ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur l'équation différentielle $u''+a(t)u=0$

par Z. Opial (Kraków)

Plusieurs auteurs ont déjà consacré des études détaillées au problème de la stabilité des intégrales de l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre $u''+a(t)u=0$ dans l'hypothèse que le coefficient $a(t)$ est une fonction continue, non décroissante et tendant vers l'infini en même temps que t. On a démontré que, dans cette hypothèse, toutes les intégrales de l'équation (1) sont bornées pour $t\geqslant 0$ (M. Biernacki [2]), qu'il existe au moins une intégrale non nulle qui tend vers zéro lorsque $t\to\infty$ (H. Milloux [3], G. Prodi [4] et G. Trevisan [6]). On a donné des conditions suffisantes pour que toute intégrale de cette équation ait la même propriété (voir par exemple G. Sansone [5]). Le but de la présente Note est de démontrer que ces deux premières propriétés des intégrales de l'équation (1) subsistent si l'on remplace la condition que le coefficient $a(t)$ ne décroisse pas par une autre condition convenable. En particulier nous supposerons que la fonction $a(t)$ se laisse décomposer en une somme de deux fonctions $b(t)+\psi(t)$, dont l'une, par exemple $b(t)$, tend vers l'infini en croissant et l'autre est à variation bornée dans tout intervalle fini et telle que l'intégrale $\int\limits_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}$ est finie.

Au premier paragraphe nous démontrons que l'on peut représenter toute fonction de ce type sous forme d'un quotient de deux fonctions positives, continues, toutes les deux non décroissantes, dont le numérateur tend vers l'infini lorsque $t\to\infty$, alors que le dénominateur reste borné sur la demi-droite $t\geqslant 0$ tout entière. Cela nous permettra de démontrer au paragraphe suivant, à l'aide des théorèmes récemment établis par G. Trevisan [6], que toutes les intégrales de l'équation du type envisagé sont bornées pour $t\geqslant 0$ (théorème 2) et qu'il y en a au moins une qui tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.

Au § 3 nous donnerons une généralisation d'une condition suffisante de Armellini-Tonelli-Sansone pour que toute intégrale de l'équation envisagée tende vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

§ 1. Nous dirons que l'équation différentielle ordinaire, linéaire du second ordre

$$u''+a(t)u = 0 \tag{1}$$

où, comme d'habitude, $u'' = d^2u/dt^2$, est du type (S), si la fonction $a(t)$, positive pour $t \geqslant 0$, se laisse décomposer en une somme de deux fonctions continues $b(t)+\psi(t)$ dont la première $b(t)$ tend vers l'infini en ne décroissant pas lorsque $t \to \infty$ et la seconde $\psi(t)$ est à variation bornée dans tout intervalle fini et telle que l'intégrale de Stieltjes $\int\limits_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}$ est finie.

Nous dirons pareillement que l'équation (1) est du type (Q), si le coefficient $a(t)$ peut être représenté sous forme d'un quotient $\alpha(t)/\beta(t)$ de deux fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, toutes les deux continues, positives et non décroissantes, dont le numérateur $\alpha(t)$ tend vers l'infini lorsque $t \to \infty$, et le dénominateur $\beta(t)$ reste borné pour $t \geqslant 0$. Nous pouvons y ajouter la condition, nullement restrictive, que $\beta(0) = 1$.

Avant de passer à la démonstration de certaines propriétés des intégrales des équations de ces deux types, nous allons introduire une notion très utile dans les recherches ultérieures. À chaque intégrale $u(t)$ de l'équation $u''+a(t)u = 0$ $(a(t) \neq 0)$ faisons correspondre la fonction $A(t)$ donnée par la formule

$$A(t) = \sqrt{u^2(t)+u'^2(t)/a(t)}.$$

Nous l'appellerons amplitude locale ou tout simplement amplitude de l'intégrale $u(t)$. Ce nom peut être aisément justifié; en effet, prenons un t_0 arbitraire et, à côté de l'équation (1), envisageons l'équation $v''+a(t_0)v = 0$. L'intégrale générale de cette dernière équation aura la forme: $v(t) = A\cos\sqrt{a(t_0)}\,(t-\alpha)$, où A et α sont deux paramètres indépendants. Pour l'intégrale $v(t)$ pour laquelle: $v(t_0) = u(t_0)$ et $v'(t_0) = u'(t_0)$ on peut déterminer ces paramètres au moyen des formules

$$u(t_0) = A\cos\sqrt{a(t_0)}\,(t_0-\alpha),$$

$$u'(t_0) = -A\sqrt{a(t_0)}\sin\sqrt{a(t_0)}\,(t_0-\alpha)$$

d'où l'on obtient $A = \sqrt{u^2(t_0)+u'^2(t_0)/a(t_0)}$. La fonction $A(t_0)$ est donc, pour tout t_0, l'amplitude de l'intégrale de l'équation auxiliaire $v''+a(t_0)v = 0$ dont la valeur et la valeur de la dérivée première au point t_0 sont les mêmes que pour l'intégrale $u(t)$ de l'équation (1).

