при $v = w$ имеем $\mu_z(\mu_z(u, v), v) = \mu_z(u, v, v, v)$. Поэтому последний полином образованной нами системы можно записать в виде

$$\omega_{k+1} = \begin{bmatrix} \mu_z(u_{k1}, u_{k1}, u_{k1}, u_{k2}) & \mu_z(u_{k1}, u_{k2}, u_{k2}, u_{k3}) & \dots \\ 2 & 2 & \dots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dots & \mu_z(u_{k,m-2}, u_{k,m-1}, u_{k,m-1}, u_{km}) & \mu_z(u_{k,m-1}, u_{km}, u_{km}, u_{km}) \\ \dots & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следующие полиномы (22) мы определяем при помощи аналогичных формул:

(28) $$m_{l+1} = m = n/2, \quad p_{l+1,1} = p_{l+1,2} = \ldots = p_{l+1,m} = 2,$$

(29) $$u_{l+1,1} = \mu_z(u_{l1}, u_{l1}, u_{l1}, u_{l2}),$$

(30) $$u_{l+1,i} = \mu_z(u_{l,i-1}, u_{li}, u_{li}, u_{l,i+1}) \quad (i = 2, \ldots, m-1),$$

(31) $$u_{l+1,m} = \mu_z(u_{l,m-1}, u_{lm}, u_{lm}, u_{lm}).$$

Так как $u_{l1} < u_{l2} < \ldots < u_{lm}$, то в силу формул (29) последовательность $\{u_{l1}\}$ — неубывающая и ограничена сверху числом u_{km}, а в силу (31) последовательность $\{u_{lm}\}$ — невозрастающая и ограничена снизу числом u_{k1}. Следовательно, эти последовательности сходятся. Пользуясь формулами (29)-(31) мы доказываем по очереди, что сходятся также последовательности $\{u_{l2}\}$, $\{u_{l,m-1}\}$, ... Поэтому можем положить $u_{\infty i} = \lim\limits_{l\to\infty} u_{li}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$.

Из (29)-(31) вытекает, что

$$u_{\infty 1} = \mu_z(u_{\infty 1}, u_{\infty 1}, u_{\infty 1}, u_{\infty 2}),$$

$$u_{\infty i} = \mu_z(u_{\infty, i-1}, u_{\infty i}, u_{\infty i}, u_{\infty, i+1}) \quad (i = 2, \ldots, m-1),$$

$$u_{\infty m} = \mu_z(u_{\infty, m-1}, u_{\infty m}, u_{\infty m}, u_{\infty m})$$

и, в силу определения гармонического среднего, мы имеем

(32) $$u_{\infty 1} = u_{\infty 2} = \ldots = u_{\infty m} \underset{\mathrm{df}}{=} u_{\infty}.$$

То же самое получается в случае (27) (когда n нечетно) из формул, аналогичных формулам (28)-(31):

$$m_{l+1} = m = (n+1)/2, \quad p_{l+1,1} = 1, \quad p_{l+1,2} = \ldots = p_{l+1,m} = 2,$$

$$u_{l+1,1} = \mu_z(u_{l1}, u_{l2}),$$

$$u_{l+1,i} = \mu_z(u_{l,i-1}, u_{li}, u_{li}, u_{l,i+1}) \quad (i = 2, \ldots, m-1),$$

$$u_{l+1,m} = \mu_z(u_{l,m-1}, u_{lm}, u_{lm}, u_{lm}).$$

Из формул (19), (20), (32) следует, что существует полином

(33) $$\omega = \lim_{l\to\infty} \omega_l = \begin{bmatrix} u_\infty \\ n \end{bmatrix}' = a(1-t^2)(u_\infty - t)^n,$$

где константа a определяется равенством $\omega(z) = \psi(z)$.

Докажем теперь, что $u_\infty = z + \mu(u_1 - z, u_2 - z, \ldots, u_n - z)$, откуда получится формула (17). Прежде всего заметим, что $z \neq 0$. Действительно,

(34) $$\psi'(t) = -2t \prod_{i=1}^{n} (u_i - t) - (1-t^2) \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (u_i - t)$$

и $\psi'(0) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} u_i \neq 0$, значит, в связи с гипотезой $(\mathcal{H}_1)$, мы имеем $z \neq 0$. Принимая в формуле (34) $t = z$, мы получим на основании $(\mathcal{H}_2)$, что

$$-2z \prod_{i=1}^{n} (u_i - z) - (1-z^2) \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (u_i - z) = 0,$$

откуда

$$-\frac{1-z^2}{2z} = \Big(\prod_{i=1}^{n} (u_i - z)\Big) : \Big(\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (u_i - z)\Big) = \frac{1}{n} \mu(u_1 - z, u_2 - z, \ldots, u_n - z).$$

Имеем также в силу (19) и в силу предельного перехода (33)

$$\omega'(z)/a = -2z(u_\infty - z)^n - n(1-z^2)(u_\infty - z)^{n-1} = 0,$$

следовательно $u_\infty - z = -n(1-z^2)/2z = \mu(u_1 - z, u_2 - z, \ldots, u_n - z)$, что и надо было доказать. Условия $(\mathcal{T}_1)$, $(\mathcal{T}_2)$, $(\mathcal{T}_4)$ вытекают прямо из (17), а условие $(\mathcal{T}_5)$ из неравенства (21) и предельного перехода (33).

При обозначениях леммы 3 имеем $\|\psi\|_{\langle -1,1\rangle} = \psi(z) = \omega(z) = \|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}$ и (подобно тому, как было в лемме 1) при всех $0 \leqslant h \leqslant 1$ выполняется неравенство

(35) $$\Big| \underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E} \{|\psi(t)| \geqslant h \|\psi\|_{\langle -1,1\rangle}\} \Big| \leqslant \Big| \underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E} \{|\omega(t)| \geqslant h \|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}\} \Big|.$$

Лемма 4. *Если*

(36) $$\omega = (1-t^2)(u-t)^n,$$

где $|u| \geqslant 1$, *а* n *— любое положительное число, то для всех* $0 \leqslant h \leqslant 1$ *выполняется неравенство*

(37) $$\Big| \underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E} \{|\omega(t)| \geqslant h \|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}\} \Big| \leqslant 2\sqrt{1-h}.$$

Доказательство проведем в случае $u \geqslant 1$.

Число $z \in (-1, 1)$ определим равенством $\omega'(z) = 0$. Формулу (36), написанную в виде $\log\omega = \log(1-t^2) + n\log(u-t)$, дифференцируем и принимаем $t = z$, откуда получается равенство

(38) $$-\frac{2z}{1-z^2} - \frac{n}{u-z} = 0,$$

из которого вытекает также, что

(39) $$-n - 2uz + (n+2)z^2 = 0,$$

(40) $$z = \frac{u - \sqrt{u^2 + n(n+2)}}{n+2} \leqslant 0.$$

Функция ω, все корни которой вещественны, возрастает в интервале $(-1, z)$ от 0 до $\|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}$, в точке z достигает максимума и в интервале $(z, 1)$ убывает до 0. Поэтому уравнение

$$(1-t^2)(u-t)^n = h\|\omega\|_{\langle -1,1\rangle} = h(1-z^2)(u-z)^n$$

имеет в интервале $(-1,1)$ при всех $0<h<1$ два различных корня:

(41) $$s_1 \epsilon (-1, z), \qquad s_2 \epsilon (z, 1)$$

и выполняется равенство

(42) $$\Big|\underset{t\epsilon\langle -1,1\rangle}{E}\{\omega(t) \geqslant h\|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}\}\Big| = s_2 - s_1 .$$

