References

[1] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

[2] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935.

[3] S. Kaczmarz, *Über Summierbarkeit der Orthogonalreihen*, Math. Zeit. 26 (1927), p. 99-105.

[4] — *Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen*, Math. Zeit. 23 (1925), p. 263-270.

[5] — *Sur la convergence et sommabilité des développements orthogonaux*, Studia Math. 1 (1929), p. 81-121.

[6] K. Knopp, *Über das Eulerische Summierungsverfahren, II Mitteilung*, Math. Zeit. 18 (1923), p. 125-156.

[7] — *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie*, II Teil, Berlin 1942.

[8] L. Kronecker, *Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes*, Comptes Rendus Paris 103 (1886), p. 980-987.

[9] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. 80 (1948), p. 167-190.

[10] J. Meder, *Über einen Satz aus der Theorie der summierbaren Reihen*, The Tôhoku Math. Journal. 32 (1930), p. 340-341.

[11] A. Zygmund, *Remarque sur la sommabilité des séries*, Bull. Ac. Pol. Cracovie 1926, p. 185-191.

[12] — *Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales*, Fundamenta Math. 10 (1927), p. 356-362.

Reçu par la Rédaction le 16. 7. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

A formula similar to Barnes' lemma

by F. M. Ragab (Princeton)

The formula to be established is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(p-s)\Gamma(a-p+s)\Gamma(\beta-p+s)(-1)^s\,ds$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(a-\frac{1}{2}p)\Gamma(\beta-\frac{1}{2}p)\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}p)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}p)\Gamma(\frac{1}{2}p)}{2^{2+p-a-\beta}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\beta-\frac{1}{2}p)\exp(-\frac{1}{2}i\pi p)},$$

where

$$(1)\qquad \mathrm{R}\,a>0,\quad \mathrm{R}\,\beta>0,\quad \mathrm{R}\,p>0,\quad \mathrm{R}(a-p)>0,\quad \mathrm{R}(\beta-p)>0.$$

The path of integration is of Barnes' type and is curved, if necessary, to separate the increasing sequence of poles from the decreasing sequence. (1) is an extension of Barnes' lemma (see [1]) namely

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds = \frac{\Gamma(a+\gamma)\Gamma(a+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(a+\beta+\gamma+\delta)}.$$

To prove (1), write I for the expression on the left. Let C be the semicircle of radius ϱ on the right of the imaginary axis with its centre at the origin and suppose that $\varrho\to\infty$ in such a way that the lower bound of the distance of C from the poles of $\Gamma(a-s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(p-s)$ is definitely positive. Then the integrand is asymptotically equal to

$$O[s^{2a+2\beta-p-3}\exp(-3\pi|\mathrm{Im}\,s|)],$$

as $|s|\to\infty$ on the imaginary axis or on C. Thus the original integral converges and the integral round C tends to zero as $\varrho\to\infty$ when $\mathrm{R}(a+\beta-\frac{1}{2}p-1)<0$. The integral is therefore equal to minus $2\pi i$ times the sum of the residues of the integrand at the poles on the right of the contour. Thus

$$I = \Gamma(\beta-a)\Gamma(p-a)\Gamma(a)\Gamma(2a-p)\Gamma(a+\beta-p)e^{i\pi a}\times$$
$$\times {}_3F_2(a,2a-p,a+\beta-p;1+a-\beta,1+a-p;1)+$$
$$+\Gamma(a-\beta)\Gamma(p-\beta)\Gamma(\beta)\Gamma(a+\beta-p)\Gamma(2\beta-p)e^{i\pi\beta}\times$$
$$\times {}_3F_2(\beta,2\beta-p,a+\beta-p;1+\beta-a;1+\beta-p;1)+$$
$$+\Gamma(a-p)\Gamma(\beta-p)\Gamma(p)\Gamma(a)\Gamma(\beta)e^{i\pi p}\times$$
$$\times {}_3F_2(p,a,\beta;1+p-a,1+p-\beta;1),$$

where

$${}_3F_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n}{n!(b_1)_n(b_2)_n},$$

and

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \qquad (a)_0 = 1, \qquad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1).$$

Now sum each ${}_3F_2$ in the last expression by means of Dixon's theorem, namely

$${}_3F_2(a,b,c;1+a-b,1+a-c;1)$$
$$= \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)\Gamma(1+a-b-c)},$$

so getting

$$I = \frac{\Gamma(\beta-a)\Gamma(a)\Gamma(1+a-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}e^{i\pi a}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(p-a)\Gamma(2a-p)\Gamma(a+\beta-p)\Gamma(1+a-\frac{1}{2}p)\Gamma(1+a-p)\Gamma(1-a-\beta+\frac{1}{2}p)}{\Gamma(1+2a-p)\Gamma(1-\frac{1}{2}p)\Gamma(1-\beta+\frac{1}{2}p)}+$$
$$+\frac{\Gamma(a-\beta)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\beta-a)}{\Gamma(1-a)}e^{i\pi\beta}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(p-\beta)\Gamma(2\beta-p)\Gamma(a+\beta-p)\Gamma(1+\beta-\frac{1}{2}p)\Gamma(1+\beta-p)\Gamma(1-a-\beta+\frac{1}{2}p)}{\Gamma(1+2\beta-p)\Gamma(1-\frac{1}{2}p)\Gamma(1-a+\frac{1}{2}p)}+$$
$$+\frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(p)}{\Gamma(1+p)}e^{i\pi p}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(a-p)\Gamma(\beta-p)\Gamma(1+\frac{1}{2}p)\Gamma(1+p-a)\Gamma(1+p-\beta)\Gamma(1+\frac{1}{2}p-a-\beta)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}p-a)\Gamma(1+\frac{1}{2}p-\beta)\Gamma(1+p-a-\beta)},$$