Lemme. *Soit $\psi(t)$ une fonction continue à variation bornée dans tout intervalle fini et $b(t)$ une fonction continue, positive pour $t \geqslant 0$, non décroissante et tendant vers l'infini en même temps que t. Soit enfin*

$$\int\limits_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)} < \infty.$$

Alors $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\psi(t)/b(t)\big) = 0$.

En effet, on a pour $t \geqslant t_0$:

$$\left|\frac{\psi(t)}{b(t)}\right| \leqslant \frac{1}{b(t)}\Big(|\psi(0)|+\int\limits_0^t |d\psi(t)|\Big) \leqslant \frac{|\psi(0)|}{b(t)}+\frac{1}{b(t)}\int\limits_0^{t_0} |d\psi(t)|+\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|d\psi(\tau)|}{b(\tau)}.$$

En choisissant maintenant t_0 assez grand pour que le dernier terme de cette inégalité soit plus petit qu'un nombre $\varepsilon > 0$, donné d'avance, et en faisant ensuite tendre t vers l'infini, on obtient l'inégalité $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|\psi(t)/b(t)| \leqslant \varepsilon$. ε étant arbitraire, notre lemme se trouve ainsi démontré.

Théorème 1. *Pour que l'équation* (1) *soit du type* (S), *il faut et il suffit qu'elle soit du type* (Q).

Démonstration. Soit d'abord l'équation (1) du type (S). On a donc

$$a(t) = b(t)+\psi(t) \tag{2}$$

où $b(t)$ tend vers l'infini en ne décroissant pas et

$$\int\limits_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)} = D < \infty. \tag{3}$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $\psi(0) = 0$. L'identité (2) peut être écrite comme il suit:

$$\ln a(t) = \ln b(t)+\ln\big(1+\psi(t)/b(t)\big). \tag{4}$$

La fonction $1+\psi(t)/b(t)$, positive pour $t \geqslant 0$ et tendant, en vertu de notre lemme, vers 1 pour $t \to \infty$, est évidemment bornée inférieurement par une constante positive C. Les fonctions $b(t)$ et $\psi(t)$ étant à variation bornée dans tout intervalle fini, le troisième logarithme de la relation (4) l'est aussi. Décomposons-le, d'après le théorème bien connu de Jordan, en une différence de logarithmes de deux fonctions continues, non décroissantes $\mu(t)$, $\nu(t)$. On aura alors

$$\ln a(t) = \ln b(t)+\ln\mu(t)-\ln\nu(t), \tag{5}$$

d'où $a(t) = b(t)\mu(t)/\nu(t)$. Nous pouvons évidemment admettre que $\nu(0) = 1$. Posons maintenant $\alpha(t) = b(t)\mu(t)$ et $\beta(t) = \nu(t)$. Il est clair que la fonction $a(t)$ tend vers l'infini puisque $b(t)$ et $\mu(t)$ croissent et, de plus, $\lim\limits_{t\to\infty} b(t)=\infty$. La fonction $\beta(t)=\nu(t)$ croît aussi; il suffit donc de démontrer que $\nu(t)$ est bornée ou, ce qui revient au même, que son logarithme $\ln\nu(t)$ est borné. Or

$$\ln\nu(t)=\ln\nu(0)+\int_0^t d\ln\nu(t)=\int_0^t d\ln\nu(t)\qquad (t\geqslant 0). \tag{6}$$

D'autre part on peut choisir les fonctions $\mu(t)$ et $\nu(t)$ de telle sorte que la variation totale de la fonction $\ln\big(1+\psi(t)/b(t)\big)$ soit au moins aussi grande que celle de $\ln\nu(t)$ dans le même intervalle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\int_0^t d\ln\nu(t)\leqslant\int_0^t\big|d\ln\big(1+\psi(t)/b(t)\big)\big|\quad\text{pour tout}\quad t\geqslant 0.$$

On peut aisément démontrer que, dans nos hypothèses, cette seconde intégrale reste bornée lorsque t tend vers l'infini. En effet

$$\int_0^t\left|d\ln\left(1+\frac{\psi(t)}{b(t)}\right)\right|\leqslant\int_0^t\frac{1}{1+\psi(t)/b(t)}\left|d\,\frac{\psi(t)}{b(t)}\right|\leqslant\frac{1}{C}\int_0^t\left|d\,\frac{\psi(t)}{b(t)}\right|. \tag{7}$$

Mais

$$\int_0^t\left|d\,\frac{\psi(t)}{b(t)}\right|\leqslant\int_0^t\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}+\int_0^t|\psi(t)|\,\frac{db(t)}{b^2(t)}. \tag{8}$$

En calculant la troisième de ces intégrales par parties on obtient

$$\int_0^t\left|d\,\frac{\psi(t)}{b(t)}\right|\leqslant\int_0^t\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}-\frac{|\psi(t)|}{b(t)}+\int_0^t\frac{1}{b(t)}\,d|\psi(t)|\leqslant\int_0^t\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}+\int_0^t\frac{d|\psi(t)|}{b(t)} \tag{9}$$

(nous avons supposé que $\psi(0)=0$). Le premier terme de cette dernière expression est visiblement borné en vertu de (3). Le deuxième terme l'est aussi a fortiori, puisque

$$\int_0^t\frac{d|\psi(t)|}{b(t)}\leqslant\int_0^t\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}. \tag{10}$$

Des relations (3) et (6)-(10) il résulte enfin que $\ln\nu(t)\leqslant 2D/C$ et, par suite, $\nu(t)\leqslant\exp(2D/C)$. La première partie de la démonstration est ainsi terminée. Passons à la seconde.