Пусть s — любое из чисел s_1, s_2. При фиксированном h равенство

$$(1-s^2)(u-s)^n = h(1-z^2)(u-z)^n$$

считаем тождеством относительно u, в котором s и z являются функциями u. Пишем это тождество в виде

$$\log(1-s^2)+n\log(u-s) = \log h+\log(1-z^2)+n\log(u-z)$$

и дифференцируем его по u, получая (с учетом (38)) равенство

$$-\frac{2ss'}{1-s^2}+n\frac{1-s'}{u-s} = -\frac{2zz'}{1-z^2}+n\frac{1-z'}{u-z} = \frac{n}{u-z}.$$

Оттуда можно вычислить, что

$$-\left(\frac{2s}{1-s^2}+\frac{n}{u-s}\right)s' = n\left(\frac{1}{u-z}-\frac{1}{u-s}\right),$$

(43) $$\frac{-n-2us+(n+2)s^2}{1-s^2}s' = n\frac{z-s}{u-z}.$$

На основании (39) мы имеем

$$-n-2us+(n+2)s^2 = -n-2us+(n+2)s^2+n+2uz-(n+2)z^2 =$$
$$= \big(2u-(n+2)(s+z)\big)(z-s)$$

и равенство (43) можно преобразовать к виду

(44) $$\frac{u-z}{n}s' = \frac{1-s^2}{2u-(n+2)(s+z)}.$$

Мы докажем, что при $n>0$ разность s_2-s_1, т. е. величина (42), возрастает вместе с параметром u, от которого она зависит. С этой целью надо доказать, что для любого $u \geqslant 1$ выполняется неравенство $s_1' < s_2'$, т. е., в силу (44), неравенство

(45) $$\pi(s_1) < \pi(s_2),$$

где $\pi(s) = \dfrac{1-s^2}{2u-(n+2)(s+z)}$.

В последней формуле n, u, z фиксированы и единственной переменной является s. При $-1<s<1$ числитель функции π положителен. Знаменатель этой функции равняется нулю при

(46) $$s = \frac{2u-(n+2)z}{n+2} = \frac{u+\sqrt{u^2+n(n+2)}}{n+2} \geqslant 1$$

(последнее неравенство вытекает из предположения $u \geqslant 1$) и положителен при $-1<s<1$. Число (46) равно 1 только при $u=1$. Тогда

$$z = -\frac{n}{n+2}, \qquad 2u-(n+2)(s+z) = (n+2)(1-s), \qquad \pi(s) = \frac{1}{n+2}\cdot(1+s),$$

функция π при $-1<s<1$ возрастает и удовлетворяет условию (45).

При $u>1$ функция π положительна в интервале $(-1,1)$, а ее производная по s,

$$\pi'(s) = \frac{-2s\big(2u-(n+2)(s+z)\big)+(1-s^2)(n+2)}{\big(2u-(n+2)(s+z)\big)^2},$$

положительна при $s=-1$ и $s=0$, а отрицательна при $s=1$. Так как числитель $\pi'(s)$ является полиномом второй степени и знаменатель положителен, то число $y \epsilon (-1,1)$ такое, что $\pi'(y)=0$, определяется однозначно и, кроме того, $y>0$.

В силу неравенства (40) и формул (41) возможны следующие два случаи:

Случай 1. $s_1<0$, $s_2 \leqslant 0$. Так как функция π возрастает в интервале $(-1,y)$, содержащим (на основании неравенства $y>0$) точки s_1 и s_2, то $\pi(s_1)<\pi(s_2)$ и удовлетворяется неравенство (45).

Случай 2. $s_1<0$, $s_2>0$. Выполняются соотношения

(47) $$\omega(s_1) = \omega(s_2), \qquad \omega(-s_2) = (1-s_2^2)(u+s_2)^n > (1-s_2^2)(u-s_2)^n = \omega(s_2).$$

Функция ω возрастает в интервале $(-1,z)$, следовательно, если $-s_2<z$, то из соотношений (41), (47) вытекает неравенство

(48) $$s_1 < -s_2 < 0.$$

То же неравенство выполняется при $-s_2 \geqslant z$, так как $s_1<z$.

Заметим далее, что при $0<s<1$

$$\frac{1-s^2}{2u-(n+2)(-s+z)} = \pi(-s) < \pi(s) = \frac{1-s^2}{2u-(n+2)(s+z)}.$$

Так как функция π возрастает в интервале $(-1,0) \subset (-1,y)$, то, в силу (48) и вышеприведенного неравенства, $\pi(s_1)<\pi(-s_2)<\pi(s_2)$ и выполняется соотношение (45).

Мы доказали, что при возрастании u величина (42) возрастает. Когда u стремится к бесконечности, значения функции

$$\frac{\omega}{\|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}} = \frac{(1-t^2)(u-t)^n}{(1-z^2)(u-z)^n}$$

стремятся в сегменте $\langle -1,1\rangle$ равномерно к значениям функции $1-t^2$. Действительно, из (40) следует, что $z\to 0$ и что равномерно

$$\frac{(1-t^2)(u-t)^n}{(1-z^2)(u-z)^n} \sim (1-t^2)\left(1-\frac{t}{u}\right)^n \to 1-t^2.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\Big|\underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{\omega(t)\geqslant h\|\omega\|_{\langle -1,1\rangle}\}\Big| \leqslant \Big|\underset{t\in\langle -1,1\rangle}{E}\{1-t^2\geqslant h\}\Big| = 2\sqrt{1-h}$$

(при $n=0$ просто равенство), которое надо было установить. В доказательстве мы пропустили только значения $h=0$ и $h=1$, при которых неравенство (37) выполняется тривиальным образом.

Неравенство (2), приведенное в начале этой работы, вытекает при $c=-1$ и $d=1$ непосредственно из неравенств (11), (35) и (37).

3. Доказательство неравенства (3). В этом § мы ограничимся случаем, в котором $c=0$, $d=1$, что не уменьшает общности рассуждений. Доказательство (3) опирается на четыре леммы.

Лемма 5. *Если полином χ и число $z\in(0,1)$ выполняют следующие условия:*

$(\mathcal{H}_1)$ $\chi(0)=\chi(1)=0$,

$(\mathcal{H}_2)$ *все корни полинома $\chi/t(1-t)$ вещественны и лежат вне интервала $(0,1)$; они существуют на обеих полупрямых $(-\infty,0\rangle$, $\langle 1,+\infty)$,*

$(\mathcal{H}_3)$ $\chi'(z)=0$,

то существует полином переменной t

$$\psi = \chi(z)\frac{t^{n_0}(1-t)^{n_1}(v_0-t)(v_1-t)}{z^{n_0}(1-z)^{n_1}(v_0-z)(v_1-z)} \tag{49}$$

такой, что

$(\mathcal{T}_1)$ $\deg\psi = n_0+n_1+2\leqslant\deg\chi$,

$(\mathcal{T}_2)$ $n_0>0$, $n_1>0$, $v_0\leqslant 0$, $v_1\geqslant 1$,

$(\mathcal{T}_3)$ $\psi'(z)=0$,

$(\mathcal{T}_4)$ $\psi(z)=\chi(z)$,

$(\mathcal{T}_5)$ $|\chi(t)|\geqslant|\psi(t)|$ *при* $t\in\langle 0,1\rangle$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются всеми корнями из полупрямой $\langle 1,+\infty)$ полинома $\chi/(1-t)$, то существует полином переменной t

$$\varphi = \frac{(1-t)^{n_1}(v_1-t)}{(1-z)^{n_1}(v_1-z)}\left(\frac{1-z}{1-t}\prod_{i=1}^{m}\frac{u_i-z}{u_i-t}\right)\chi \tag{50}$$

такой, что

1° $\deg\varphi\leqslant\deg\chi$ (т. е. $n_1\leqslant m$),
2° $n_1>0$, $v_1\geqslant 1$,
3° $\varphi'(z)=0$,
4° $\varphi(z)=\chi(z)$,
5° $|\chi(t)|\geqslant|\varphi(t)|$ при $t\in\langle 0,1\rangle$.

