α, β, p for which none of the poles of $\Gamma(s)\Gamma(\alpha-p+s)\Gamma(\beta-p+s)$ coincide with any of the poles of $\Gamma(\alpha-s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(p-s)$.

I am indebted to the referee for his valuable suggestions.

Reference

[1] E.W. Barnes, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 6, (1908), p. 141-177.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY PRINCETON N. S., U. S. A.
EIN SHAMS UNIVERSITY ABBASIA CAIRO, U. A. R.

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur un problème de stabilité

par Z. Opial (Kraków)

Introduction. Dans le présent article j'étudie la stabilité de la solution identiquement nulle de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''+p(t)u = 0 \tag{1}$$

où $p(t)$ est une fonction continue et périodique de période ω. Sans restreindre la généralité on peut évidemment admettre que $\omega = \pi$. L'équation (1) étant linéaire et homogène, pour démontrer que l'intégrale $u(t) \equiv 0$ est stable pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$, il suffit de montrer que toutes les intégrales de cette équation sont bornées sur l'axe $(-\infty, +\infty)$ tout entier, ou, ce qui revient au même, que les deux intégrales indépendantes jouissent de cette propriété.

La première condition suffisante pour la stabilité de l'intégrale identiquement nulle de l'équation considérée a été donnée, il y a déjà plus de cinquante ans, par A. Liapounoff dans son mémoire *Problème général de la stabilité du mouvement* (v. [1]).

Voici l'énoncé du théorème de Liapounoff:

Si la fonction $p(t)$ continue, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait aux conditions

$$p(t) \geqslant 0 \quad et \quad \int_0^\pi p(t)\,dt \leqslant \frac{4}{\pi},$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Depuis ce temps, plusieurs auteurs se sont occupés de ce problème en généralisant et complétant de diverses manières les belles recherches de Liapounoff. En particulier, G. Borg a établi, entre autres, le théorème suivant:

Si la fonction $p(t)$ est de la forme $p(t) = a^2+q(t)$, où a est un nombre tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $q(t)$ est une fonction continue et périodique de période

π satisfaisant aux conditions

$$\int_0^\pi q(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^\pi |q(t)|\,dt \leqslant 4a\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}a,$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Dans le présent article je donne quelques conditions suffisantes pour la stabilité de l'équation considérée, en remplaçant les inégalités de Liapounoff et celles de Borg par d'autres inégalités du même type, portant non pas sur l'intervalle de périodicité de la fonction $p(t)$ tout entier, mais sur des intervalles partiels de longueur constante.

§ 1. Notions et théorèmes auxiliaires. Les démonstrations de tous les théorèmes de cet article seront appuyées sur une proposition concernant les inégalités intégrales; c'est pourquoi nous commencerons par la rappeler (v. par ex. [4] ou [5]):

Théorème A. *Soit $f(x,y)$ une fonction continue et non décroissante par rapport à la variable y dans un domaine Ω et $\varphi(x)$ une fonction continue dont le diagramme appartient entièrement au domaine Ω. Si $\varphi(x)$ satisfait dans l'intervalle $\langle\xi, \xi+\delta\rangle$ à l'inégalité intégrale*

$$\varphi(x) \leqslant \eta + \int_\xi^x f\big(x, \varphi(x)\big)\,dx$$

on a alors

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \tag{2}$$

où par $\psi(x)$ nous avons désigné l'intégrale supérieure à droite de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$, l'intégrale issue du point (ξ, η). L'inégalité (2) *a lieu aussi longtemps que l'intégrale $\psi(x)$ reste dans le domaine Ω.*

Nous aurons aussi besoin du théorème suivant analogue, mais plus précis.

Théorème B. *Si la fonction $f(x,y)$ est croissante au sens strict par rapport à la variable y, $\varphi(\xi) < \eta$ et toutes les autres hypothèses du théorème précédent restent les mêmes, alors*

$$\varphi(x) < \psi(x)$$

dans l'intervalle d'existence de ces deux fonctions.

