ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur l'existence des solutions bornées de systèmes d'équations différentielles non linéaires

par C. CORDUNEANU (Jassy)

Nous allons considérer dans cette note des systèmes différentiels de la forme

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $a_{ij}(t)$ et $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions complexes définies pour toute valeur réelle de t et pour $\|x\| \leqslant a$ $(0 < a \leqslant +\infty)$. On admet toujours que les fonctions $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont continues et bornées sur l'axe réel. Les résultats énoncés ci-dessous s'obtiennent par la méthode de O. Perron [1], avec quelques précisions et simplifications.

Considérons tout d'abord le système

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lequel $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions continues et bornées sur l'axe réel.

S. P. Diliberto [2] a montré (en précisant un résultat de Perron) qu'il existe une matrice unitaire $(b_{ij}(t))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ dont la dérivée est continue et bornée sur l'axe réel tout entier, telle que les fonctions

$$(3)\qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

satisfont au système différentiel

$$(4)\qquad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=i}^{n} c_{ij}(t)y_j + g_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $c_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont bornées sur l'axe réel et $g_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. De plus, les fonctions $b_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ peuvent être choisies de telle manière que $b_{ij}(0) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Soit $C_i(t) = \int_0^t c_{ii}(\tau)\,d\tau$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lemme I. *Le système* (2) *admettra au moins une solution bornée sur l'axe réel, quelles que soient les fonctions continues et bornées* $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *si et seulement si l'on a pour tout indice* $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{ll} \exp C_i(t) & \textit{bornée,} \\ \exp C_i(t) \int_0^t \exp[-\mathrm{re}\{C_i(\tau)\}]\,d\tau & \textit{bornée,} \end{array}$$

ou

$$\text{(B)}\quad \begin{array}{ll} \exp C_i(t) & \textit{non bornée,} \\ \exp C_i(t) \int_{-\infty}^t \exp[-\mathrm{re}\{C_i(\tau)\}]\,d\tau & \textit{bornée,} \end{array}$$

ou bien

$$\text{(C)}\quad \begin{array}{ll} \exp C_i(t) & \textit{non bornée,} \\ \exp C_i(t) \int_t^{\infty} \exp[-\mathrm{re}\{C_i(\tau)\}]\,d\tau & \textit{bornée} \end{array}$$

sur tout l'axe réel.

Plus précisément, s'il existe k *indices* $(k > 0)$ *pour lesquels le cas* (A) *a lieu (nous les désignerons par* $i_1, \ldots, i_k$*), le système* (2) *admettra une famille à* k *paramètres de solutions bornées sur l'axe réel tout entier. Une solution appartenant à cette famille est déterminée d'une façon unique par les conditions*

$$x_{ij}(0) = x_j^0 \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{5}$$

Remarque 1. Dans le cas où $k = 0$, il existe une seule solution bornée.

Remarque 2. Il est aisé de voir que les cas (B) et (C) sont incompatibles. S'il existe l indices pour lesquels le cas (B) a lieu, le système (2) admet une famille à $(k+l)$ paramètres de solutions bornées sur le demi-axe $t \geqslant 0$ et une famille $(n-l)$-paramétrique de solutions bornées sur le demi-axe $t \leqslant 0$.

Considérons maintenant l'espace des fonctions-vecteurs à n composantes $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ continues et bornées sur tout l'axe réel. La norme sera définie par

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{j=1}^{n} \sup_t |x_j(t)|, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{6}$$

Lemme II. *La solution bornée du système* (2), *déterminée à l'aide des conditions* (5), *satisfait à l'inégalité*

$$\|\boldsymbol{x}\| \leqslant P \sum_{j=i_A} |x_j^0| + Q\|\boldsymbol{f}\|, \tag{7}$$

P et Q étant deux nombres positifs qui dépendent seulement de la matrice $(a_{ij}(t))$.

Remarque. On peut d'ailleurs préciser les constantes P et Q, en tenant compte des conditions (A), (B) et (C).

Maintenant, on peut passer aux systèmes non linéaires à l'aide du principe du point fixe de Banach.