Действительно, тогда к полиному φ мы применим аналогичную теорему с заменой корней из полупрямой $\langle 1,+\infty)$ полинома $\chi/(1-t)$ корнями из полупрямой $(-\infty,0\rangle$ полинома φ/t и в итоге получим полином ψ вида (49), удовлетворяющий в силу 1°-5° условиям $(\mathcal{T}_1)$-$(\mathcal{T}_5)$.

Мы предполагаем, что $m\geqslant 2$ и что $1<u_1\leqslant u_2$ (при соответствующем упорядочении множества $u_1,u_2,\ldots,u_m$), так как если существует только один корень полинома $\chi/(1-t)$, превышающий 1, то полином (50) при v_1, равном этому корню, и при $n_1=m$ был бы равен χ, и выполнялись бы условия 1°-5°. Пусть $\chi=(u_1-t)(u_2-t)\varrho$; согласно значению чисел u_1 и u_2, ϱ — полином. Не уменьшая общности рассуждений можно еще предположить, что при $t\in(0,1)$ мы имеем $\varrho(t)>0$.

Так как $\chi' = -(u_1+u_2-2t)\varrho+(u_1-t)(u_2-t)\varrho'$, то из условия $(\mathcal{H}_3)$ следует, что

$$\frac{\varrho(z)}{\varrho'(z)} = \frac{(u_1-z)(u_2-z)}{u_1+u_2-2z} \tag{51}$$

(в силу предположения $1<u_1\leqslant u_2$ имеем $u_1+u_2-2z>0$). Обозначим число (51) через r и введем полином переменной t

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{(1-t)(u_{12}-t)}{(1-z)(u_{12}-z)}\cdot\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при} \quad r<1-z,\\[2ex] \dfrac{u_{12}-t}{u_{12}-z}\cdot\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при} \quad r\geqslant 1-z, \end{cases}$$

определяя число u_{12} посредством равенства

$$\sigma'(z)=0. \tag{52}$$

Это условие путем продифференцирования полинома σ ведет к равенству

$$(53)\qquad u_{12}-z=\begin{cases}\dfrac{r(1-z)}{1-z-r} & \text{при}\quad r<1-z,\\ r & \text{при}\quad r\geqslant 1-z.\end{cases}$$

Начнем с доказательства того, что

$$(54)\qquad u_{12}\geqslant 1.$$

При $r<1-z$ из формулы (53) вытекает, что

$$(55)\qquad u_{12}-1=u_{12}-z-(1-z)=(1-z)\left(\frac{r}{1-z-r}-1\right)=(1-z)\frac{2r-(1-z)}{1-z-r}.$$

Так как $2r$ является гармоническим средним чисел u_1-z и u_2-z, то в силу гипотезы $1<u_1\leqslant u_2$ имеем

$$(56)\qquad 2r\geqslant u_1-z>1-z,$$

и из (55) вытекает, что $u_{12}-1\geqslant 0$. При $r\geqslant 1-z$ имеем $u_{12}=r+z\geqslant 1$.

Непосредственно из определения полинома σ следует, что

$$(57)\qquad \sigma(z)=\chi(z).$$

Докажем еще, что (в предположении, что $\varrho(t)>0$) при $t\in\langle 0,1\rangle$ выполняется неравенство

$$(58)\qquad \chi(t)\geqslant\sigma(t)\geqslant 0.$$

Мы имеем

$$(59)\qquad \chi(z)=(u_1-z)(u_2-z)\varrho(z),\qquad \chi=\frac{(u_1-t)(u_2-t)}{(u_1-z)(u_2-z)}\cdot\frac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho.$$

Пусть

$$\delta=\chi-\sigma=\begin{cases}\left(\dfrac{(u_1-t)(u_2-t)}{(u_1-z)(u_2-z)}-\dfrac{(1-t)(u_{12}-t)}{(1-z)(u_{12}-z)}\right)\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при}\quad r<1-z,\\[2ex] \left(\dfrac{(u_1-t)(u_2-t)}{(u_1-z)(u_2-z)}-\dfrac{u_{12}-t}{u_{12}-z}\right)\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при}\quad r\geqslant 1-z.\end{cases}$$

Так как $\delta(z)=0$, $\chi'(z)=\sigma'(z)=\delta'(z)=0$, то z является двукратным корнем полинома δ. Из $(\mathcal{H}_2)$ и (59) вытекает, что z не является корнем полинома ϱ. Поэтому

$$\delta=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{(u_1-z)(u_2-z)}-\dfrac{1}{(1-z)(u_{12}-z)}\right)(z-t)^2\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при}\quad r<1-z,\\[2ex] \dfrac{1}{(u_1-z)(u_2-z)}(z-t)^2\dfrac{\chi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при}\quad r\geqslant 1-z.\end{cases}$$

Чтобы установить неравенство (58) мы докажем, что $\delta(t)\geqslant 0$ при $t\in\langle 0,1\rangle$. При $r\geqslant 1-z$ это очевидно, потому что $(u_1-z)(u_2-z)>0$ и $\varrho(t)>0$, $\chi(t)>0$. При $r<1-z$ имеем в силу (51) и первого из равенств (53)

$$\frac{1}{(u_1-z)(u_2-z)}-\frac{1}{(1-z)(u_{12}-z)}=\frac{u_1-z-r}{r(u_1-z)^2}-\frac{1-z-r}{r(1-z)^2}=$$
$$=\frac{(u_1-z)(1-z)^2-(u_1-z)^2(1-z)+r\big((u_1-z)^2-(1-z)^2\big)}{r(u_1-z)^2(1-z)^2}=$$
$$=\frac{(u_1-z)(u_1-1)(z-1)+r(u_1-1)(u_1+1-2z)}{r(u_1-z)^2(1-z)^2}.$$

Из первой части (56) следует, что число $(u_1-z)(u_1-1)\big(z-1+(u_1+1)/2-z\big)=(u_1-z)(u_1-1)^2/2>0$ не превышает числителя полученного выражения и неравенство (58) доказано.

В силу определения полинома σ и доказанного неравенства (54) имеем

$$(60)\qquad \deg\sigma\leqslant\deg\chi,$$

полином σ имеет только действительные корни, не имеет корней в интервале $(0,1)$, его корни, не превышающие 0, совпадают с корнями полинома χ и имеет меньше корней больших 1, чем этот полином. Поэтому можем итерировать описанный выше метод, ведущий от полинома χ к полиному σ, и после конечного числа шагов получим полином, который имеет не более одного корня, большего чем 1, и общие с полиномом χ корни, не превышающие 0. Следовательно, это полином вида (50); выполнение им условий 1°-5° вытекает соответственно из (60), (54), (52), (57) и (58).