Considérons l'équation différentielle de Riccati $v' = v^2 + p(t)$ et désignons par $v(t)$ une intégrale quelconque de cette équation. On sait que si la fonction $p(t)$ est continue, quatre cas sont possibles:

1° il existe deux nombres finis a et b $(a < b)$ tels que $\lim\limits_{t\to a+0} v(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to b-0} v(t) = +\infty$;

2° il existe un nombre fini a tel que $\lim\limits_{t\to a+0} v(t) = -\infty$ et que $v(t)$ soit bornée dans tout intervalle fini $\langle T_1, T_2\rangle$, où $a < T_1 < T_2$;

3° il existe un nombre fini b tel que $\lim\limits_{t\to b-0} v(t) = +\infty$ et que $v(t)$ soit bornée dans tout intervalle fini $\langle T_1, T_2\rangle$, où $T_1 < T_2 < b$;

4° $v(t)$ est bornée dans tout intervalle de longueur finie.

Le premier de ces cas a lieu par exemple pour $p(t) \equiv 1$, les trois derniers pour $p(t) \equiv 0$. Suivant les cas nous dirons que l'intervalle (a,b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, +\infty)$ est *l'intervalle maximum d'existence de l'intégrale* $v(t)$.

Pour toute fonction continue $p(t), q(t), \ldots$ nous désignerons par $p^+(t), q^+(t), \ldots$ les fonctions $\max\big(0, p(t)\big)$, $\max\big(0, q(t)\big)$ etc.

§ 2. Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant analogue au critère de Liapounoff.

Théorème I. *Si la fonction continue $p(t)$, non identiquement nulle et périodique de période π, satisfait aux conditions*

$$\int_0^\pi p(t)\,dt \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\int_\tau^{\tau+\pi/4} p^+(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi}(3-\sqrt{5}) \tag{4}$$

pour tout τ, toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Démonstration. Si l'intégrale identiquement nulle de l'équation (1) n'est pas stable, il existe une intégrale non banale $u(t)$ de cette équation telle que pour tout t:

$$u(t+\pi) = \lambda u(t) \tag{5}$$

λ étant un nombre réel (cf. [3], p. 124).

Pour démontrer notre théorème il suffit donc de montrer que dans les hypothèses (3) et (4) aucune intégrale de l'équation (1) ne peut satisfaire à la relation (5).

Soit $u(t)$ une intégrale de l'équation (1) qui ne s'annule pas dans un intervalle $\langle t_0, t_0+\pi\rangle$. On a alors, en vertu de (3):

$$\int_{t_0}^{t_0+\pi} \frac{u''(t)}{u(t)}\,dt = -\int_0^\pi p(t)\,dt \leqslant 0$$

et d'autre part

$$\int_{t_0}^{t_0+\pi} \frac{u''(t)}{u(t)}\,dt = \frac{u'(t_0+\pi)}{u(t_0+\pi)} - \frac{u'(t_0)}{u(t_0)} + \int_{t_0}^{t_0+\pi} \left[\frac{u'(t)}{u(t)}\right]^2 dt$$

ce qui mène avec l'inégalité précédente à l'inégalité

$$\frac{u'(t_0+\pi)}{u(t_0+\pi)} < \frac{u'(t_0)}{u(t_0)}$$

qui exclut toute relation de la forme (5).

Pour achever la démonstration il suffira donc de montrer que la distance entre deux zéros consécutifs de toute intégrale non banale de l'équation (1) est toujours supérieure à π.

Prenons une intégrale quelconque $u(t)$ de l'équation (1) et, dans l'intervalle où $u(t) \neq 0$, posons

$$v(t) = -u'(t)/u(t).$$

On obtient ainsi une intégrale $v(t)$ de l'équation de Riccati

$$v' = v^2+p(t). \tag{6}$$

La distance entre deux zéros consécutifs de l'intégrale $u(t)$ est égale à la longueur de l'intervalle maximum d'existence de l'intégrale $v(t)$. Il reste donc à démontrer que l'intervalle maximum d'existence de toute intégrale de l'équation (6) est de longueur supérieure à π.

Prenons à cet effet un τ arbitraire et désignons par $z(t)$ l'intégrale de l'équation (6) pour laquelle $z(\tau) = 0$. Soit $\langle \tau-a, \tau+b\rangle$ l'intervalle maximum d'existence de $z(t)$. Nous allons montrer que dans nos hypothèses on doit avoir $b > \pi/2$ et $a > \pi/2$. Nous nous bornerons à démontrer que $b > \pi/2$, car la démonstration de la seconde inégalité est tout à fait analogue. Posons, à titre d'exemple, $\tau = 0$.