Supposons que l'équation (1) soit du type (Q). Cela veut dire que l'on a $a(t)=\alpha(t)/\beta(t)$, où les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont positives, conti-

nues, non décroissantes pour $t\geqslant 0$ et telles que $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=\beta<\infty$ et $\beta(0)=1$. La fonction $a(t)$ est évidemment à variation bornée dans tout intervalle fini. Décomposons-la en une différence de deux fonctions $\mu(t)$ et $\nu(t)$ positives et non décroissantes: $a(t)=\mu(t)-\nu(t)$. Pour terminer la démonstration il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$ et que l'intégrale $\int_0^t\frac{d\nu(t)}{\mu(t)}$ reste bornée lorsque $t\to\infty$. Or, on a pour tout $t\geqslant 0$, $\alpha(t)/\beta(t)\leqslant\mu(t)$; d'où il résulte que $\lim\limits_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$. Il en résulte aussi qu'il suffit de démontrer que l'intégrale

$$\int_0^t\beta(t)\,\frac{d\nu(t)}{\alpha(t)} \tag{11}$$

est bornée pour $t\geqslant 0$, puisque

$$\int_0^t\frac{d\nu(t)}{\mu(t)}\leqslant\int_0^t\beta(t)\,\frac{d\nu(t)}{\alpha(t)}. \tag{12}$$

Mais, en vertu de l'hypothèse faite sur la forme de la fonction $a(t)$, on peut écrire

$$a(t)=a(0)+\int_0^t da(t)=a(0)+\int_0^t d\,\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}=a(0)+\int_0^t\frac{d\alpha(t)}{\beta(t)}-\int_0^t\alpha(t)\,\frac{d\beta(t)}{\beta^2(t)}.$$

Les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ étant non décroissantes, ces deux dernières intégrales sont des fonctions non décroissantes de la variable t. On pourrait donc prendre

$$\mu(t)=a(0)+\int_0^t\frac{d\alpha(t)}{\beta(t)}\quad\text{et}\quad\nu(t)=\int_0^t\alpha(t)\,\frac{d\beta(t)}{\beta^2(t)}.$$

Cela posé, on peut remplacer dans l'intégrale (11) $d\nu(t)$ par $\alpha(t)d\beta(t)/\beta^2(t)$, ce qui donne l'identité

$$\int_0^t\beta(t)\,\frac{d\nu(t)}{\alpha(t)}=\int_0^t\frac{d\beta(t)}{\beta(t)}=\ln\frac{\beta(t)}{\beta(0)}=\ln\beta(t)\leqslant\ln\beta.$$

On a donc, en vertu de (12)

$$\int_0^t\frac{d\nu(t)}{\mu(t)}\leqslant\ln\beta$$

et notre proposition se trouve ainsi entièrement démontrée.

§ 2. Dans le travail déjà cité [6], G. Trevisan a démontré que pour toute intégrale de l'équation

$$u''+\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}u = 0 \tag{13}$$

où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions positives, continues et non décroissantes, la fonction $B(t) = u^2(t)/\beta(t)+u'^2(t)/\alpha(t)$ est non croissante.

Voici une démonstration très simple de cette proposition, différente de celle de Trevisan

$$\frac{u^2(t)}{\beta(t)}+\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)} = \frac{u^2(0)}{\beta(0)}+\frac{u'^2(0)}{\alpha(0)}+\int_0^t d\left(\frac{u^2(t)}{\beta(t)}+\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)}\right)$$

c'est-à-dire

$$B(t) = B(0)+\int_0^t \left(\frac{2u'(t)u(t)}{\beta(t)}dt+\frac{2u'(t)u''(t)}{\alpha(t)}dt-\frac{u^2(t)}{\beta^2(t)}d\beta(t)-\frac{u'^2(t)}{\alpha^2(t)}d\alpha(t)\right).$$

En vertu de (13) $u''(t)/\alpha(t)+u(t)/\beta(t) \equiv 0$; on a donc

$$B(t) = B(0)-\int_0^t \frac{u^2(t)}{\beta^2(t)}d\beta(t)+\frac{u'^2(t)}{\alpha^2(t)}d\alpha(t). \tag{14}$$

Or, les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ étant non décroissantes par hypothèse, cette dernière intégrale est une fonction non décroissante de la variable t, d'où il suit que $B(t)$ est non croissante.

