$a_i^H > \frac{1}{2}$ (see [2]). Taking for $\overline{\mathfrak{N}}$ in theorem 2 the class of all non-empty subsets of the set $E = (1, 2)$, $n = p = 2$, $r_H = \gamma = 1$, we obtain the condition of Žak, $a_i^H > 2\beta_{k_i}$ (see [10]). The counter-examples given in these papers and concerning the strength of the results do not exhaust this problem. The author intends to take up this problem once more together with investigations concerning conditions of type (6.4) and (6.6).

Theorems 1, 1′ and 2 generalize many known theorems holding for single Fourier series to multiple Fourier series, *e. g.* all theorems in §§ 6.3, 6.31-6.34 and 6.6.5-6 in [9]([8]).

The results obtained may be generalized to certain classes of almost periodic functions of n variables, by the method used in [5].

References

[1] S. Bochner, *Summation of multiple Fourier series by spherical means*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), p. 175-207.

[2] З. Г. Челидзе, *Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье*, Доклады Акад. Наук СССР 54 (1946), p. 117-120.

[3] E. W. Hobson, *Theory of functions of a real variable I*, Cambridge 1927.

[4] S. Minakshisundaram and O. Szász, *On absolute convergence of multiple Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), p. 36-53.

[5] J. Musielak, *O bezwzględnej zbieżności szeregów Fouriera pewnych funkcji prawie okresowych*, Zeszyty Nauk. Uniw. im. A. Mickiewicza 1 (1957), p. 9-17.

[6] — *Some conditions sufficient for the absolute convergence of multiple Fourier series*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5(1957), p. 251-254.

[7] G. E. Reves and O. Szász, *Some theorems on double trigonometric series*, Duke Math. Journ. 9 (1942), p. 693-705.

[8] F. Riesz, *Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel*, Math. Zeitschr. 18 (1923), p. 117-124.

[9] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa-Lwów 1935.

[10] И. Е. Жак, *К абсолютной сходимости двойных рядов Фурье*, Сообщ. Ак. Наук Груз. ССР 12 (1951), p. 129-133.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 23. 6. 1956

([8]) It is easily seen that in theorem 6.31 in [9] it is sufficient to assume that $f(x)$ is of finite *r-th variation* for a certain $r < 2$ (see also [5], theorem 5).

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur un problème mixte pour l'équation du type hyperbolique

par G. Majcher (Kraków)

I. Cas de la dépendance linéaire entre la fonction $u(x, y)$ et ses dérivées sur la courbe Γ

§ 1. Enoncé du problème. Considérons une équation du type hyperbolique à deux variables indépendantes, réduite à la forme canonique

$$H[u] \equiv u''_{xy} + a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = f(x, y). \tag{1}$$

Soit D un domaine limité par la demi-droite caractéristique $y = 0$, $x \geqslant 0$ de l'équation (1), par la droite $x = x_0$, $x_0 > 0$ et par une courbe Γ issue de l'origine et représentée par l'équation:

$$x = \theta(y), \quad y \geqslant 0 \quad (\text{ou} \quad y = \tau(x), \quad x \geqslant 0),$$

où $\theta'(y) > 0$, $\theta(0) = 0$.

Nous nous proposons de trouver une intégrale $u(x, y)$ de l'équation (1) *qui soit de classe C^1 dans la fermeture $\overline{D}$ du domaine D, admette une dérivée partielle u''_{xy} continue dans cet ensemble et satisfasse aux conditions aux limites*

$$A(y)u'_x(x, y) + B(y)u'_y(x, y) + C(y)u(x, y) = g(y), \tag{2}$$

pour $x = \theta(y)$, $y \geqslant 0$ *et*

$$u(x, 0) = h(x) \quad \textit{pour} \quad x \geqslant 0. \tag{3}$$

Dans la suite le problème posé sera appelé brièvement *problème* (M)([1]).

Nous démontrerons dans cette partie du travail l'existence de la solution du problème (M).

§ 2. Existence de la solution du problème (*M*). **1.** Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

([1]) Ce problème a été posé par M. Krzyżański.

(I) — dans le cas de $B(y) \neq 0$ [2]

(H_{11}) les coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ et la fonction $f(x, y)$ sont continus dans $\bar{D}$;

(H_{12}) la fonction $h(x)$ est de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, x_0 \rangle$;

(H_{13}) $h(0) = 0$ (voir remarque plus loin);

(H_{14}) le coefficient $B(y) \neq 0$ dans l'intervalle $\langle 0, y_0 = \tau(x_0) \rangle$;

(H_{15}) les fonctions $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ et $g(y)$ sont continues dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$;

(H_{16}) la fonction $x = \theta(y)$ est de classe C^1, $\theta(0) = 0$ et $\theta'(y) > 0$ pour $y \geqslant 0$.