Лемма 6. *Если полином $\psi=t^{n_0}(1-t)^{n_1}(v_0-t)(v_1-t)$ и число $z\in(0,1)$ выполняют следующие условия:*

$(\mathcal{H}_1)$ $\quad n_0>0,\ n_1>0,$

$(\mathcal{H}_2)$ $\quad v_0\leqslant 0,\ v_1\geqslant 1,$

$(\mathcal{H}_3)$ $\quad \psi'(z)=0,$

то существует полином ω одного из двух видов:

$$(61)\qquad \omega=\frac{(v_0-z)(v_1-z)}{(1-z)(v-z)}t^{n_0}(1-t)^{n_1+1}(v-t),\qquad \text{где}\quad v\leqslant 0,$$

$$(62)\qquad \omega=\frac{(v_0-z)(v_1-z)}{z(v-z)}t^{n_0+1}(1-t)^{n_1}(v-t),\qquad \text{где}\quad v\geqslant 1,$$

такой, что

($\mathcal{T}_1$) $\quad \omega'(z) = 0$,

($\mathcal{T}_2$) $\quad \omega(z) = \psi(z)$,

($\mathcal{T}_3$) $\quad |\psi(t)| \geqslant |\omega(t)|$ *при* $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Доказательство. Если примем $\varrho = t^{n_0}(1-t)^{n_1}$, то на основании ($\mathcal{H}_3$) получим

$$0 = -(v_0+v_1-2z)\,\varrho(z) + (v_0-z)(v_1-z)\,\varrho'(z).$$

Введем обозначения

$$s = \frac{\varrho'(z)}{\varrho(z)} = \frac{v_0+v_1-2z}{(v_0-z)(v_1-z)}, \tag{63}$$

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{(1-t)(v-t)}{(1-z)(v-z)}\cdot\dfrac{\psi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при} \quad s \geqslant \dfrac{2z-1}{z-z^2}, \quad (64)\\[2ex] \dfrac{t(v-t)}{z(v-z)}\cdot\dfrac{\psi(z)}{\varrho(z)}\varrho & \text{при} \quad s < \dfrac{2z-1}{z-z^2}, \quad (65)\end{cases}$$

где число v определяется условием ($\mathcal{T}_1$).

Из условия ($\mathcal{T}_1$) вытекает в случае (64) формула

$$s = \frac{1+v-2z}{(1-z)(v-z)}, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{s(z-z^2)+1-2z}{s(1-z)-1} \tag{66}$$

(как из ($\mathcal{H}_3$) вытекает формула (63)), а в случае (65) — формула

$$s = -\frac{v-2z}{z(v-z)}, \quad \text{откуда} \quad v-1 = -\frac{s(z-z^2)+1-2z}{sz+1}. \tag{67}$$

Случай (66) соответствует случаю (61) заключения а (67) — случаю (62) заключения, т. е. в (66) должно быть $v \leqslant 0$, а в (67) должно быть $v-1 \geqslant 0$.

Ограничимся доказательством того, что если $s \geqslant (2z-1)/(z-z^2)$, то $v \leqslant 0$. Из (63) и ($\mathcal{H}_2$) следует, что $s = \dfrac{1}{v_0-z} + \dfrac{1}{v_1-z} = \dfrac{1}{v_1-z} - \dfrac{1}{|v_0-z|} < \dfrac{1}{v_1-z} < \dfrac{1}{1-z}$ или $s(1-z)-1 < 0$, так что знаменатель v всегда отрицателен. Числитель v неотрицателен на основании предположения случая (64).

Итак, мы доказали, что существует полином ω вида (61) или (62), удовлетворяющий соответственно неравенству $v \leqslant 0$ или $v \geqslant 1$ и условиям ($\mathcal{T}_1$) и ($\mathcal{T}_2$); второе условие вытекает прямо из определений (64), (65).

Доказывая условие ($\mathcal{T}_3$) в случае (64) надо обратить внимание на то, что

$$\psi(z) = (v_0-z)(v_1-z)\,\varrho(z), \quad \text{откуда} \quad \psi = \frac{(v_0-t)(v_1-t)}{(v_0-z)(v_1-z)}\cdot\frac{\psi(z)}{\varrho(z)}\varrho.$$

Следовательно,

$$\omega-\psi = \left(\frac{(1-t)(v-t)}{(1-z)(v-z)} - \frac{(v_0-t)(v_1-t)}{(v_0-z)(v_1-z)}\right)\frac{\psi(z)}{\varrho(z)}\varrho.$$

Так как в интервале $(0, 1)$ полином ϱ имеет положительные значения, а полиномы ψ и ω имеют отрицательные значения (в силу ($\mathcal{H}_2$) и (64)), то надо доказать, что полином $\omega-\psi$ имеет в этом интервале неотрицательные значения. Как в предыдущей лемме, замечаем, что

$$\omega-\psi = \left(\frac{1}{(1-z)(v-z)} - \frac{1}{(v_0-z)(v_1-z)}\right)(z-t)^2\frac{\psi(z)}{\varrho(z)}\varrho;$$

таким образом, надо доказать, что

$$\frac{1}{(1-z)(v-z)} - \frac{1}{(v_0-z)(v_1-z)} < 0.$$

Из (63) и (66) вытекает, что оцениваемое число равняется

$$\frac{s(1-z)-1}{(1-z)^2} - \frac{s(v_1-z)-1}{(v_1-z)^2} = \frac{s\big((1-z)(v_1-z)^2-(1-z)^2(v_1-z)\big)+(1-z)^2-(v_1-z)^2}{(1-z)^2(v_1-z)^2} =$$
$$= \frac{v_1-1}{(1-z)^2(v_1-z)^2}\big(s(1-z)(v_1-z)-(1+v_1-2z)\big).$$

Первый сомножитель полученного произведения неотрицателен, а второй мы оцениваем при помощи доказанного раньше неравенства $s(1-z)-1 < 0$ следующим образом: $s(1-z)(v_1-z)-(1+v_1-2z) \leqslant v_1-z-(1+v_1-2z) = z-1 < 0$, что заканчивает доказательство леммы 6.

Лемма 7. *Если полином* $\omega = t^{n_0+1}(1-t)^{n_1}(v-t)$ *и число* $z \in (0, 1)$ *выполняют следующие условия:*

($\mathcal{H}_1$) $\quad n_0 \geqslant 0,\ n_1 \geqslant 1$,

($\mathcal{H}_2$) $\quad v \geqslant 1$,

($\mathcal{H}_3$) $\quad \omega'(z) = 0$,

то функция переменной t, *равная* $\zeta = \omega(z)\dfrac{t^{m_0}(1-t)^{m_1}}{z^{m_0}(1-z)^{m_1}}$, *где*

$$m_0 = (n_0+1)x, \quad m_1 = \left(n_1 + \frac{1-z}{v-z}\right)x, \quad x \geqslant 1, \tag{68}$$

такова, что

$(\mathcal{T}_1)$ $\quad \zeta'(z) = 0,$

$(\mathcal{T}_2)$ $\quad \zeta(z) = \omega(z),$

$(\mathcal{T}_3)$ $\quad |\omega(t)| \geqslant |\zeta(t)|$ *при* $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Доказательство. Обозначая $\varrho = t^{n_0+1}(1-t)^{n_1}$, имеем $\omega = (v-t)\varrho$ откуда $\varrho(z) = (v-z)\varrho'(z)$. Вычисляем, что

$$\zeta = \frac{\omega(z)}{\varrho(z)z^{m_0-n_0-1}(1-z)^{m_1-n_1}}\, t^{m_0-n_0-1}(1-t)^{m_1-n_1}\varrho, \tag{69}$$