Moyennant cette proposition on peut facilement démontrer quelques propriétés importantes des intégrales des équations des types (S) ou (Q).

Théorème 2. *L'amplitude $A(t)$ de toute intégrale $u(t)$ de l'équation $u''+a(t)u = 0$ du type* (S) *ou* (Q) *tend vers une limite finie lorsque $t\to\infty$ et, par suite, reste bornée sur la demi-droite $t\geqslant 0$ tout entière.*

En vertu du théorème 1 il suffit de démontrer cette propriété pour les intégrales des équations du type (Q). Or, l'amplitude $A(t)$ de l'intégrale $u(t)$ de l'équation

$$u''+\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}u = 0$$

de ce type s'exprime par la formule

$$A(t) = \sqrt{u^2(t)+\frac{\beta(t)u'^2(t)}{\alpha(t)}} = \sqrt{\beta(t)}\sqrt{\frac{u^2(t)}{\beta(t)}+\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)}} = \sqrt{\beta(t)}\sqrt{B(t)}.$$

Elle est donc, en vertu du théorème de Trevisan, le produit des deux facteurs monotones $\sqrt{\beta(t)}$ et $\sqrt{B(t)}$, tous les deux bornés, et, par conséquent, elle a une limite finie lorsque $t\to\infty$.

Du théorème 2 il suit immédiatement que toutes les intégrales de l'équation du type (S) ou (Q) sont bornées. D'après le même théorème, le carré de l'amplitude

$$A^2(t) = u^2(t)+\frac{\beta(t)u'^2(t)}{\alpha(t)}$$

d'une intégrale quelconque $u(t)$ d'une telle équation a une limite finie lorsque $t\to\infty$. D'autre part le quotient $\alpha(t)/\beta(t)$ tend pour $t\to\infty$ vers l'infini. Ces deux propriétés suffisent pour que l'on puisse répéter de proche en proche le raisonnement de G. Trevisan, dont il s'est servi dans le travail cité ci-dessus pour démontrer que parmi les intégrales non nulles de l'équation $u''+a(t)u = 0$, où $a(t)$ tend vers l'infini en ne décroissant pas, il y en a au moins une qui tend vers zéro lorsque $t\to\infty$ et obtenir ainsi le théorème suivant:

Théorème 3. *Si l'équation $u''+a(t)u = 0$ est du type* (S) *ou* (Q), *au moins une intégrale non nulle de cette équation tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.*

Pour la commodité du lecteur je répéterai ici le raisonnement de Trevisan.

Supposons que l'équation (1) du type (Q) ait au moins une intégrale $u_1(t)$ pour laquelle la limite de l'amplitude $A_1(t)$ soit positive. Désignons par η_i les points où la fonction $|u_1(t)|$ admet des valeurs maxima. On a donc $\lim_{i\to\infty}|u_1(\eta_i)| = \lim_{i\to\infty}A(\eta_i) = A_1$. Soit maintenant $u_2(t)$ une autre solution de l'équation (1) pour laquelle $A_2 = \lim_{t\to\infty}A_2(t)$ est aussi positive. Nous allons montrer que $\lim_{i\to\infty}|u_2(\eta_i)| = A_2$. En effet, en posant dans le Wronskien $u_1'(t)u_2(t)-u_2'(t)u_1(t) = k$ (k — constante) $t = \eta_i$ on obtient $|u_1(\eta_i)u_2'(\eta_i)| = |k|$ et, par conséquent, $\lim_{i\to\infty}|u_2'(\eta_i)| = |k|/A_1$. On a donc

$$\lim_{i\to\infty}u_2^2(\eta_i) = \lim_{i\to\infty}\left[A_2^2(\eta_i)-u_2'^2(\eta_i)\frac{\beta(\eta_i)}{\alpha(\eta_i)}\right]$$
$$= \lim_{i\to\infty}A_2^2(\eta_i)-\lim_{i\to\infty}u_2'^2(\eta_i)\lim_{i\to\infty}\frac{\beta(\eta_i)}{\alpha(\eta_i)} = A_2^2-\frac{k^2}{A_1^2}\cdot 0 = A_2^2$$

c'est-à-dire $\lim_{i\to\infty}|u_2(\eta_i)| = A_2$.

Cela montré, nous pouvons passer à la démonstration du théorème 3. Pour la démonstration par l'absurde supposons que sa conclusion soit inexacte et prenons deux intégrales $u_3(t)$ et $u_4(t)$ linéairement indépendantes pour lesquelles $\lim_{t\to\infty} A_3(t) = A_3 > 0$ et $\lim_{t\to\infty} A_4(t) = A_4 > 0$. D'après ce que nous avons déjà montré $\lim_{i\to\infty} |u_3(\eta_i)| = A_3$ et $\lim_{i\to\infty} |u_4(\eta_i)| = A_4$. De la suite $\{\eta_i\}$ on peut évidemment extraire une suite partielle $\{\sigma_i\}$ de telle manière que l'on ait $\lim_{i\to\infty} u_3(\sigma_i) = p \neq 0$ et $\lim_{i\to\infty} u_4(\sigma_i) = q \neq 0$ ($p = A_3$ ou $-A_3$ et $q = A_4$ ou $-A_4$). En posant maintenant $u_2(t) = -qu_3(t) + pu_4(t)$ on obtient d'une part $\lim_{i\to\infty} |u_2(\eta_i)| = A_2 > 0$ et, de l'autre $\lim_{i\to\infty} u_2(\sigma_i) = 0$, ce qui est impossible. Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