(II) — dans le cas de $B(y) \equiv 0$

(H_{21}) les coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ et la fonction $f(x, y)$ sont de classe C^1 dans $\bar{D}$;

(H_{22}) la fonction $h(x)$ est de classe C^2 dans l'intervalle $\langle 0, x_0 \rangle$;

(H_{23}) $h(0) = 0$ (voir remarque plus loin);

(H_{24}) $B(y) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$;

(H_{25}) les fonctions $A(y)$, $C(y)$ et $g(y)$ sont de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$;

(H_{26}) $C(y) - b\big(\theta(y), y\big) A(y) \neq 0$ dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$;

(H_{27}) la fonction $x = \theta(y)$ est de classe C^1, $\theta(0) = 0$ et $\theta'(y) > 0$ pour $y \geqslant 0$.

Remarque. Le problème (M), où $h(0) \neq 0$, peut toujours être ramené au cas où $h(0) = 0$. En effet, soit $\bar{u}(x, y)$ ($(x, y) \in \bar{D}$) la solution du problème de Picard pour l'équation homogène $H[u] = 0$ qui se réduit, sur Γ et sur $y = 0$ ($x \geqslant 0$), à des fonctions arbitrairement données, pourvu que $\bar{u}(0, 0) = h(0)$. Soit $\tilde{u}(x, y)$ la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions

$$A(y) u'_x + B(y) u'_y + C(y) u = \tilde{g}(y) \qquad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où $\tilde{g}(y) = g(y) - A(y)\bar{u}'_x - B(y)\bar{u}'_y - C(y)\bar{u}$, et

$$u(x, 0) = \tilde{h}(x),$$

où $\tilde{h}(x) = h(x) - \bar{u}(x, 0)$, $\tilde{h}(0) = 0$.

La somme $\bar{u}(x, y) + \tilde{u}(x, y) = u(x, y)$ est alors la solution du problème (M) avec $h(0) \neq 0$.

[2] Le problème (M) dans le cas I, de même que le problème (MM) (voir p. 125) sont des cas particuliers d'un problème plus général, considéré par Z. Szmydt [5], mais la méthode appliquée par Z. Szmydt est tout à fait différente de la nôtre. De plus, Z. Szmydt n'a pas étudié le problème (M) dans le cas II, considéré dans ce travail.

2. Soit $V(x, y; s, t)$ la fonction de Riemann (voir [1], p. 140) pour l'équation homogène

$$H[u] \equiv u''_{xy} + a(x, y) u'_x + b(x, y) u'_y + c(x, y) u = 0. \tag{1'}$$

Nous cherchons une solution du problème (M) de la forme suivante:

$$u(x, y) = \int_{\theta(y)}^{x} V\big(x, y; s, \tau(s)\big)\varphi(s)\,ds\ [3] + \int_0^y V(x, y; x_0, t)\psi(t)\,dt - \int_{\theta(y)}^{x}\Big[\int_x^{\tau(s)} V(x, y; s, t) f(s, t)\,dt\Big] ds, \tag{4}$$

où les fonctions inconnues φ et ψ sont supposées continues. Nous allons les déterminer de manière que la fonction $u(x, y)$, définie par la formule (4), satisfasse aux conditions (2) et (3).

3. Il est facile de démontrer que les deux premières intégrales de la somme (4) satisfont à l'équation (1') pour tout couple de fonctions φ et ψ continues, tandis que la dernière intégrale vérifie l'équation $H[u] = -f(x, y)$. Alors (4) est la solution de l'équation (1) pour des fonctions φ et ψ arbitraires, continues.

4. Pour déterminer les fonctions φ et ψ remarquons que dans la somme (4) la première et la troisième intégrale s'annulent sur Γ, c'est-à-dire pour $x = \theta(y)$, tandis que la seconde s'annule sur la demi-droite caractéristique $y = 0$, $x \geqslant 0$. Il s'agit alors de déterminer les fonctions φ et ψ de façon qu'elles satisfassent respectivement aux équations

$$\int_0^x V\big(x, 0; s, \tau(s)\big)\varphi(s)\,ds = \int_0^x \Big[\int_0^{\tau(s)} V(x, 0; s, t) f(s, t)\,dt\Big] ds + h(x), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} B(y) V\big(\theta(y), y; x_0, y\big)\psi(y) + \int_0^y \big[A(y) V'_x\big(\theta(y), y; x_0, t\big) + {} \\ + B(y) V'_y\big(\theta(y), y; x_0, t\big) + C(y) V\big(\theta(y), y; x_0, t\big)\big]\psi(t)\,dt \\ = -A(y)\varphi\big(\theta(y)\big) + B(y)\varphi\big(\theta(y)\big)\theta'(y) + g(y). \end{aligned} \tag{6}$$

5. L'équation intégrale (5) est une équation de Volterra de première espèce. Son noyau $V\big(x, 0; s, \tau(s)\big)$ est continu avec la dérivée partielle V'_x. On peut alors, en vertu de (H_{11})-(H_{13}), dériver l'équation (5) membre

[3] Les intégrales de ce type ont été introduites par Le Roux, voir [2], p. 239. On les retrouve chez O. Sjöstrand, voir [3], p. 5.