La fonction $z(t)$ est l'intégrale de l'équation (6), on a donc

$$z'(t) = z^2(t)+p(t).$$

En remplaçant $p(t)$ par $p^+(t)$ on en obtient

$$z'(t) \leqslant z^2(t)+p^+(t).$$

La fonction $z(t)$ pour laquelle $z(0) = 0$ satisfait donc pour $t \geqslant 0$ à une inégalité différentielle. D'après les propriétés bien connues de telles inégalités il s'ensuit que l'on a pour $t \geqslant 0$:

$$z(t) \leqslant w(t) \tag{7}$$

où par $w(t)$ nous avons désigné l'intégrale de l'équation différentielle auxiliaire

$$v' = v^2+p^+(t) \tag{8}$$

passant par le point $(0, 0)$ (v. fig. 1). L'inégalité (7) a lieu dans l'intervalle d'existence de l'intégrale $w(t)$. Il en résulte que, en désignant par b' l'extrémité droite de l'intervalle maximum d'existence de l'intégrale $w(t)$, on a $b' \leqslant b$.

Le second membre de l'équation (8) est toujours non négatif, la fonction $w(t)$, l'intégrale de cette équation, est donc non décroissante. Mais $w(0) = 0$. Cela veut dire que pour $t \geqslant 0$ on a $w(t) \geqslant 0$. D'autre part en intégrant dans l'intervalle $\langle 0, t\rangle$ l'identité

$$w'(t) \equiv w^2(t)+p^+(t) \tag{9}$$

on obtient

$$w(t) = \int_0^t w^2(\tau)\,d\tau+\int_0^t p^+(\tau)\,d\tau.$$

Remplaçons pour l'instant l'inégalité (4) par celle-ci:

$$\int_\tau^{\tau+\pi/4} p^+(t)\,dt \leqslant K \quad \text{pour tout } \tau \tag{4'}$$

où K est un nombre fixe satisfaisant aux inégalités $0 < K < 4/\pi$. De la dernière équation intégrale et de l'hypothèse (4') on obtient maintenant l'inégalité intégrale

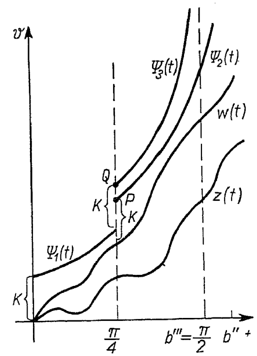

Fig. 1

$$w(t) \leqslant K+\int_0^t w^2(\tau)\,d\tau \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

La fonction $w(t)$ non négative pour $t \geqslant 0$ satisfait donc à l'inégalité intégrale (10). En appliquant maintenant à cette fonction et au domaine Ω: $v \geqslant 0$, où la fonction $f(t, v) = v^2$ est croissante par rapport à la variable v, le théorème B cité au § 1 on obtient pour $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$ l'inégalité

$$w(t) < \psi_1(t) \tag{11}$$

où par $\psi_1(t)$ nous avons désigné l'intégrale de l'équation auxiliaire $v' = v^2$ qui passe par le point $(0, K)$. L'inégalité (11) est vraie dans l'intervalle d'existence de l'intégrale $\psi_1(t)$. En tout cas (pour $K < 4/\pi$) $\psi_1(t)$ existe dans l'intervalle $\langle 0, \pi/4\rangle$ tout entier. $w(t)$ et, par conséquent, l'intégrale considérée $z(t)$ existent aussi dans cet intervalle. Nous allons montrer que pour un K convenablement choisi ces deux dernières fonctions existent aussi dans l'intervalle $\langle 0, \pi/2\rangle$, c'est-à-dire que b' et, par conséquent, b est plus grand que $\pi/2$.

En effet, à l'aide d'un calcul élémentaire qu'il est inutile de répéter ici, on obtient pour $\psi_1(t)$ la formule suivante:

$$\psi_1(t) = K/(1-Kt). \tag{12}$$

En posant, en particulier, dans la relation (11) $t = \pi/4$ et en tenant compte de (12) on obtient

$$(13) \qquad w(\pi/4) < 4K/(4-K\pi).$$

Intégrons maintenant de nouveau les deux membres de l'identité (9) dans l'intervalle $\langle\pi/4, t\rangle$ où $t \geqslant \pi/4$. On obtient ainsi

$$w(t) = w\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\pi/4}^{t} p^+(\tau)\,d\tau + \int_{\pi/4}^{t} w^2(\tau)\,d\tau.$$