Nous avons déjà vu que pour les équations des types envisagés l'amplitude $A(t)$ de leurs intégrales est le produit de deux fonctions monotones, positives et bornées. Mais le produit de tels facteurs est une fonction à variation bornée sur la demi-droite $t \geqslant 0$ tout entière. De là on obtient:

THÉORÈME 4. *Si l'équation $u'' + a(t)u = 0$ est du type* (S) *ou* (Q), *l'amplitude $A(t)$ de toute intégrale de cette équation est une fonction à variation bornée sur la demi-droite $t \geqslant 0$.*

Prenons maintenant une intégrale quelconque $u(t)$ de l'équation $u'' + a(t)u = 0$ de l'un ou de l'autre des types envisagés. Désignons par $t_1, t_2, \ldots$ les points correspondant aux maxima successifs de la fonction $|u(t)|$ pour $t \geqslant 0$. Aux points t_i on a $u'(t_i) = 0$ et, par suite, $|u(t_i)| = A(t_i)$. On aura donc pour tout nombre entier k:

$$\sum_{i=1}^{k} \big||u(t_i)| - |u(t_{i+1})|\big| = \sum_{i=1}^{k} |A(t_i) - A(t_{i+1})| = \sum_{i=1}^{k} \Big|\int_{t_i}^{t_{i+1}} dA(t)\Big|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |dA(t)| = \int_{t_1}^{t_{k+1}} |dA(t)| \leqslant \int_{t_1}^{\infty} |dA(t)| < \infty.$$

Pour toute intégrale $u(t)$ de l'équation du type (S) ou (Q), la série $\sum_{i=1}^{\infty} \big||u(t_i)| - |u(t_{i+1})|\big|$ est donc convergente. Nous obtenons ainsi pour les équations de ces types une simple généralisation de la propriété bien connue de l'équation $u'' + a(t)u = 0$ à coefficient $a(t)$ croissant, à savoir que les nombres $|u(t_i)|$ forment une suite non croissante.

Pour les équations du type (S) on pourrait démontrer les théorèmes 2 et 3 sans profiter de l'équivalence établie dans le théorème 1. Nous allons esquisser les démonstrations de ces propositions, parce que quelques-unes des formules obtenues à cette occasion nous seront utiles dans la suite. Il suffit d'ailleurs de démontrer seulement le premier de ces théorèmes puisque le second en découle immédiatemment (voir la démonstration du théorème 3), vu que, pour les équations du type (S), on a

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty} b(t)[1 + \psi(t)/b(t)] = \infty.$$

Soit donc $u(t)$ une intégrale quelconque de l'équation $u'' + \big(b(t) + \psi(t)\big)u = 0$ du type (S). En posant dans la formule (14): $\beta(t) \equiv 1$ et

$$a(t) = b(t) + \psi(t), \qquad A(t) = \sqrt{u^2(t) + u'^2(t)/\big(b(t) + \psi(t)\big)}$$

on obtient

$$A^2(t) = A^2(0) - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t) + \psi(t)]^2}\, d\big(b(t) + \psi(t)\big)$$

et, par conséquent,

$$A^2(t) = A^2(0) - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t) + \psi(t)]^2}\, db(t) - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t) + \psi(t)]^2}\, d\psi(t). \tag{15}$$

La fonction $b(t)$ étant non décroissante, la première de ces deux dernières intégrales est une fonction non négative. Il en résulte que

$$A^2(t) \leqslant A^2(0) + \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t) + \psi(t)]^2} |d\psi(t)|$$

et, par suite,

$$A^2(t) \leqslant A^2(0) + \int_0^t \left(u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{b(t) + \psi(t)}\right) \frac{|d\psi(t)|}{b(t) + \psi(t)}$$

c'est-à-dire

$$A^2(t) \leqslant A^2(0) + \int_0^t A^2(t) \frac{|d\psi(t)|}{b(t) + \psi(t)}.$$

Enfin, de cette dernière inégalité on obtient

$$A^2(t) \leqslant A^2(0) \exp\left(\int_0^t \frac{|d\psi(t)|}{b(t) + \psi(t)}\right)$$