à membre. Comme $V(x, 0; x, \tau(x)) \neq 0$ pour chaque $x \geqslant 0$, on aboutit ainsi à l'équation

$$\varphi(x) = \int_0^x N(x, s)\varphi(s)\,ds + \bar{h}(x), \tag{7}$$

où

$$N(x, s) = -\frac{V'_x(x, 0; s, \tau(s))}{V(x, 0; x, \tau(x))},$$

$$\bar{h}(x) = \frac{1}{V(x, 0; x, \tau(x))}\Big\{\int_0^{\tau(x)} V(x, 0; x, t) f(x, t)\,dt + \\ + \int_0^x \Big[\int_0^{\tau(s)} V'_x(x, 0; s, t) f(s, t)\,dt\Big]\,ds + h'(x)\Big\}.$$

L'équation (7) a une seule solution de la forme

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathfrak{N}(x, s)\bar{h}(s)\,ds + \bar{h}(x),$$

où $\mathfrak{N}(x, s)$ est le noyau résolvant (voir [4], p. 13) de l'équation (7).

6. Nous allons maintenant considérer l'équation (6). Il faut distinguer ici deux cas: 1) $B(y) \neq 0$, 2) $B(y) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle 0, y_0\rangle$.

Dans le premier cas on peut diviser les deux membres de l'équation (6) par $B(y)V(\theta(y), y; x_0, y) \neq 0$ (pour $0 \leqslant y \leqslant y_0$) et obtenir ainsi une équation de Volterra de seconde espèce de la forme

$$\psi(y) = \int_0^y \bar{N}(y, t)\psi(t)\,dt + \bar{g}(y), \tag{8}$$

où

$$\bar{N}(y, t) = -\frac{1}{B(y)V(\theta(y), y; x_0, y)}\big[A(y)V'_x(\theta(y), y; x_0, t) + \\ + B(y)V'_y(\theta(y), y; x_0, t) + C(y)V(\theta(y), y; x_0, t)\big],$$

$$\bar{g}(y) = \frac{1}{B(y)V(\theta(y), y; x_0, y)}\big[-A(y)\varphi(\theta(y)) + B(y)\varphi(\theta(y))\theta'(y) + g(y)\big].$$

La solution de l'équation (8) est unique et elle a la forme

$$\psi(y) = \int_0^y \bar{\mathfrak{N}}(y, t)\bar{g}(t)\,dt + \bar{g}(y),$$

où $\bar{\mathfrak{N}}(y, t)$ est le noyau résolvant de l'équation (8).

7. Si $B(y) \equiv 0$, (6) est une équation de Volterra de première espèce. On en déduit l'équation

$$\psi(y) = \int_0^y \bar{\bar{N}}(y, t)\psi(t)\,dt + \bar{\bar{g}}(y), \tag{8'}$$

où

$$\bar{\bar{N}}(y, t) = -\frac{A'(y)V'_x + A(y)V''_{xx}\theta'(y) + A(y)V''_{xy} + C(y)V'_x\theta'(y) + C(y)V'_x}{[C(y) - b(\theta(y), y)A(y)]\,V(\theta(y), y; x_0, y)}$$

(la fonction V et ses dérivées correspondent à $(\theta(y), y; x_0, t)$),

$$\bar{\bar{g}}(y) = \frac{-A'(y)\varphi(\theta(y)) - A(y)\varphi'_x(\theta(y))\theta'(y) + g'(y)}{[C(y) - b(\theta(y), y)A(y)]\,V(\theta(y), y; x_0, y)}.$$