Remplaçons la première intégrale de la dernière relation par l'intégrale de la même fonction, mais étendue sur l'intervalle $\langle\pi/4, \pi/2\rangle$ tout entier. On obtient ainsi pour $\pi/4 \leqslant t \leqslant \pi/2$ l'inégalité

$$w(t) \leqslant w\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} p^+(\tau)\,d\tau + \int_{\pi/4}^{t} w^2(\tau)\,d\tau$$

et, par suite, en vertu de l'hypothèse (4')

$$w(t) \leqslant K + w\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\pi/4}^{t} w^2(\tau)\,d\tau.$$

De cette inégalité intégrale et du théorème A cité au § 1 il résulte que pour $\pi/4 \leqslant t \leqslant \pi/2$ on a

$$(14) \qquad w(t) \leqslant \psi_2(t)$$

où $\psi_2(t)$ est l'intégrale de l'équation $v' = v^2$ issue du point $P\left(\frac{1}{4}\pi, K + w\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$. Soit $(-\infty, b'')$ l'intervalle maximum d'existence de $\psi_2(t)$. Si b'' est plus grand que $\pi/2$, alors, en vertu de (14), b', l'extrémité droite de l'intervalle maximum d'existence de $w(t)$ est aussi plus grande que $\pi/2$. Pour évaluer b'' prenons au lieu de $\psi_2(t)$ l'intégrale $\psi_3(t)$ de la même équation $v' = v^2$ issue du point $Q\left(\pi/4, K+4K/(4-K\pi)\right)$ situé, en vertu de l'inégalité (13) au-dessus du point P (v. fig. 1). La fonction $\psi_3(t)$ satisfait à la relation

$$-\frac{1}{\psi_3(t)} = \frac{-1}{K+4K/(4-K\pi)} + t - \frac{\pi}{4}.$$

L'intervalle maximum d'existence de $\psi_3(t)$: $(-\infty, b''')$ dépend évidemment de la constante K. En tout cas on peut aisément démontrer que $b''' < b''$. Choisissons donc cette constante de telle sorte que l'on ait $b''' = \pi/2$. A cet effet il faut résoudre l'équation algébrique du second degré

$$0 = \frac{-1}{K+4K/(4-K\pi)} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

On obtient ainsi, en prenant la plus petite racine de cette équation

$$K = \frac{2}{\pi}(3-\sqrt{5}).$$

C'est pour cette valeur de K que $b''' = \pi/2$ et, par conséquent, $b'' > \pi/2$. D'après ce que nous avons dit auparavant, il en résulte que b' est aussi plus grand que $\pi/2$ et b satisfait à l'inégalité $b > \pi/2$.

On pourrait montrer de même, en s'appuyant sur des théorèmes analogues aux théorèmes A et B, que $a > \pi/2$. Nous avons posé $\tau = 0$, mais il est aisé de voir que les mêmes raisonnements peuvent être répétés pour τ quelconque. Ceci veut dire que pour les intégrales de l'équation (5) qui s'annulent au moins une fois dans leur intervalle maximum d'existence, cet intervalle est de longueur plus grande que π.

Le théorème I se trouve ainsi entièrement démontré.

§ 3. De la même manière on peut démontrer le théorème suivant analogue au théorème de Borg cité dans l'introduction.

Théorème II. *Si la fonction $p(t)$ est de la forme $p(t) = a^2+q(t)$ où $0 < a \leqslant 1$ et $q(t)$ est une fonction continue et périodique de période π satisfaisant aux conditions*

$$\int_0^{\pi} q(t)\,dt = 0$$

et si l'on a pour tout τ:

$$(15) \qquad \int_{\tau}^{\tau+\pi/4} q^+(t)\,dt \leqslant \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}a\cdot\left(3-\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}a+5}\right)$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

La première partie de la démonstration du théorème I est valable aussi dans le cas présent. Il reste donc seulement à démontrer que dans l'hypothèse (15) il n'existe pas d'intégrale de l'équation de Riccati

$$(16) \qquad v' = v^2+a^2+q(t)$$

pour laquelle la longueur de l'intervalle maximum d'existence soit plus petite que π. A cet effet il suffit de montrer que toute intégrale de l'équation (16) qui s'annule en un point τ se laisse prolonger d'une manière continue sur un intervalle de longueur plus grande que π. De même que précédemment nous nous occuperons seulement de celle des intégrales de (16) qui passe par le point $(0, 0)$. Désignons-la encore par $z(t)$. Soit (a, b) l'intervalle maximum de son existence. Nous allons montrer que $b > \pi/2$. La démonstration que $a < -\pi/2$ est tout à fait analogue.