а в силу предыдущего равенства

$$\begin{aligned}\big(t^{m_0-n_0-1}(1-t)^{m_1-n_1}\varrho\big)'_{t=z} &= (m_0-n_0-1)z^{m_0-n_0-2}(1-z)^{m_1-n_1}\varrho(z) - \\ &\quad -(m_1-n_1)z^{m_0-n_0-1}(1-z)^{m_1-n_1-1}\varrho(z) + z^{m_0-n_0-1}(1-z)^{m_1-n_1}\varrho'(z) = \\ &= z^{m_0-n_0-2}(1-z)^{m_1-n_1-1}\varrho'(z)\big((m_0-n_0-1)(1-z)(v-z) - \\ &\quad -(m_1-n_1)z(v-z)+z(1-z)\big) = \\ &= z^{m_0-n_0-2}(1-z)^{m_1-n_1-1}\varrho'(z)\big\{\big(m_0(1-z)-m_1z\big)(v-z) - \\ &\quad -\big((n_0+1)(1-z)(v-z)-n_1z(v-z)-z(1-z)\big)\big\}.\end{aligned}$$

Из определений (68) следует, что

$$m_0(1-z)-m_1z = \frac{(n_0+1)(1-z)(v-z)-n_1z(v-z)-z(1-z)}{v-z}\,x,$$

а из определения числа z получается

$$0 = \omega'(z) = z^{n_0}(1-z)^{n_1-1}\big((n_0+1)(1-z)(v-z)-n_1z(v-z)-z(1-z)\big). \tag{70}$$

Поэтому $\big(t^{m_0-n_0-1}(1-t)^{m_1-n_1}\varrho\big)'_{t=z} = 0$ и выполняется условие $(\mathcal{T}_1)$. Условие $(\mathcal{T}_2)$ вытекает прямо из определения функции ζ.

После этого вычисляем, что $\omega = \dfrac{v-t}{v-z}\cdot\dfrac{\omega(z)}{\varrho(z)}\varrho$, следовательно, в силу (69) имеем

$$\omega-\zeta = \left(\frac{v-t}{v-z} - \left(\frac{t}{z}\right)^{m_0-n_0-1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{m_1-n_1}\right)\frac{\omega(z)}{\varrho(z)}\varrho.$$

Так как в интервале $(0, 1)$ функции ω, ζ, ϱ имеют положительные значения, то $(\mathcal{T}_3)$ будет установлено, если докажем, что при $t \in \langle 0, 1\rangle$ выполняется неравенство

$$\frac{v-t}{v-z} - \left(\frac{t}{z}\right)^{m_0-n_0-1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{m_1-n_1} \geqslant 0.$$

На основании (68) можно это неравенство написать в виде

$$\begin{aligned}\frac{v-t}{v-z} &\geqslant \left(\left(\frac{t}{z}\right)^{n_0+1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{n_1}\right)^{x-1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{\frac{1-z}{v-z}x} = \\ &= \left(\left(\frac{t}{z}\right)^{n_0+1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{n_1+\frac{1-z}{v-z}}\right)^{x-1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{\frac{1-z}{v-z}}.\end{aligned} \tag{71}$$

Легко проверить, что при обозначении $\xi(v) = \left(\dfrac{v-t}{v-z}\right)^{v-z}$ имеем

$$\xi'(v) = \left(\frac{v-z}{v-t} - \log\frac{v-z}{v-t} - 1\right)\left(\frac{v-t}{v-z}\right)^{v-z} \geqslant 0$$

и так как, в силу предположения, $v \geqslant 1$, то

$$\left(\frac{v-t}{v-z}\right)^{v-z} \geqslant \left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{1-z}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{v-t}{v-z} \geqslant \left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{\frac{1-z}{v-z}}.$$

Поэтому на основании неравенства $x \geqslant 1$ мы можем утверждать, что для проверки (71) достаточно будет доказать, что

$$\left(\frac{t}{z}\right)^{n_0+1}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{n_1+\frac{1-z}{v-z}} \leqslant 1.$$

Из равенства (70) вытекает, что $n_1 + \dfrac{1-z}{v-z} = (n_0+1)\dfrac{1-z}{z}$, и последнее неравенство равносильно следующим:

$$\frac{t}{z}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{\frac{1-z}{z}} \leqslant 1, \quad t^z(1-t)^{1-z} \leqslant z^z(1-z)^{1-z},$$

которые выполняются, ибо функция $t^z(1-t)^{1-z}$ достигает максимума при $t = z$.

Итак, лемма 7 доказана полностью.

Если в лемме 7 заменим полином ω полиномом $\omega^* = t^{n_0}(1-t)^{n_1+1}\times(v-t)$, где $n_0 \geqslant 1$, $n_1 \geqslant 0$, $v \leqslant 0$, то получим аналогичный результат с функцией ζ, определенной посредством той же самой формулы, что и раньше, причем

$$m_0 = \left(n_0 + \frac{z}{z-v}\right)x, \quad m_1 = (n_1+1)x, \quad x \geqslant 1. \tag{72}$$

Из лемм 5-7 вытекает, что для любого полинома χ n-й степени, который удовлетворяет условиям леммы 5, можно построить такие полиномы ψ (вида (49)) и ω (отличающийся от (61) или (62) постоянным множителем), а также такую функцию переменной t

$$\zeta = \chi(z)\frac{t^{m_0}(1-t)^{m_1}}{z^{m_0}(1-z)^{m_1}}, \tag{73}$$

что имеют место соотношения

$$\begin{array}{ll} \chi'(z) = \psi'(z) = \omega'(z) = \zeta'(z) = 0 & ((\mathcal{T}_3) \text{ леммы 5, } (\mathcal{T}_1) \text{ лемм 6 и 7}),\\ \chi(z) = \psi(z) = \omega(z) = \zeta(z) & ((\mathcal{T}_4) \text{ леммы 5, } (\mathcal{T}_2) \text{ лемм 6 и 7}),\\ |\chi(t)| \geqslant |\psi(t)| \geqslant |\omega(t)| \geqslant |\zeta(t)| & \text{при } t\in\langle 0,1\rangle \\ & ((\mathcal{T}_5) \text{ леммы 5, } (\mathcal{T}_3) \text{ лемм 6 и 7}). \end{array} \tag{74}$$

В том частном случае, когда вторая часть $(\mathcal{H}_2)$ леммы 5 неверна, полином ω конструируется непосредственно для полинома χ, т. е. не проходя через ψ, методом, описанным в лемме 5. Так как это не вызывает никаких существенных изменений по сравнению с общим случаем, далее ограничимся рассмотрением последнего.

Кроме соотношений (74), из леммы 7 следует, что

$$m_0 \geqslant 1, \quad m_1 \geqslant 1, \tag{75}$$

а из лемм 5-7, что

$$n = \deg\chi \geqslant \deg\psi = n_0+n_1+2 = \deg\omega \geqslant \begin{cases} n_0+n_1+1+\dfrac{1-z}{v-z} \text{ в случае (68)},\\[2mm] n_0+n_1+1+\dfrac{z}{z-v} \text{ в случае (72)}.\end{cases}$$

Таким образом, из определений (68) или (72) вытекает, что возможен такой выбор x, чтобы было

$$m_0+m_1 = n. \tag{76}$$

На основании соотношений (74) можем сформулировать следующее

Следствие 1. *Если полином χ n-й степени таков, что* 1° $\chi(0) = \chi(1) = 0$, 2° *все его корни действительны и лежат вне интервала* $(0,1)$, *то существует функция вида* (73), *которой выполняются условия* (75), (76) *и которая для всех* $h\in\langle 0,1\rangle$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Big|\underset{t\in\langle 0,1\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\,\|\chi\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big| \geqslant \Big|\underset{t\in\langle 0,1\rangle}{E}\{|\zeta(t)| \geqslant h\,\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big|. \tag{77}$$

Чтобы получить оценку (3), доказываемую в этом §, мы теперь изучим свойства правой части вышеприведенного неравенства.