Comme les coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$ et $c(x, y)$ sont, en vertu de l'hypothèse (H_{21}), de classe C^1 dans $\bar{D}$ il en résulte que la fonction de Riemann $V(x, y; s, t)$ est de classe C^2 par rapport à x et y dans ce domaine. L'hypothèse que la fonction $f(x, y)$ est de classe C^1 dans $\bar{D}$ et les hypothèses (H_{22}) et (H_{23}) nous permettent de trouver la fonction $\varphi(x)$ (solution de l'équation (7)) de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, x_0\rangle$. Tout cela avec les hypothèses (H_{26}) et (H_{27}) assure la continuité du noyau $\bar{\bar{N}}(y, t)$ dans le triangle $\{0 \leqslant y \leqslant y_0, 0 \leqslant t \leqslant y\}$ et de la fonction $g(y)$ dans l'intervalle $\langle 0, y_0\rangle$. La solution de l'équation (8') est alors aussi de la forme

$$\psi(y) = \int_0^y \bar{\bar{\mathfrak{N}}}(y, t)\bar{\bar{g}}(t)\,dt + \bar{\bar{g}}(y),$$

où $\bar{\bar{\mathfrak{N}}}(y, t)$ est le noyau résolvant de l'équation (8').

II. Cas de la dépendance non linéaire entre la fonction $u(x, y)$ et ses dérivées sur la courbe Γ

§ 1. Enoncé du problème. Soit D le domaine défini dans la première partie de ce travail.

Nous nous proposons de trouver une intégrale $u(x, y)$ de l'équation

$$H[u] = u''_{xy} + a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = \lambda f(x, y), \tag{9}$$

qui soit de classe C^1 dans la fermeture $\bar{D}$ du domaine D, admette une dérivée partielle u''_{xy} continue dans cet ensemble, et satisfasse aux conditions aux limites

$$u'_y = \mu\Phi(y, u, u'_x), \tag{10}$$

pour $x = \theta(y)$, $y \geqslant 0$ et

$$u(x, 0) = \nu h(x) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0; \tag{11}$$

λ, μ, ν sont des paramètres constants.

Ce problème sera appelé simplement *problème* (MM) [4].

Le but de cette partie du travail est la solution du problème (MM) et la recherche des conditions de son existence.

§ 2. Existence de la solution du problème (MM). **1.** Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

(H_{31}) les coefficients $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ et la fonction $f(x,y)$ sont continus dans $\overline{D}$;

(H_{32}) la fonction $h(x)$ est de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, x_0\rangle$;

(H_{33}) $h(0) = 0$ [5],

(H_{34}) la fonction $\Phi(y,u,v)$, considérée comme fonction de trois variables, est définie dans un domaine de l'espace à 3 dimensions

$$\overline{T}\{0\leqslant y\leqslant y_0,\ |u|\leqslant R_1,\ |v|\leqslant R_2\},$$

où R_1 et R_2 sont des nombres constants, positifs;

(H_{35}) la fonction Φ est continue par rapport à y dans l'intervalle $\langle 0, y_0\rangle$;

(H_{36}) la fonction Φ satisfait dans le domaine $\overline{T}$ à la condition de Lipschitz relativement à u et v, c'est-à-dire qu'étant données des valeurs de y, u_1, u_2, v_1, v_2, comprises dans les intervalles $0\leqslant y\leqslant y_0$, $|u|\leqslant R_1$, $|v|\leqslant R_2$, on a

$$|\Phi(y,u_2,v_2)-\Phi(y,u_1,v_1)|\leqslant k[|u_2-u_1|+|v_2-v_1|]$$

k étant un nombre positif;

(H_{37}) les paramètres λ, μ, et ν satisfant à l'inégalité

$$\delta|\mu|+(\beta/M_{V'_x}+\varepsilon)(\gamma|\lambda|+M_{h'}|\nu|)\leqslant R,$$

$\delta, \beta, \varepsilon, \gamma, M_{V'_x}, M_{h'}$, et R étant des nombres positifs, indépendants de λ, μ et ν définis de manière suivante: M désigne la borne supérieure de la valeur absolue de la fonction, considérée dans tout l'ensemble dans lequel elle est définie. Par exemple

$$M_f = \sup_{(x,y)\in\overline{D}}|f(x,y)|.$$

Les autres notations sont:

$$m_V = \min\Big[\inf_{0\leqslant x\leqslant x_0} V\big(x,0,x,\tau(x)\big),\ \inf_{\substack{0\leqslant y\leqslant\tau(x)\\ 0\leqslant x\leqslant x_0}} V\big(\theta(y),y;x_0,y\big)\Big],$$

$$\delta = M_\Phi y_0\alpha,$$

(4) Le problème (MM) est une généralisation du problème (M). L'idée d'une telle généralisation du problème (M) est due à W. Pogorzelski.