Or, $z(t)$ satisfait à l'inégalité différentielle

$$z'(t) \leqslant z^2(t)+a^2+q^+(t),$$

d'où l'on obtient pour $t \geqslant 0$

$$z(t) \leqslant w(t),$$

où $w(t)$ désigne l'intégrale de l'équation

$$v' = v^2 + \alpha^2 + q^+(t)$$

issue du point $(0, 0)$.

Remplaçons pour l'instant l'inégalité (15) par l'inégalité

$$\int_{\tau}^{\tau+\pi/4} q^+(t)\,dt \leqslant K \quad \text{pour tout } \tau, \tag{15'}$$

où K est un nombre fixe satisfaisant aux inégalités $0 < K < \alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{4}\pi\alpha$. Dans l'hypothèse (15') l'intégrale $w(t)$ satisfait pour $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$ à l'inégalité intégrale

$$w(t) \leqslant K + \int_0^t \big(w^2(\tau)+\alpha^2\big)\,d\tau.$$

Il en résulte que dans l'intervalle $\langle 0, \pi/4\rangle$ on a

$$w(t) < \psi_1(t) \tag{17}$$

où $\psi_1(t)$ est l'intégrale de l'équation $v' = v^2+\alpha^2$ issue du point $(0, K)$. A l'aide de calculs faciles on obtient pour $\psi_1(t)$ la formule

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1(t)}{\alpha} = t + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{K}{\alpha}. \tag{18}$$

En posant, en particulier, dans la relation (17) $t = \pi/4$, on en obtient

$$w(\pi/4) < \psi_1(\pi/4). \tag{19}$$

De la définition de $w(t)$ on obtient ensuite, en vertu de l'hypothèse (15'), dans l'intervalle $\langle \pi/4, \pi/2\rangle$ l'inégalité

$$w(t) \leqslant w\left(\frac{\pi}{4}\right) + K + \int_{\pi/4}^{t} \big(w^2(\tau)+\alpha^2\big)\,d\tau$$

d'où, d'après le théorème A du § 1, il résulte que dans l'intervalle $\langle \pi/4, \pi/2\rangle$:

$$w(t) \leqslant \psi_2(t)$$

où $\psi_2(t)$ est l'intégrale de l'équation $v' = v^2+\alpha^2$ issue du point $P\big(\pi/4, w(\pi/4)+K\big)$. Désignons par b, b' et b'' les extrémités droites des intervalles maxima d'existence des intégrales $z(t)$, $w(t)$ et $\psi_2(t)$ respectivement. Si b'' est plus grand que $\pi/2$, on a aussi $b' > \pi/2$. Dans notre but il suffit donc de montrer que dans l'hypothèse (15') $b'' > \pi/2$. Prenons à cet effet au lieu de $\psi_2(t)$ cette intégrale $\psi_3(t)$ de l'équation $v' = v^2+\alpha^2$ qui passe par le point $Q\big(\pi/4, \psi_1(\pi/4)+K\big)$. On peut facilement montrer que la fonction $\psi_3(t)$ satisfait à l'égalité

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\psi_3(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1(\pi/4)+K}{\alpha} + t - \frac{\pi}{4}. \tag{20}$$

Soit b''' l'extrémité droite de l'intervalle maximum d'existence de $\psi_3(t)$. Le point $P\big(\pi/4, w(\pi/4)+K\big)$ est situé, en vertu de (19), au-dessous du point $Q\big(\pi/4, \psi_1(\pi/4)+K\big)$. On a donc $b''' < b''$. Il reste donc à choisir la constante K de telle sorte que l'on ait $b''' = \pi/2$, ce qui conduit, en vertu des relations (18) et (20), au système d'équations

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1(\pi/4)}{\alpha} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{K}{\alpha},$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1(\pi/4)+K}{\alpha} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

d'où l'on obtient

$$K = \frac{1}{2} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\alpha \cdot \left(3 - \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}\alpha + 5}\right).$$

Pour achever la démonstration du théorème II il suffit maintenant de compléter ce que nous avons établi par des remarques analogues à celles de la démonstration du théorème précédent.