(voir R. Bellman [1], p. 35, 113). D'après notre lemme, la fonction continue $b(t)/\big(b(t) + \psi(t)\big)$ tend vers 1 lorsque $t \to \infty$, elle est donc bornée sur la demi-droite $t \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\frac{b(t)}{b(t) + \psi(t)} \leqslant K \tag{16}$$

où K est un nombre positif convenablement choisi. On a donc

$$(17)\qquad A^2(t) \leqslant A^2(0)\exp\left(K\int_0^t \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}\right) \leqslant A^2(0)\exp\left(K\int_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}\right)$$

et, par conséquent, le carré de l'amplitude de l'intégrale $u(t)$ est borné sur le demi-axe $t \geqslant 0$ tout entier. De (17) et de la définition de l'amplitude $A(t)$ on obtient immédiatement

$$(18)\qquad \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \leqslant C \qquad \text{où} \qquad C = A^2(0)\exp\left(K\int_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}\right).$$

Dans la formule (15) la seconde intégrale $I_2(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \to \infty$. En effet, pour $0 \leqslant t_1 < t_2$, on a, en vertu de (16) et (18):

$$|I_2(t_1)-I_2(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)}\cdot\frac{b(t)}{b(t)+\psi(t)}\cdot\frac{d\psi(t)}{b(t)}\right| \leqslant CK\int_{t_1}^{t_2}\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}.$$

La première intégrale de cette formule qui — nous l'avons déjà dit — est une fonction non décroissante de la variable t, doit donc tendre, elle aussi, vers une limite finie lorsque $t \to \infty$. Il en résulte que, pour $t \to \infty$, $A^2(t)$ et, par conséquent, $A(t)$ ont des limites finies. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

On pourrait de même démontrer indépendamment du théorème 1 que pour les équations du type (S) l'amplitude de toute intégrale est une fonction à variation bornée. En effet

$$\int_0^t |dA(t)| = \int_0^t \left|d\sqrt{A^2(t)}\right| = \int_0^t \frac{|dA^2(t)|}{2A(t)}.$$

Mais

$$dA^2(t) = -\frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\, d\big(b(t)+\psi(t)\big),$$

on a donc

$$(19)\qquad \int_0^t |dA(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{db(t)}{A(t)} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{A(t)}.$$

Il suffit donc de démontrer que ces deux dernières intégrales restent bornées lorsque $t \to \infty$. Or, on a

$$\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{A(t)} = \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{\sqrt{u^2(t)+u'^2(t)/(b(t)+\psi(t))}}$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{|u'(t)|}{\sqrt{b(t)+\psi(t)}}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{b(t)+\psi(t)} \leqslant \int_0^t \frac{|u'(t)|}{\sqrt{b(t)\psi+(t)}}\cdot\frac{b(t)}{b(t)+\psi(t)}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{b(t)}.$$

D'où, en raison de (16) et (18), on obtient

$$\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{|d\psi(t)|}{A(t)} \leqslant K\sqrt{C}\int_0^t\frac{|d\psi(t)|}{b(t)} \leqslant K\sqrt{C}\int_0^\infty\frac{|d\psi(t)|}{b(t)} < \infty.$$

La seconde intégrale est donc bornée. Mais, d'autre part

$$A(t) = A(0)+\int_0^t dA(t) = A(0)+\int_0^t\frac{dA^2(t)}{2A(t)}$$

c'est-à-dire

$$A(t) = A(0)-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{db(t)}{A(t)} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{d\psi(t)}{A(t)}.$$

De ce que nous venons de démontrer il résulte que l'intégrale

$$\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{d\psi(t)}{A(t)}$$

est bornée pour $t \geqslant 0$. L'intégrale

$$\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\cdot\frac{db(t)}{A(t)}$$

est donc aussi bornée puisque $A(t)$ tend, d'après le théorème 2, vers une limite finie lorsque $t \to \infty$. La démonstration de notre proposition est ainsi achevée.

§ 3. Soit $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ une suite d'intervalles de la demi-droite $t \geqslant 0$, sans points communs. Nous dirons que c'est une suite de densité égale à ε sur $(0, \infty)$ si

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)}{\beta_n} = \varepsilon.$$

Nous dirons avec G. Sansone ([5], p. 60) que la fonction $F(t)$, positive, continue, non décroissante et telle que $\lim_{t\to\infty} F(t) = \infty$ tend vers l'infini „quasi par sauts”, si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite d'intervalles $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ de densité plus petite que ε telle que l'accroissement de $F(t)$ sur l'ensemble complémentaire soit fini. Sinon nous dirons que la fonction $F(t)$ tend vers l'infini régulièrement. G. Armellini, L. Tonelli et G. Sansone ont démontré le théorème suivant ([5], p. 60):

Si dans l'équation $u''+A(t)u = 0$ la fonction $A(t)$, positive, continue et non décroissante, a une première dérivée continue, si, de plus,

$\lim A(t) = \infty$ *et si la fonction* $\ln A(t)$ *tend vers l'infini régulièrement, alors toutes les intégrales de cette équation tendent vers* 0 *lorsque* $t \to \infty$.