(5) On peut faire ici une remarque analogue à celle de la page 122.

$$\alpha = m_V^{-1}[1+m_V^{-1}M_{V'_y}y_0\exp(m_V^{-1}M_{V'_y}y_0)],$$

$$\beta = m_V^{-1}[1+m_V^{-1}M_{V'_x}x_0\exp(m_V^{-1}M_{V'_x}x_0)],$$

$$\varepsilon = \alpha\beta M_{\theta'}y_0,$$

$$\gamma = M_f y_0(M_V+M_{V'_x}x_0),$$

$$R = \min[R_1/M_V,\ R_2/M_{V'_x}].$$

2. Il est facile de vérifier que la fonction

$$u(x,y) = \int_{\theta(y)}^{x} V\big(x,y;s,\tau(s)\big)\varphi(s)\,ds+\int_0^y V(x,y;x_0,t)\psi(t)\,dt - \tag{12}$$
$$-\lambda\int_{\theta(y)}^{x}\Big[\int_y^{\tau(s)} V(x,y;s,t)f(s,t)\,dt\Big]ds\ \text{[6]}$$

est la solution de l'équation (9), pour tout couple de fonctions φ et ψ arbitraires, continues. Comme dans la partie précédente de ce travail, nous allons déterminer les fonctions φ et ψ de manière que la fonction $u(x,y)$ définie par la formule (12) satisfasse aux conditions (10) et (11). On en déduit facilement pour φ et ψ les équations intégrales suivantes:

$$\varphi(x) = \int_0^x N(x,s)\varphi(s)\,ds+\overline{h}(x;\lambda,\nu), \tag{13}$$

où

$$N(x,s) = -\frac{V'_x\big(x,0;s,\tau(s)\big)}{V\big(x,0;x,\tau(x)\big)},$$

$$\overline{h}(x;\lambda,\nu) = \frac{1}{V\big(x,0;x,\tau(x)\big)}\Big\{\lambda\int_0^{\tau(x)} V(x,0;x,t)f(x,t)\,dt+$$
$$+\lambda\int_0^x\Big[\int_0^{\tau(s)} V'_x(x,0;s,t)f(s,t)\,dt\Big]ds+\nu h'(x)\Big\},$$

et

$$\psi(y) = \frac{1}{V\big(\theta(y),y;x_0,y\big)}\Big\{\mu\Phi\Big[y,\int_0^y V\big(\theta(y),y;x_0,t\big)\psi(t)\,dt, \tag{14}$$
$$\varphi\big(\theta(y)\big)+\int_0^y V'_x\big(\theta(y),y;x_0,t\big)\psi(t)\,dt\Big]-$$
$$-\int_0^y V'_y\big(\theta(y),y;x_0,t\big)\psi(t)\,dt+\varphi\big(\theta(y)\big)\theta'(y)\Big\}.$$

(6) $V(x,y;s,t)$ est la même fonction de Riemann que nous avons introduite dans la première partie du travail.

3. Les équations (13) et (7) sont analogues. Nous nous occuperons donc de l'équation (14).

Supposons d'abord pour l'instant que la fonction Φ soit connue et considérons (14) comme une équation linéaire de Volterra de seconde espèce, de la forme

$$(15)\qquad \psi(y)=\int_0^y K(y,t)\psi(t)\,dt+p(y),$$

où

$$K(y,t)=-\frac{V'_y(\theta(y),y;x_0,t)}{V(\theta(y),y;x_0,y)},\qquad p(y)=\frac{\mu\Phi(\dots)+\varphi(\theta(y))\theta'(y)}{V(\theta(y),y;x_0,y)}.$$

Soit $\mathfrak{K}(y,t)$ le noyau résolvant de l'équation (15). Nous avons

$$(16)\qquad \psi(y)=\int_0^y \mathfrak{K}(y,t)p(t)\,dt+p(y),$$

où

$$(17)\qquad \mathfrak{K}(y,t)=K(y,t)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(y,t),$$

$$(18)\qquad K_n(y,t)=\int_t^y K(y,z)K_{n-1}(z,t)\,dz\qquad (K_0=K).$$

L'équation (14) est alors équivalente à l'équation

$$(19)\qquad \psi(y)=\mu\int_0^y\frac{\mathfrak{K}(y,t)}{V(\theta(t),t;x_0,t)}\Phi\Big[t,\int_0^t V(\theta(t),t;x_0,z)\psi(z)\,dz,$$
$$\varphi(\theta(t))+\int_0^t V'_x(\theta(t),t;x_0,z)\psi(z)\,dz\Big]dt+$$
$$+\frac{\mu}{V(\theta(y),y;x_0,y)}\Phi\Big[y,\int_0^y V(\theta(y),y;x_0,z)\psi(z)\,dz,$$
$$\varphi(\theta(y))+\int_0^y V'_x(\theta(y),y;x_0,z)\psi(z)\,dz\Big]+F(y),$$

où

$$(20)\qquad F(y)=\int_0^y\frac{\mathfrak{K}(y,t)}{V(\theta(t),t;x_0,t)}\varphi(\theta(t))\theta'(t)\,dt+\frac{\varphi(\theta(y))\theta'(y)}{V(\theta(y),y;x_0,y)}$$

est une fonction connue.