Лемма 8. *Если $\zeta = t^{n-p}(1-t)^p$, то для всех $h\in(0,1)$ величина*

$$\Big|\underset{t\in\langle 0,1\rangle}{E}\{\zeta(t) \geqslant h\,\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big| \tag{78}$$

является при $0<p<n/2$ возрастающей функцией параметра p, а при $n/2<p<n$ убывающей функцией p.

Доказательство. Мы ограничимся установлением первой части леммы; вторая вытекает из первой путем замены переменных $\bar t = 1-t$, не изменяющей меры (78).

Из определения функции ζ следует, что она возрастает в сегменте $\langle 0,z\rangle$ и убывает в сегменте $\langle z,1\rangle$, где $z = 1-p/n$ является корнем функции ζ'. Следовательно, мы имеем $\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle} = \zeta(z) = z^{n-p}(1-z)^p$.

Уравнение $t^{n-p}(1-t)^p = h\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle} = hz^{n-p}(1-z)^p$ имеет при всех $0<h<1$ два различных корня $s_1\in(0,z)$, $s_2\in(z,1)$, принадлежащих к интервалу $(0,1)$. При $t\in(s_1,s_2)$ имеем $\zeta(t) > h\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle}$, при остальных $t\in\langle 0,1\rangle$ выполняется противоположное неравенство, значит,

$$\Big|\underset{t\in\langle 0,1\rangle}{E}\{\zeta(t) \geqslant h\,\|\zeta\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big| = s_2-s_1.$$

Пусть s — любое из чисел s_1, s_2. При фиксированном h соотношение

$$s^{n-p}(1-s)^p = hz^{n-p}(1-z)^p \tag{79}$$

мы считаем тождеством относительно p, в котором s и z являются функциями p. Мы пишем его в виде

$$(n-p)\log s+p\log(1-s) = \log h+(n-p)\log z+p\log(1-z) \tag{80}$$

и дифференцируем по p:

$$\log\frac{1-s}{s}+\left(\frac{n-p}{s}-\frac{p}{1-s}\right)s' = \log\frac{1-z}{z}+\left(\frac{n-p}{z}-\frac{p}{1-z}\right)z'. \tag{81}$$

Так как $z = 1-p/n$, то $(n-p)/z-p/(1-z) = 0$ и $p = n(1-z)$, следовательно,

$$(n-p)(1-s)-ps = nz(1-s)-n(1-z)s = n(z-s), \tag{82}$$

и из (81) вытекает, что

$$\pi(s) \underset{\mathrm{df}}{=} ns' = \frac{s-s^2}{z-s}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{s}{1-s}\right).$$

При таком определении функции π надо — как и в доказательстве леммы 4 — установить неравенство

$$\pi(s_1) < \pi(s_2), \tag{83}$$

т. е. установить, что разность s_2-s_1 возрастает вместе с p.

I. Исследуем вначале функцию π. Она неопределена для $s=0$, $s=z$ и $s=1$. Однако при $a\to 0$ мы имеем

$$\pi(a)=\frac{a-a^2}{z-a}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{a}{1-a}\right)\sim\frac{a}{z}\log a\to 0\,.$$

$$\pi(z+a)\sim-\frac{z-z^2}{a}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{z+a}{1-z-a}\right)=$$

$$=-\frac{z-z^2}{a}\left(\log\left(1+\frac{a}{z}\right)-\log\left(1-\frac{a}{1-z}\right)\right)\sim-1,$$

$$\pi(1-a)=\frac{a-a^2}{z-1+a}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{1-a}{a}\right)\sim\frac{a}{1-z}\log a\to 0;$$

таким образом, можно расширить определение функции π на точки 0, z, 1 при помощи равенств $\pi(0)=\pi(1)=0$, $\pi(z)=-1$, сохраняя ее непрерывность.

В интервале $(0,1)$ функция π отрицательна, так как $\pi(z)<0$ и сомножители произведения, образующего ее, изменяют (одновременно) знак только в точке $s=z$. Далее, мы вычисляем значения

$$\pi'(s)=\frac{s^2-2zs+z}{(z-s)^2}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{s}{1-s}\right)+\frac{1}{z-s},$$

$$\pi''(s)=\frac{2(z-z^2)}{(z-s)^3}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{s}{1-s}\right)+\frac{s+z-2zs}{(z-s)^2(s-s^2)}=$$

$$=\frac{2(z-z^2)}{(z-s)^3}\left(\log x+\frac{1-x^2}{2x}\right),$$

где $x=(1-z)s/z(1-s)$. Когда s возрастает от 0 до 1, x возрастает от 0 до $+\infty$; в частности, при $s=z$ мы имеем $x=1$. Так как 1 является трехкратным и в то же время единственным корнем функции $\log x+(1-x^2)/2x$, то $\pi''(s)$ имеет постоянный знак в интервале $(0,1)$ и функция π обладает в этом интервале только одним минимумом. Так как $z>\frac{1}{2}$ при $0<p<n/2$, так как

$$(84)\qquad \pi'(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{(2z-1)^2}\log\frac{1-z}{z}+\frac{2}{2z-1}=$$

$$=\frac{1}{(2z-1)^2}\log\frac{1-(2z-1)}{1+(2z-1)}+\frac{2}{2z-1}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2z-1)^{2k-1}}{2k+1}<0,$$

и так как при $a\to 0$ выполняется соотношение

$$\pi'(z+a)\sim\frac{z-z^2}{a^2}\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{z+a}{1-z-a}\right)-\frac{1}{a}\sim$$

$$\sim\frac{z-z^2}{a^2}\left(\frac{a}{z-z^2}+\frac{(2z-1)a^2}{2(z-z^2)^2}\right)-\frac{1}{a}=\frac{2z-1}{2(z-z^2)}>0,$$

т. е. $\pi'(z)>0$, то точка y такая, что $\pi'(y)=0$, принадлежит к интервалу $(\frac{1}{2},z)$. Функция π убывает в интервале $(0,y)$ (а тем более в интервале $(0,\frac{1}{2})$) и возрастает в интервале $(y,1)$ (а тем более в интервале $(z,1)$).

В силу определения точек s_1,s_2 возможны два случая: $s_1\epsilon(\frac{1}{2},z)$, $s_2>y$ и $s_1\epsilon(0,\frac{1}{2}\rangle$, $s_2>y$. В первом из них мы имеем $\pi(s_1)\leqslant\max\limits_{s\epsilon\langle 1/2,z\rangle}\pi(s)$. Так как функция π убывает в интервале $\langle\frac{1}{2},y)$ и возрастает в интервале $(y,z\rangle$, то она может достигнуть максимума только в концах сегмента $\langle\frac{1}{2},z\rangle$. Но

$$\pi(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2(2z-1)}\log\frac{1-z}{z}<-1=\pi(z),$$

ибо это неравенство получается из неравенства (84) путем его умножения на $(2z-1)/2$. Итак, мы имеем $\pi(s_1)\leqslant\pi(z)<\pi(s_2)$, т. е. выполняется неравенство (83). Надо еще доказать его при $0<s_1\leqslant\frac{1}{2}$, что теперь и сделаем (в отрывках II-IV).