§ 4. Dans les théorèmes I et II démontrés aux paragraphes précédents nous avons donné certaines conditions intégrales suffisantes pour que toutes les intégrales de l'équations (1) soient bornées. Par des exemples appropriés faciles à construire on pourrait montrer que les constantes intervenant dans ces théorèmes sont les meilleures possibles. Cependant, on peut obtenir des résultats analogues plus précis en ajoutant aux conditions exprimées par des inégalités intégrales, la condition que la fonction $p^+(t)$ soit bornée supérieurement par une constante convenablement choisie. Dans cet ordre d'idées nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME III. *Si la fonction continue $p(t)$, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait à l'inégalité*

$$\int_0^{\pi} p(t)\,dt \geqslant 0$$

et s'il existe un nombre α appartenant à l'intervalle ouvert $(1,3)$ *tel que l'on ait pour tout τ et t*:

$$\int_{\tau}^{\tau+2\pi/3} p^{+}(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{\alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\alpha}, \tag{21}$$

$$p^{+}(t) \leqslant \alpha^2, \tag{22}$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Remarque. On pourrait demander pourquoi nous nous bornons au cas où $\alpha > 1$. Or, pour $\alpha = 1$ et, par conséquent, pour tout $\alpha \leqslant 1$ on peut aisément démontrer un théorème analogue au théorème III sans que l'on ait besoin de l'inégalité (21). A cet effet il suffirait de remarquer que dans ce cas toute intégrale $v(t)$ de l'équation auxiliaire de Riccati $v' = v^2+p^{+}(t)$ satisfait à l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leqslant v^2(t)+1$$

ce qui permet d'évaluer facilement la longueur de son intervalle maximum d'existence.

Démonstration du théorème III. Il suffit, comme auparavant, de démontrer que l'intervalle maximum d'existence de toute intégrale de l'équation (8) est de longueur plus grande que π. Nous nous bornerons à envisager, à titre d'exemple, celle des intégrales de l'équation (8) qui passe par le point $(0,0)$. Désignons-la par $w(t)$.

Posons $v_0 = \alpha \operatorname{ctg}\frac{1}{6}\pi\alpha$ et choisissons deux nombres positifs a et b de telle sorte que l'on ait

$$\int_{0}^{a} p^{+}(t)\,dt = \frac{v_0}{1+av_0} \quad \text{et} \quad \int_{-b}^{0} p^{+}(t)\,dt = \frac{v_0}{1+bv_0}. \tag{23}$$

Nous allons montrer que dans l'hypothèse (21) $a+b \geqslant \frac{2}{3}\pi$. En effet, de la définition de ces nombres il résulte immédiatement que

$$\frac{v_0}{1+av_0}+\frac{v_0}{1+bv_0} = \int_{-b}^{a} p^{+}(t)\,dt. \tag{24}$$

Supposons pour l'instant que $a+b < \frac{2}{3}\pi$. On aurait alors, en vertu de l'hypothèse (21)

$$\int_{-b}^{a} p^{+}(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{\alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\alpha}.$$

D'autre part on peut aisément démontrer que pour tout couple de nombres positifs a et b, satisfaisant à l'inégalité $a+b < \frac{2}{3}\pi$, on a

$$\frac{v_0}{1+av_0}+\frac{v_0}{1+bv_0} > \frac{2v_0}{1+\dfrac{\pi}{3}v_0} = \frac{2}{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{\alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\alpha}$$

ce qui est incompatible avec la relation (24). On doit donc avoir $a+b \geqslant \frac{2}{3}\pi$.

Dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ l'intégrale $w(t)$ de l'équation (8) satisfait, en vertu de (23), à l'inégalité intégrale

$$w(t) \leqslant \frac{v_0}{1+av_0}+\int_0^t w^2(\tau)\,d\tau.$$

Du théorème B on obtient donc dans cet intervalle

$$w(t) < \psi_1(t)$$

où $\psi_1(t)$ est l'intégrale de l'équation auxiliaire $v' = v^2$ issue du point $(0, v_0/(1+av_0))$. Il en résulte, en particulier, pour $t = a$

$$w(a) < \psi_1(a) = v_0.$$

Pour $t \geqslant a$ la fonction $w(t)$ satisfait, en vertu de l'inégalité (22), à l'inégalité différentielle