4. L'équation (19) est une équation intégrale non linéaire, avec la fonction inconnue $\psi(y)$. Nous la résoudrons par la méthode des approximations successives[7].

D'après cette méthode nous définissons une suite de fonctions

$$(21)\qquad \psi_0(y),\ \psi_1(y),\ \dots,\ \psi_n(y),\ \dots$$

par la formule de récurrence

$$(22)\qquad \psi_{n+1}(y)=\mu\int_0^y\frac{\mathfrak{K}(y,t)}{V(\theta(t),t;x_0,t)}\Phi\Big[t,\int_0^t V(\theta(t),t;x_0,z)\psi_n(z)\,dz,$$
$$\varphi(\theta(t))+\int_0^t V'_x(\theta(t),t;x_0,z)\psi_n(z)\,dz\Big]dt+$$
$$+\frac{\mu}{V(\theta(y),y;x_0,y)}\Phi\Big[y,\int_0^y V(\theta(y),y;x_0,z)\psi_n(z)\,dz,$$
$$\varphi(\theta(y))+\int_0^y V'_x(\theta(y),y;x_0,z)\psi_n(z)\,dz\Big]+F(y).$$

Nous démontrerons plus loin que:

1) Grâce à l'hypothèse (H_{37}), en choisissant convenablement la première valeur approchée $\psi_0(y)$, les fonctions de la suite (21) sont définies pour chaque $n=0,1,2,\dots$ par la formule (22).

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(y)=\psi(y)$ existe dans tout l'intervalle $\langle 0,y_0\rangle$ et la fonction limite $\psi(y)$ est la solution de l'équation (19), et par conséquent aussi de l'équation (14).

3) La solution ainsi obtenue est unique.

5. La solution de l'équation (13) est de la forme

$$(23)\qquad \varphi(x)=\int_0^x \mathfrak{N}(x,s)\bar h(s;\lambda,\nu)\,ds+\bar h(x;\lambda,\nu)$$

où le noyau résolvant

$$(24)\qquad \mathfrak{N}(x,s)=N(x,s)+\sum_{n=1}^{\infty}N_n(x,s),$$

$$N_n(x,s)=\int_s^x N(x,z)N_{n-1}(z,s)\,dz\qquad (N_0=N).$$

(7) En résolvant par cette méthode l'équation (14) directement, nous pourrions obtenir une solution définie seulement dans une partie du domaine D.

Mais (voir p. 127)

$$|\bar{h}(x;\lambda,\nu)| \leqslant m_{\bar{V}}^{-1}[|\lambda| M_V M_f y_0 + |\lambda| M_{V'_x} M_f y_0 x_0 + |\nu| M_{h'}]$$
$$= m_{\bar{V}}^{-1}[|\lambda|(M_V + M_{V'_x} x_0) M_f y_0 + |\nu| M_{h'}],$$

donc il résulte de (23) que

$$(25)\qquad |\varphi(x)| \leqslant M_{\mathfrak{N}} M_{\bar{h}} x_0 + M_{\bar{h}}$$
$$\leqslant m_{\bar{V}}^{-1}(M_{\mathfrak{N}} x_0 + 1)[|\lambda|(M_V + M_{V'_x} x_0) M_f y_0 + |\nu| M_{h'}].$$

Ensuite nous avons (voir [4], p. 12)

$$|N_n(x,s)| \leqslant M_N^{n+1}\frac{|x-s|^n}{n!},$$

et de (24)

$$|\mathfrak{N}(x,s)| \leqslant M_N + \sum_{n=1}^{\infty} M_N^{n+1}\frac{|x-s|^n}{n!} = M_N \exp(M_N|x-s|)$$
$$\leqslant M_N \exp(M_N x_0) \leqslant m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_x} \exp(m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_x} x_0),$$

car $|N(x,s)| = \dfrac{|V'_x(x,0;s,\tau(s))|}{V(x,0;x,\tau(x))}$ (voir p. 127), donc $M_N \leqslant m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_x}$.