II. Начнем с установления равенства

$$(85)\qquad \min_{0\leqslant h\leqslant 1}\frac{s_1}{1-s_2}=\frac{z}{1-z}.$$

При $s=s_1$ или $s=s_2$ соотношения (79) и (80) мы теперь считаем тождествами относительно h, в которых s есть функция h, а p, n, z константы. Дифференцируя второе из них по h мы получаем

$$\left(\frac{n-p}{s}-\frac{p}{1-s}\right)s'=\frac{1}{h},$$

что после использования соотношения (82) дает равенство $s'=(s-s^2)/hn(z-s)$. Исследуя функцию $\delta=s_1/(1-s_2)$ переменной h мы вычисляем при помощи последнего равенства

$$\delta'=\frac{s_1'(1-s_2)+s_1s_2'}{(1-s_2)^2}=\frac{1}{hn(1-s_2)^2}\left(\frac{(s_1-s_1^2)(1-s_2)}{z-s_1}+\frac{s_1(s_2-s_2^2)}{z-s_2}\right)=$$

$$=\frac{s_1(1-s_2)}{hn(1-s_2)^2(z-s_1)(z-s_2)}\left(z-s_2-(s_1-s_2)z\right).$$

Следовательно, функция δ может достигать минимума только при $h=0$, т. е. при $s_1=0$, $s_2=1$, а также тогда, когда

$$(86)\qquad z-s_2-(s_1-s_2)z=0, \quad \text{т. е.} \quad s_1=(z-s_2+s_2z)/z.$$

Но при $h\to 0$ имеем $s_1^{n-p}\sim hz^{n-p}(1-z)^p \underset{\mathrm{df}}{=} \bar{h}$, $(1-s_2)^p\sim \bar{h}$, $\delta\sim \bar{h}^{(n-p)^{-1}-p^{-1}}$. Так как $p<n/2$, то $(n-p)^{-1}-p^{-1}<0$ и $\lim\limits_{h\to 0}\delta(h)=\infty$. В то же время равенство (86) выполняется в частности при $h=1$, т. е. при $s_1=s_2=z$; в этом случае $\delta(1)=z/(1-z)$. При любом другом значении h, удовлетворяющем равенству (86) (если вообще такое значение существует) мы имеем

$$\delta(h)=\frac{s_1}{1-s_2}=\frac{z-s_2+s_2z}{z(1-s_2)}>\frac{z}{1-z},$$

так как

$$(z-s_2+s_2z)(1-z)-z^2(1-s_2)=(2z-1)(s_2-z)>0.$$

Из доказанного этим способом равенства (85) вытекает, что

$$(87)\qquad s_1\geqslant\frac{z(1-s_2)}{1-z}.$$

III. Мы докажем, что при $s\in(z,1)$ выполняется неравенство

$$(88)\qquad \pi\left(\frac{z(1-s)}{1-z}\right)<\pi(s).$$

Если $s^*=\dfrac{z(1-s)}{1-z}$, то $1-s^*=\dfrac{1-2z+zs}{1-z}$, $z-s^*=\dfrac{z(s-z)}{1-z}$, следовательно,

$$\pi(s^*)=\frac{(1-s)(1-2z+zs)}{(1-z)(s-z)}\log\frac{(1-z)(1-s)}{1-2z+zs}.$$

Неравенство $\pi(s^*)<\pi(s)$ равносильно неравенству

$$\lambda(s)\underset{\mathrm{df}}{=}(1-2z+zs)\log\frac{(1-z)(1-s)}{1-2z+zs}+s(1-z)\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{s}{1-s}\right)<0.$$

Так как $\lambda(z)=0$, то достаточно будет установить, что $\lambda'(s)<0$ при $s\in(z,1)$. Вычисляется, что

$$\lambda'(s)=z\log\frac{(1-z)(1-s)}{1-2z+zs}+(1-z)\log\left(\frac{1-z}{z}\cdot\frac{s}{1-s}\right).$$

Так как $\lambda'(z)=0$, то повторяем вышеприведенное рассуждение, вычисляя и оценивая вторую производную функции λ:

$$\lambda''(s)=\frac{(1-z)(1-2z)}{(s-s^2)(1-2z+zs)}<0,$$

ибо

$$1-z>0,\quad 1-2z<0,\quad s-s^2>0,\quad 1-2z+zs\geqslant(1-z)^2>0.$$

Оттуда следует, что неравенство (88) верно.

IV. Если число s_1 удовлетворяет неравенству $0<s_1\leqslant\frac{1}{2}$, то из соотношений (87), соотношения (88) для $s=s_2$ и из того, что функция π убывает в интервале $(0,\frac{1}{2})$, вытекает, что $\pi(s_1)\leqslant\pi\big(z(1-s_2)/(1-z)\big)<\pi(s_2)$, т. е. неравенство (83) верно.

Лемма 8 доказана полностью.

Из соотношений (75)-(77) следствия 1 и из неравенства (78) следует, что любой полином χ n-й степени, такой, что 1° $\chi(0)=\chi(1)=0$, 2° все его корни действительны и лежат вне интервала $(0,1)$, удовлетворяет неравенству

$$\Big|\mathop{E}_{t\in\langle 0,1\rangle}\{|\chi(t)|\geqslant h\|\chi\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big|\geqslant\Big|\mathop{E}_{t\in\langle 0,1\rangle}\{t^{n-1}(1-t)\geqslant h\|u^{n-1}(1-u)\|_{\langle 0,1\rangle}\}\Big|.$$

Так как $\|u^{n-1}(1-u)\|_{\langle 0,1\rangle}=(n-1)^{n-1}/n^n$, то правая сторона этого неравенства равна величине (4). Итак, мы получили неравенство (3) в случае $c=0$, $d=1$, что составляло цель этого параграфа.

Что касается доказательства неравенств (2) и (3), мне надо заметить еще следующее. Проф. Бернацкий, прочитав это доказательство, любезно мне сообщил, что факты, которые устанавливаются в леммах 1-3, 5-7, можно непосредственно получить дифференциальным методом (какой метод использован в леммах 4 и 8). Такое доказательство значительно короче моего. Я остался при первом методе, так как мне кажется, что содержание отдельных лемм 1-3, 5-7, их эффективность представляют также некоторый самостоятельный интерес.

4. Следствия и возможности обобщений. Приведенные в этом § замечания касаются неравенства (2). Некоторое следствие из неравенства (3), однако довольно частное, мы приводим в работе [2] (теорема 2).

Следствие 2. *Если все корни полинома χ вещественны и лежат в сегменте $\langle a,b\rangle$, то для всех $0\leqslant h\leqslant 1$ выполняется неравенство*

$$(89)\qquad \Big|\mathop{E}_{t\in\langle a,b\rangle}\{|\chi(t)|\geqslant h\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}\}\Big|\leqslant(b-a)\sqrt{1-h}.$$

Доказательство. Если числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$, где $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, являются всеми различными корнями полинома χ, то в силу неравенства (2)

$$\Big|\underset{t\in\langle u_i,u_{i+1}\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle u_i,u_{i+1}\rangle}\}\Big| \leqslant (u_{i+1}-u_i)\sqrt{1-h} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Так как $\|\chi\|_{\langle a,b\rangle} \geqslant \|\chi\|_{\langle u_i,u_{i+1}\rangle}$, то множество, меру которого мы оцениваем, не изменится или сузится после замены числа $\|\chi\|_{\langle u_i,u_{i+1}\rangle}$ числом $\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}$ и выполняются неравенства

$$(90)\quad \Big|\underset{t\in\langle u_i,u_{i+1}\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}\}\Big| \leqslant (u_{i+1}-u_i)\sqrt{1-h} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Из предположения вытекает, что $u_n \leqslant b$. Предположим, что $u_n < b$ и что при $t\in(u_n, b\rangle$ имеем, например, $\chi(t) > 0$. Так как все корни производных χ' и χ'' вещественны и принадлежат к сегменту $\langle u_1, u_n\rangle$, то при $t\in(u_n, b\rangle$ мы имеем также $\chi'(t) > 0$, $\chi''(t) > 0$. Пусть $\varphi(t) = \dfrac{\chi(b)}{b-u_n}(t-u_n)$. Имеем $\varphi'(t) = \dfrac{\chi(b)}{b-u_n}$, $\varphi''(t) = 0$, $\|\varphi\|_{\langle u_n,b\rangle} = \chi(b) = \|\chi\|_{\langle u_n,b\rangle}$, следовательно, в полусегменте $(u_n, b\rangle$ выполняется неравенство $0 < \chi(t) < \varphi(t)$, из которого следует, что для всех $0 \leqslant h \leqslant 1$

$$\Big|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle u_n,b\rangle}\}\Big| \leqslant \Big|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\{|\varphi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle u_n,b\rangle}\}\Big| = (b-u_n)(1-h) \leqslant (b-u_n)\sqrt{1-h}.$$