Nous allons montrer que cette proposition reste vraie pour les équations du type (S). On a, en effet

THÉORÈME 5. *Si l'équation*

$$u'' + \big(b(t) + \psi(t)\big)u = 0 \tag{20}$$

est du type (S) *et si la fonction* $\ln b(t)$ *tend vers l'infini régulièrement, alors pour toute intégrale* $u(t)$ *de cette équation* $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Pour la démonstration par l'impossible supposons qu'il existe une intégrale $u(t)$ de l'équation (20) pour laquelle la conclusion de notre théorème ne soit pas vraie. L'équation (20) étant du type (S), l'amplitude $A(t)$ de cette intégrale tend vers une limite finie lorsque $t \to \infty$. Désignons-la par A. En raison de notre supposition A doit être positif. En vertu de la formule (15) on a

$$A^2(t) = A^2(0) - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\, db(t) - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\, d\psi(t).$$

On peut aisément vérifier que pour les intégrales de l'équation du type (S) la seconde intégrale de cette dernière égalité est bornée sur le demi-axe $t \geqslant 0$. En effet, on a

$$\left|\int_0^t \frac{u'^2(t)}{\big(b(t)+\psi(t)\big)^2}\, d\psi(t)\right| \leqslant \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{b(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}$$

d'où, en vertu de (16) et (18)

$$\left|\int_0^t \frac{u'^2(t)}{\big(b(t)+\psi(t)\big)^2}\, d\psi(t)\right| \leqslant C\cdot K \int_0^t \frac{|d\psi(t)|}{b(t)} \leqslant C\cdot K \int_0^\infty \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}.$$

On a donc

$$A^2(t) \leqslant L - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\, db(t) \tag{21}$$

où L est un nombre positif convenablement choisi. D'autre part

$$\int_0^t \frac{u'^2(t)}{[b(t)+\psi(t)]^2}\, db(t) = \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{db(t)}{b(t)+\psi(t)} \tag{22}$$

$$= \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{db(t)}{b(t)} + \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \left(\frac{1}{b(t)+\psi(t)} - \frac{1}{b(t)}\right) db(t).$$

Evaluons la seconde de ces intégrales. En vertu de (16) et (18)

$$I(t) = \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \left(\frac{1}{b(t)+\psi(t)} - \frac{1}{b(t)}\right) db(t)$$

$$\leqslant C \int_0^t \left|\frac{1}{b(t)+\psi(t)} - \frac{1}{b(t)}\right| db(t) = C \int_0^t \frac{|\psi(t)|}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{db(t)}{b(t)}$$

$$= C \int_0^t |\psi(t)| \frac{b(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{db(t)}{b^2(t)} \leqslant C\cdot K \int_0^t |\psi(t)| \frac{db(t)}{b^2(t)}.$$

En calculant la dernière intégrale par parties on obtient

$$\int_0^t |\psi(t)| \frac{db(t)}{b^2(t)} = \frac{|\psi(0)|}{b(0)} - \frac{|\psi(t)|}{b(t)} + \int_0^t \frac{d|\psi(t)|}{b(t)} \leqslant \frac{|\psi(0)|}{b(0)} + \int_0^t \frac{|d\psi(t)|}{b(t)}.$$

L'équation (20) étant du type (S) par l'hypothèse, l'intégrale $I(t)$ est bornée pour $t \geqslant 0$. De (21) et (22) il résulte donc que

$$A^2(t) \leqslant M - \int_0^t \frac{u'^2(t)}{b(t)+\psi(t)} \cdot \frac{db(t)}{b(t)} \tag{23}$$

où nous avons désigné par M un nombre positif convenablement choisi. De (23) et de la définition de l'amplitude $A(t)$ on obtient maintenant

$$A^2(t) \leqslant M - \int_0^t [A^2(t) - u^2(t)] \frac{db(t)}{b(t)}. \tag{24}$$

D'après notre hypothèse la fonction $\ln b(t)$ tend vers l'infini régulièrement. Il existe donc un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (α_n, β_n) $(\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1})$ de densité plus petite que ε_0, l'accroissement de $\ln b(t)$ sur l'ensemble complémentaire $\langle 0, +\infty) - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$ est infini, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ln b(\alpha_{i+1}) - \ln b(\beta_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \frac{b(\alpha_{i+1})}{b(\beta_i)}$$

est divergente. Nous démontrerons plus loin que l'on peut choisir un nombre $\eta > 0$ de telle manière que la suite de tous les intervalles (α_n, β_n) dans lesquels $A^2(t) - u^2(t) \leqslant \eta$, soit de densité plus petite que ε_0. Or on a, en vertu de (24):

$$A^2(\alpha_n) \leqslant M - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\beta_i}^{\alpha_{i+1}} [A^2(t) - u^2(t)] \frac{db(t)}{b(t)}.$$

Mais, dans les intervalles (β_i, α_{i+1}) on a $A^2(t)-u^2(t) \geqslant \eta$, d'où il suit que

$$A^2(\alpha_n) \leqslant M-\eta \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\beta_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{db(t)}{b(t)} = M-\eta \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{b(\alpha_{i+1})}{b(\beta_i)}.$$

Pour n assez grand on aurait donc $A^2(\alpha_n) < 0$ ce qui est impossible. Pour achever la démonstration du théorème 5 il ne reste plus qu'à démontrer qu'un choix convenable de η est possible.