Finalement nous obtenons l'évaluation

$$(26)\qquad M_{\mathfrak{N}} \leqslant m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_x} \exp(m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_x} x_0).$$

En profitant des inégalités (25), (26) et des notations introduites dans l'hypothèse (H_{37}) nous pouvons écrire

$$(27)\qquad M_\varphi \leqslant \beta(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|).$$

6. Un raisonnement analogue à celui qui concerne l'évaluation du noyau résolvant $\mathfrak{N}(x,s)$, fournit aussi, d'après (15), (17) et (18), l'inégalité

$$(28)\qquad M_{\mathfrak{K}} \leqslant m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_y} \exp(m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_y} y_0).$$

D'autre part nous avons pour la fonction $F(y)$ introduite dans l'équation (19)

$$(29)\qquad M_F \leqslant m_{\bar{V}}^{-1} M_\varphi M_{\theta'}(M_{\mathfrak{K}} y_0 + 1).$$

7. Pour démontrer l'existence de la suite (21) supposons que $M_{\psi_n} = \sup_{y \in \langle 0, y_0\rangle} |\psi_n(y)|$ satisfasse aux inégalités suivantes:

$$(30)\qquad M_V M_{\psi_n} y_0 \leqslant R_1, \qquad M_\varphi + M_{V'_x} M_{\psi_n} y_0 \leqslant R_2.$$

La fonction Φ figurant dans (22) est alors définie. Nous allons démontrer que pour la fonction ψ_{n+1} définie par la formule (22) le nombre $M_{\psi_{n+1}}$ satisfait à des inégalités analogues à (30).

En effet, les relations (22), (29), (28) et (27) entraînent la suivante:

$$|\psi_{n+1}| \leqslant |\mu| m_{\bar{V}}^{-1} M_{\mathfrak{K}} M_\Phi y_0 + |\mu| m_{\bar{V}}^{-1} M_\Phi + M_F$$
$$\leqslant m_{\bar{V}}^{-1}(M_{\mathfrak{K}} y_0 + 1)(M_\Phi|\mu| + M_\varphi M_{\theta'})$$
$$\leqslant m_{\bar{V}}^{-1}[1 + m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_y} y_0 \exp(m_{\bar{V}}^{-1} M_{V'_y} y_0)][M_\Phi|\mu| + \beta M_{\theta'}(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)],$$

d'où

$$(31)\qquad M_{\psi_{n+1}} \leqslant \alpha[M_\Phi|\mu| + \beta M_{\theta'}(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)].$$

Donc nous tirons d'abord, de (27), (31) et de l'hypothèse (H_{37})

$$M_V M_{\psi_{n+1}} y_0 \leqslant M_V[\delta|\mu| + \varepsilon(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)]$$
$$\leqslant M_V[\delta|\mu| + (\beta/M_{V'_x} + \varepsilon)(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)] \leqslant M_V R \leqslant R_1,$$

et ensuite

$$M_\varphi + M_{V'_x} M_{\psi_{n+1}} y_0$$
$$\leqslant \beta(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|) + M_{V'_x} y_0 \alpha[M_\Phi|\mu| + \beta M_{\theta'}(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)]$$
$$= M_{V'_x}[\delta|\mu| + (\beta/M_{V'_x} + \varepsilon)(\gamma|\lambda| + M_{h'}|\nu|)] \leqslant M_{V'_x} R \leqslant R_2.$$

Prenons maintenant pour $\psi_0(y)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, y_0\rangle$ telle que

$$(30')\qquad M_V M_{\psi_0} y_0 \leqslant R_1, \qquad M_\varphi + M_{V'_x} M_{\psi_0} y_0 \leqslant R_2.$$

Finalement nous concluons par induction que les fonctions $\psi_n(y)$ de la suite (21) sont définies dans l'intervalle $\langle 0, y_0\rangle$ et pour toute valeur de n.

8. Pour démontrer la convergence de la suite (21) étudions les différences entre les fonctions (21) en leurs valeurs absolues. Nous avons, d'après la relation (22) et l'hypothèse (H_{36}),

$$|\psi_{n+1}(y) - \psi_n(y)| \leqslant |\mu| \int_0^y m_{\bar{V}}^{-1} M_{\mathfrak{K}} k \Big[\Big|\int_0^t V(\theta(t), t; x_0, z)(\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z))\,dz\Big| +$$
$$+ \Big|\int_0^t V'_x(\theta(t), t; x_0, z)(\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z))\,dz\Big|\Big] dt +$$
$$+ |\mu| m_{\bar{V}}^{-1} k \Big[\Big|\int_0^y V(\theta(y), y; x_0, z)(\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z))\,dz\Big| +$$
$$+ \Big|\int_0^y V'_x(\theta(y), y; x_0, z)(\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z))\,dz\Big|\Big],$$

d'où il résulte pour chaque $n = 1, 2, \ldots$

$$(32)\qquad |\psi_{n+1}(y) - \psi_n(y)| \leqslant \omega \int_0^y |\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z)|\,dz,$$