$$w'(t) \leqslant \alpha^2+w^2(t).$$

Il en résulte que pour $t \geqslant a$ on a

$$w(t) < \psi_2(t) \tag{25}$$

où par $\psi_2(t)$ nous avons désigné l'intégrale de l'équation $v' = \alpha^2+v^2$ qui passe par le point (a, v_0). L'intégrale $\psi_2(t)$ existe, comme le montre aisément un calcul élémentaire, dans l'intervalle $\langle a, a+\frac{1}{6}\pi\rangle$ tout entier. L'extrémité droite b' de l'intervalle maximum d'existence de l'intégrale $w(t)$ est donc, en vertu de (25), plus grande que $a+\frac{1}{6}\pi$. D'une manière analogue on peut démontrer que l'extrémité gauche a' de cet intervalle est plus petite que $-b-\frac{1}{6}\pi$. La longueur de l'intervalle $\langle a', b'\rangle$ est donc plus grande que π et la démonstration du théorème III est ainsi terminée.

Du théorème III on obtient, en particulier, pour $\alpha = 2$:

Corollaire I. *Si la fonction $p(t)$ continue, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait aux inégalités*

$$\int_0^{\pi} p(t)\,dt \geqslant 0, \qquad p^{+}(t) \leqslant 4 \quad \text{et} \quad \int_{\tau}^{\tau+2\pi/3} p^{+}(t)\,dt \leqslant \frac{12}{2\pi+\sqrt{3}},$$

pour tout τ, toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

On peut aussi remplacer la condition intégrale portant sur tous les intervalles de longueur constante égale à $\frac{2}{3}\pi$, par une seule inégalité imposée à l'intégrale de la fonction $p^+(t)$ étendue sur l'intervallle de périodicité tout entier et obtenir ainsi le théorème suivant, tout à fait analogue au théorème de Liapounoff:

COROLLAIRE II. *Si la fonction $p(t)$ continue, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait aux inégalités*

$$\int_0^\pi p(t)\,dt \geqslant 0, \quad p^+(t) \leqslant 4 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi p^+(t)\,dt \leqslant \frac{12}{2\pi+\sqrt{3}},$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Travaux cités

[1] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2) 9 (1907), p. 203-474.

[2] G. Borg, *Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen*, Ark. Mat. Astr. Fys. 31A, no 1 (1944), p. 1-31.

[3] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[4] B. Viswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences. Sect. A, N 5 (1952), p. 335-341.

[5] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 200-209.

Reçu par la Rédaction le 29. 11. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

О полиномах, все корни которых вещественны

С. Пашковский (Вроцлав)

1. Результаты. В настоящей работе $\langle a, b\rangle$ обозначает сегмент о концах a и b, т. е. множество $a \leqslant t \leqslant b$, (a, b) — интервал о тех же концах, т. е. множество $a < t < b$, $|A|$ — жорданову меру множества A, $\deg\chi$ — степень полинома χ. Для непрерывной функции ξ и сегмента I определяем норму

$$\|\xi\|_I = \max_{t\in I}|\xi(t)|.$$

Малые латынские буквы обозначают вещественные числа, такие же греческие — функции вещественной переменной.

В работе изучается некоторое свойство полиномов степени выше 1, все корни которых вещественны и не все равны между собой. Для любого такого полинома χ, соседними корнями которого являются числа c и d (где $c < d$), вводится множество

$$\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}, \tag{1}$$

где h — любое число из сегмента $\langle 0,1\rangle$. Множество (1) является сегментом в силу предполагаемых свойств полинома χ; его концы — это два корня уравнения $|\chi(t)| = h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}$, лежащие в сегменте $\langle c, d\rangle$.

В §§ 2 и 3 мы докажем следующую теорему:

Для любого $h\in\langle 0,1\rangle$ выполняются неравенства

$$\Big|\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| \leqslant (d-c)\sqrt{1-h},\ [1] \tag{2}$$

$$\Big|\underset{t\in\langle c,d\rangle}{E}\{|\chi(t)| \geqslant h\|\chi\|_{\langle c,d\rangle}\}\Big| \geqslant (d-c)\mu_n(h) \quad \textit{при} \quad \deg\chi = n, \tag{3}$$

где

$$\mu_n(h) = \Big|\underset{t\in\langle 0,1\rangle}{E}\{t^{n-1}(1-t) \geqslant h(n-1)^{n-1}/n^n\}\Big|. \tag{4}$$

(1) Уже после поступления настоящей работы в печать оказалось, что оценка (2) была ранее получена в работе П. Эрдеша [3]. Однако каждая из четырех лемм, составляющих нижеприведенное доказательство оценки (2), является повидимому новой.