Théorème I. *Admettons, en dehors des hypothèses de continuité dans tout l'espace des* $(t, x_1, \ldots, x_n)$, *que la partie non linéaire du système* (1) *y satisfasse à la condition de Lipschitz*

$$\|\boldsymbol{f}(t, x_1, \ldots, x_n) - \boldsymbol{f}(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\| \leqslant L\|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\|, \tag{8}$$

où

$$L < 1/Q. \tag{9}$$

Supposons encore que $\boldsymbol{f}(t, 0, \ldots, 0)$ *soit bornée sur l'axe réel et que le système* (2) *admette une famille à* k *paramètres de solutions bornées sur tout l'axe réel, quelle que soit la fonction-vecteur* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, *continue et bornée.*

Alors le système (1) *admet aussi une famille à* k *paramètres de solutions bornées sur l'axe réel et chaque solution appartenant à cette famille est uniquement déterminée par les conditions* (5). *Quand il n'existe aucun indice satisfaisant à la condition* (A), *le système* (1) *admet une seule solution bornée sur l'axe réel.*

Remarque 1. On peut montrer que le théorème n'est pas valable (en général) avec une constante L quelconque et, par conséquent, que la limitation (9) à laquelle doit satisfaire L n'est pas le résultat de la méthode utilisée.

Remarque 2. Le problème de l'existence de solutions bornées sur tout l'axe réel a été envisagé par N. Lyachtchenko [3] et B. P. Démidovitch [4]. Le travail de B. P. Démidovitch contient d'autres indications bibliographiques à ce sujet. Les hypothèses admises par ces auteurs conduisent au cas $k = 0$ (on arrive d'ailleurs à ce cas dès que le système (2) est réductible au sens de Liapounoff). Cependant, il faut remarquer que les conditions imposées à la partie non linéaire par B. P. Démidovitch sont d'une nature différente.

Parfois, on cherche des solutions du système (1) qui appartiennent à un certain tube $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant a$ $(a < +\infty)$. La méthode de Banach est encore applicable et le résultat suivant peut être établi.

Théorème II. *Supposons que la partie non linéaire du système* (1) *soit continue dans le domaine* $-\infty < t < +\infty$, $\|x\| \leqslant a$ *et qu'elle y satisfasse aux conditions* (8) *et* (9). *Admettons encore que*

$$Q\|f(t, 0, \ldots, 0)\| < a(1-LQ). \tag{10}$$

Si le système (2) *jouit de la propriété énoncée dans le théorème* I, *le système* (1) *admet une famille à* k *paramètres de solutions bornées appartenant au tube* $\|x\| \leqslant a$. *Chaque solution de cette famille est déterminée par un système de conditions de la forme* (5) *avec*

$$\sum_{j=i_A} |x_j^0| < \frac{1}{P}\left[a(1-LQ) - Q\|f(t, 0, \ldots, 0)\|\right]. \tag{11}$$

L'unicité d'une telle solution est assurée seulement parmi les solutions bornées appartenant au tube $\|x\| \leqslant a$.

Remarque 1. Ce théorème peut encore être considéré comme un théorème de stabilité conditionnelle.

Remarque 2. Les résultats de Perron pour un demi-axe peuvent être obtenus en utilisant, au lieu du lemme I, le théorème 1 de Perron [1] et notre lemme II.

En terminant, je tiens à remercier M. le professeur T. Ważewski de ses remarques très utiles pour la préparation de ce travail.

Travaux cités

[1] O. Perron, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift 32 (1930), p. 703-728.

[2] S. P. Diliberto, *On systems of ordinary differential equations*, Annals of Mathematics Studies 20 (1950), p. 1-38.

[3] N. J. Lyachtchenko, *Sur le problème de la stabilité asymptotique des solutions des systèmes non linéaires d'équations différentielles* (en russe: Н. Я. Лященко, *К вопросу об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений*), Доклады Академии наук СССР 104 (1955), p. 177-179.

[4] B. P. Démidovitch, *Sur les solutions bornées des systèmes non linéaires d'équations différentielles ordinaires* (en russe: Б. П. Демидович, *Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*), Мат. Сборник 40(82) (1956), p. 73-94.

SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE „A. MYLLER" DE L'UNIVERSITÉ DE JASSY, ROUMANIE

Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1957

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.