Отсюда и из неравенства $\|\chi\|_{\langle u_n,b\rangle} \leqslant \|\chi\|_{\langle a,b\rangle}$ мы получаем

$$(91)\qquad \Big|\underset{t\in\langle u_n,b\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}\}\Big| \leqslant (b-u_n)\sqrt{1-h}$$

— также в том случае, когда $u_n = b$. Аналогичным образом получается оценка

$$(92)\qquad \Big|\underset{t\in\langle a,u_1\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}\}\Big| \leqslant (u_1-a)\sqrt{1-h}.$$

Суммирование оценок (90) для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и оценок (91), (92) дает заключение (89) следствия 2.

В связи с установленными неравенствами (2) и (89) заметим еще, что:

I. Из доказательства леммы 4 вытекает, что нельзя усилить неравенство (2) без добавочных сведений о полиноме χ, так как полином $\chi = (c-t)(d-t)$ удовлетворяет равенству

$$\Big|\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| = (d-c)\sqrt{1-h}.$$

Нельзя усилить неравенство (2) также в том случае, когда известна (и превышает 2) степень полинома χ, так как левая часть этого неравенства стремится к правой части, когда все корни полинома $\chi/(c-t)(d-t)$ стремятся к бесконечности. Однако усиление неравенства (2) возможно, если известен конечный сегмент, к которому принадлежат все корни полинома χ.

II. При фиксированной и превышающей 2 степени полинома χ можно наверно усилить неравенство (89). Однако это предполагаемое усиление очень незначительно. Действительно, пусть

$$\chi(t) = T_n\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\cos\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(n\arccos\frac{2t-a-b}{b-a}\cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

(T_n является n-м полиномом Чебышева). Можно доказать, что для этого полинома, удовлетворяющего условиям следствия 2, имеем

$$(93)\qquad \Big|\underset{t\in\langle a,b\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle a,b\rangle}\}\Big| = (b-a)\frac{\sin(\arccos h)/n}{\sin\pi/2n}.$$

Полученная величина является убывающей функцией n и при $n\to\infty$ стремится к $(2/\pi)(b-a)\arccos h$, следовательно, для всех натуральных $n \geqslant 2$

$$(b-a)\sqrt{1-h}-(b-a)\frac{\sin(\arccos h)/n}{\sin\pi/2n} < (b-a)\big(\sqrt{1-h}-(2/\pi)\arccos h\big).$$

Максимум правой части этого неравенства, достигаемый при $h = 16/\pi^2-1$, не превышает $0{,}0423(b-a)$, значит, очень мал.

Надо предполагать, что в неравенстве (89) величину $(b-a)\sqrt{1-h}$ можно заменить величиной (93), т. е. полиномы Чебышева обладают, кроме известных до сих пор, еще одним интересным экстремальным свойством, однако пока не удалось этого доказать.

III. Можно думать о неравенствах аналогичных (2), касающихся мер множеств, связанных с данной функцией, для полиномов, не все корни которых действительны, или для каких-либо функций более общего вида.

Следствие 3. *Если действительные числа c и $d > c$ являются соседними и простыми корнями полинома χ и если*

$$(94)\qquad \|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\left(\frac{1}{|\chi'(c)|}+\frac{1}{|\chi'(d)|}\right) < \frac{d-c}{2},$$

то не все корни полинома χ действительны.

Это следствие вполне равносильно полученной другим путем Эрдешом и Грюнвальдом теореме I [1] и поэтому его доказательство даем в сокращении.

Если вопреки следствию все корни полинома χ вещественны, то

$$t_1-c=\frac{h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}}{|\chi'(c)|}+o(h),\qquad d-t_2=\frac{h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}}{|\chi'(d)|}+o(h),$$

где $c<t_1<t_2<d$, $|\chi(t_1)|=|\chi(t_2)|=h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}$, а из неравенства (2) вытекает, что

$$\Big|\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)|\geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big|=t_2-t_1=$$

$$=d-c-h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\left(\frac{1}{|\chi'(c)|}+\frac{1}{|\chi'(d)|}\right)+o(h)\leqslant(d-c)\sqrt{1-h}.$$

Перенося в этом неравенстве $d-c$ в правую часть и разделяя обе части на h, мы получим в пределе при $h\to 0$ неравенство, несовместимое с (94). Итак, следствие верно.

Цитированная литература

[1] P. Erdös and T. Grünwald, *On polynomials with only real roots*, Annals of Mathematics 40 (1939), стр. 537-548.

[2] С. Пашковский, *О некотором свойстве наилучшей равномерной аппроксимации*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), стр. 195-208.

[3] P. Erdös, *Note on some elementary properties of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), стр. 954-958.

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

О некотором свойстве наилучшей равномерной аппроксимации

С. Пашковский (Вроцлав)

1. Введение. Пусть $\mathcal{C}$ — класс функций с вещественными значениями, определенных и непрерывных в сегменте (замкнутом) $I=\langle a,b\rangle$, а $\mathcal{W}_n$ — класс алгебраических полиномов степени не выше n-й.

Аппроксимируя функцию $\xi\in\mathcal{C}$, назовем ошибкой ее приближения полиномом $\psi\in\mathcal{W}_n$ число $\|\xi-\psi\|_I$, где для любой функции $\eta\in\mathcal{C}$ имеем $\|\eta\|_I=\max\limits_{t\in I}|\eta(t)|$. Теория равномерной (т. е. основанной на введенной метрике) аппроксимации изучает, между прочим, свойства ошибки наилучшей аппроксимации, т. е. числа

$$\varepsilon_n(\xi)=\inf_{\psi\in\mathcal{W}_n}\|\xi-\psi\|_I, \tag{1}$$

и свойства полинома наилучшего приближения, т. е. полинома $\psi_n\in\mathcal{W}_n$, для которого достигается нижняя грань (1):

$$\|\xi-\psi_n\|_I=\varepsilon_n(\xi). \tag{2}$$

Известно ([1], стр. 48, теорема 3), что этот полином существует и определен однозначно.

В § 2 мы приводим оценки сверху и снизу меры множества

$$A_h=\underset{t\in I}{E}\{|\xi(t)-\psi_n(t)|\geqslant h\varepsilon_n(\xi)\}, \tag{3}$$

где h — любое число из сегмента $\langle 0,1\rangle$. Это, соответственно, неравенства (5) и (21).

В § 3 мы применяем упомянутые оценки к некоторой практической задачи теории равномерной аппроксимации, а именно к оценкам чисел $\varepsilon_{n+1}(\xi),\varepsilon_{n+2}(\xi),\ldots$, когда известен полином наилучшего приближения ψ_n, построенный для функции ξ.

В § 4 применяем оценку сверху меры множества (3) для получения связи между равномерной и интегральной (с показателем p) аппроксимациями, которую выражает неравенство (31). Интегральная аппрок