where Dixon's theorem is used with $a = 2a-p$, $b = a$, $c = a+\beta-p$ in summing

$${}_3F_2(a,2a-p,a+\beta-p;1+a-\beta,1+a-p;1)$$

and with $a = 2\beta-p$, $b = \beta$, $c = a+\beta-p$ in summing

$${}_3F_2(\beta,2\beta-p,a+\beta-p;1+\beta-a,1+\beta-p;1)$$

and finally with $a = p$, $b = a$, $c = \beta$ in summing

$${}_3F_2(p,a,\beta;1+p-a,1+p-\beta;1).$$

Thus

$$\text{(A)}\quad I = (2\pi)^{-1}\Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(a-\tfrac{1}{2}p)\Gamma(\beta-\tfrac{1}{2}p)\Gamma(a+\beta-p)\Gamma(1+\tfrac{1}{2}p-a-\beta)\times$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}p)\sin\pi(a-\tfrac{1}{2}p)\sin\pi(\beta-\tfrac{1}{2}p)\sin\tfrac{1}{2}\pi p\exp\tfrac{1}{2}i\pi p\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\beta-a)\sin\pi(p-a)\sin\pi(a-\frac{1}{2}p)}\exp i\pi(a-\tfrac{1}{2}p)+$$
$$+\frac{\sin\pi a}{\sin\pi(a-\beta)\sin\pi(p-\beta)\sin\pi(\beta-\frac{1}{2}p)}\exp i\pi(\beta-\tfrac{1}{2}p)+$$
$$+\frac{\sin\pi(a+\beta-p)}{\sin\pi(p-a)\sin\pi(p-\beta)\sin\frac{1}{2}\pi p}\exp\tfrac{1}{2}i\pi p\Bigg].$$

Now, to find the value of the expression between brackets [ ] in (A) consider the integral

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sin\pi(a+\beta-z)\exp[i\pi(z-\frac{1}{2}p)]}{\sin\pi(z-a)\sin\pi(z-\beta)\sin\pi(z-p)\sin\pi(z-\frac{1}{2}p)}\,dz,$$

where the contour Γ does not pass through any pole of the integrand.

If we choose Γ to be a large rectangle with sides parallel to the real and imaginary axes in the z-plane, then the contributions from the vertical lines cancel if we make the distance between them equal to an even integer. On the horizontal lines, the integrals tend towards $\exp(-\pi\eta-3\pi\eta)$ where η is the imaginary part of z on the horizontal lines. If Γ becomes very large, so that $\eta\to\infty$, then the integrals along the horizontal lines tend towards zero too. Thus the integral along the large rectangle Γ vanishes, so that, from Cauchy theorem, the sum of residues at the poles $a,\beta,p,\frac{1}{2}p$ is equal to zero. Thus the expression between brackets [ ] in (A) is equal to minus the residue at $z = \frac{1}{2}p$ of the integrand in (B). By substituting the value of this residue in (A), (1) follows after some reduction. The formula has been proved only when $\mathrm{R}(a+\beta-\frac{1}{2}p-1) < 0$, but by the theory of analytical continuation it is true for all values of

a, β, p for which none of the poles of $\Gamma(s)\Gamma(a-p+s)\Gamma(\beta-p+s)$ coincide with any of the poles of $\Gamma(a-s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(p-s)$.

I am indebted to the referee for his valuable suggestions.

Reference

[1] E.W. Barnes, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 6, (1908), p. 141-177.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY PRINCETON N. S., U. S. A.
EIN SHAMS UNIVERSITY ABBASIA CAIRO, U. A. R.

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur un problème de stabilité

par Z. OPIAL (Kraków)

Introduction. Dans le présent article j'étudie la stabilité de la solution identiquement nulle de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''+p(t)u = 0 \tag{1}$$

où $p(t)$ est une fonction continue et périodique de période ω. Sans restreindre la généralité on peut évidemment admettre que $\omega = \pi$. L'équation (1) étant linéaire et homogène, pour démontrer que l'intégrale $u(t) \equiv 0$ est stable pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$, il suffit de montrer que toutes les intégrales de cette équation sont bornées sur l'axe $(-\infty, +\infty)$ tout entier, ou, ce qui revient au même, que les deux intégrales indépendantes jouissent de cette propriété.

La première condition suffisante pour la stabilité de l'intégrale identiquement nulle de l'équation considérée a été donnée, il y a déjà plus de cinquante ans, par A. Liapounoff dans son mémoire *Problème général de la stabilité du mouvement* (v. [1]).

Voici l'énoncé du théorème de Liapounoff:

Si la fonction $p(t)$ continue, non identiquement nulle et périodique de période π satisfait aux conditions

$$p(t) \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \int_0^\pi p(t)\,dt \leqslant \frac{4}{\pi},$$

toutes les intégrales de l'équation (1) *sont bornées.*

Depuis ce temps, plusieurs auteurs se sont occupés de ce problème en généralisant et complétant de diverses manières les belles recherches de Liapounoff. En particulier, G. Borg a établi, entre autres, le théorème suivant:

Si la fonction $p(t)$ est de la forme $p(t) = a^2+q(t)$, où a est un nombre tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $q(t)$ est une fonction continue et périodique de période