avec

$$\omega = |\mu| m_V^{-1} k (M_V + M_{V'_x})(M_{\mathfrak{K}} y_0 + 1).$$

En posant $l = \sup_{z \epsilon \langle 0, y_0 \rangle} |\psi_1(z) - \psi_0(z)|$ nous tirons de (32), en raisonnant de proche en proche, que pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\psi_{n+1}(y) - \psi_n(y)| \leqslant \omega^n l \frac{y^n}{n!} = l \frac{(\omega y)^n}{n!},$$

ce qui prouve que la série

$$\psi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{n+1}(y) - \psi_n(y)]$$

est uniformément et absolument convergente dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$. Par conséquent la suite (21) converge uniformément dans le même intervalle vers la fonction limite $\psi(y)$, définie et continue dans cet intervalle.

9. La fonction $\psi(y)$ représente la solution de l'équation (19).

En effet, le nombre M_ψ satisfait aux inégalités analogues à (30) et (30'), c'est pourquoi la fonction Φ dans l'équation (19) est définie dans l'intervalle $\langle 0, y_0 \rangle$. De la convergence uniforme de la suite (21) et de l'hypothèse (H_{36}) résulte en outre que pour $y \epsilon \langle 0, y_0 \rangle$

$$\Phi \Big[y, \int_0^y V\big(\theta(y), y; x_0, z\big) \psi_n(z) dz, \varphi\big(\theta(y)\big) + \int_0^y V'_x\big(\theta(y), y; x_0, z\big) \psi_n(z) dz \Big]$$

tend, lorsque n augmente, vers

$$\Phi \Big[y, \int_0^y V\big(\theta(y), y; x_0, z\big) \psi(z) dz, \varphi\big(\theta(y)\big) + \int_0^y V'_x\big(\theta(y), y; x_0, z\big) \psi(z) dz \Big].$$

Tout cela avec la relation (22) prouve que la fonction limite $\psi(y)$ vérifie l'équation (19) et aussi l'équation (14).

La solution obtenue est unique.

Supposons que l'équation (19) admette une autre solution $\overline{\psi}(y) \neq \psi(y)$. Des calculs analogues aux précédents nous conduisent à la relation

$$|\psi_{n+1}(y) - \overline{\psi}(y)| \leqslant \bar{l} \frac{(\omega_y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où $\bar{l} = \sup_{z \epsilon \langle 0, y_0 \rangle} |\psi_0(z) - \overline{\psi}(z)|$.

Quand $n \to \infty$, la différence $\psi_{n+1}(y) - \overline{\psi}(y)$ converge uniformément dans $\langle 0, y_0 \rangle$ vers 0, ce qui prouve que $\overline{\psi}(y) \equiv \psi(y)$.

III. Unicité de la solution du problème (M) et du problème (MM)

1. Sous les hypothèses (H_{31})-(H_{37}) la solution du problème (MM) est unique.

Prenons d'abord une solution quelconque $\overline{u}(x, y)$ de l'équation (9) dans le domaine $\overline{D}$. Nous connaissons alors sa valeur sur Γ et sur la caractéristique $y = 0$.

D'après la première partie de ce travail une solution $u(x, y)$ du problème de Picard pour l'équation (9) avec les valeurs aux limites

$$u(x, y) = \overline{u}(x, y) \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{et} \quad u(x, 0) = \overline{u}(x, 0)$$

peut être mise sous la forme (12). La solution du problème de Picard étant unique, on doit avoir $\overline{u}(x, y) \equiv u(x, y)$ dans $\overline{D}$ et par conséquent toute solution de l'équation (9) peut être écrite sous la forme (12) avec des fonctions φ et ψ convenablement choisies. D'autre part, comme nous venons de le démontrer dans la seconde partie de ce travail, parmi tous les couples de fonctions φ et ψ (qui correspondent aux différentes solutions de l'équation (9)) il en existe seulement un, pour lequel la somme (12) vérifie les conditions aux limites (10) et (11).

L'unicité de la solution du problème (MM) est donc prouvée.

2. Le raisonnement concernant l'unicité de la solution du problème (M) est analogue.

Travaux cités

[1] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique, III*, Paris 1942.

[2] Le Roux, *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du sec. ordre à deux var. indép.*, Annales de l'Ec. Norm. Sup., série 3, 12 (1895).

[3] O. Sjöstrand, *Sur le problème de M. Goursat pour les équations aux dérivées partielles du second ordre ou de l'ordre supérieure*, Göteborg 1929.

[4] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. I, Warszawa 1953.

[5] Z. Szmydt, *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 67-72.

Reçu par la Rédaction le 26. 6. 1956