A cet effet remarquons d'abord que l'inégalité $A^2(t)-u^2(t) \leqslant \eta$ donne

$$A(t)-|u(t)| \leqslant \frac{\eta}{A(t)+|u(t)|} \leqslant \frac{\eta}{A(t)} \leqslant \frac{\eta}{\varrho}$$

où ϱ désigne la borne inférieure de la fonction $A(t)$ pour $t \geqslant 0$. En vertu de l'hypothèse que nous avons faite sur l'intégrale $u(t)$, c'est un nombre positif. Il suffit donc de démontrer que l'on peut choisir un η^* de telle sorte que la suite d'intervalles dans lesquels

$$A(t)-|u(t)| \leqslant \eta^* \tag{25}$$

soit de densité plus petite que ε_0.

Nous avons désigné par A la limite à l'infini de l'amplitude $A(t)$. Il existe donc un nombre $t_1 \geqslant 0$ tel que pour $t \geqslant t_1$ on a $A(t) \geqslant A-\eta^*$. Cela veut dire que, pour $t \geqslant t_1$, tout t qui satisfait à l'inégalité (25) satisfera aussi à l'inégalité $A-|u(t)| \leqslant 2\eta^*$ c'est-à-dire $A(1-2\eta^*/A) \leqslant |u(t)|$. Si dans une suite infinie d'intervalles on en change un nombre fini, la densité de la suite reste invariable. Il suffit donc de démontrer qu'il existe un nombre positif $\sigma < 1$ tel que la suite S_σ d'intervalles dans lesquels

$$\sigma A \leqslant |u(t)| \tag{26}$$

soit de densité plus petite que ε_0. A cet effet évaluons d'abord la densité de la suite S_σ. Soit donc σ un nombre positif < 1. Soient (α_n', β_n') les intervalles successifs de la suite S_σ. On a donc $|u(\alpha_n')| = |u(\beta_n')| = \sigma A$. Pour simplifier les calculs désignons la somme $b(t)+\psi(t)$ par $a(t)$ $(a(t) > 0)$.

Posons ensuite $m_n = \min\big(a(t)/a(\alpha_n')\big)$ dans l'intervalle $\langle \alpha_n', \beta_n' \rangle$ et $M_n = \max\big(a(t)/a(\alpha_n')\big)$ dans l'intervalle $\langle \beta_{n-1}', \alpha_n' \rangle$. On a donc

$$a(t) \geqslant m_n a(\alpha_n') \quad \text{pour} \quad t \in \langle \alpha_n', \beta_n' \rangle, \tag{27}$$

$$a(t) \leqslant M_n a(\alpha_n') \quad \text{pour} \quad t \in \langle \beta_{n-1}', \alpha_n' \rangle. \tag{28}$$

En utilisant le lemme du premier paragraphe on peut aisément vérifier que $\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = 1$. En effet, on a d'une part

$$m_n \leqslant \frac{a(\alpha_n')}{a(\alpha_n')} = 1 \quad \text{et} \quad M_n \geqslant \frac{a(\alpha_n')}{a(\alpha_n')} = 1.$$

D'autre part

$$\frac{a(t)}{a(\alpha_n')} = \frac{b(t)+\psi(t)}{b(\alpha_n')+\psi(\alpha_n')} = \frac{b(t)}{b(\alpha_n')}\left[1+\frac{\psi(t)}{b(t)}\right]\cdot\left[1+\frac{\psi(\alpha_n')}{b(\alpha_n')}\right]^{-1}$$

d'où, en vertu de l'hypothèse que la fonction $b(t)$ est non décroissante, il résulte que

$$m_n \geqslant \min_{\langle \alpha_n', \beta_n' \rangle}\left[1+\frac{\psi(t)}{b(t)}\right]\cdot\left[1+\frac{\psi(\alpha_n')}{b(\alpha_n')}\right]^{-1}$$

et pareillement

$$M_n \leqslant \max_{\langle \beta_{n-1}', \alpha_n' \rangle}\left[1+\frac{\psi(t)}{b(t)}\right]\cdot\left[1+\frac{\psi(\alpha_n')}{b(\alpha_n')}\right]^{-1}.$$

Pour prouver notre assertion il ne reste qu'à remarquer que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n' = \lim_{n\to\infty} \beta_n' = \infty$ et à profiter du lemme mentionné.

Désignons maintenant par $z_n(t)$ et $v_n(t)$ les intégrales des équations auxiliaires

$$z''+m_n a(\alpha_n')z = 0, \qquad v''+M_n a(\alpha_n')v = 0 \tag{29}$$

aux valeurs initiales:

$$z_n(\alpha_n') = v_n(\alpha_n') = |u(\alpha_n')| = \sigma A \quad \text{et} \quad z_n'(\alpha_n') = v_n'(\alpha_n') = |u'(\alpha_n')|$$

(voir la figure). Désignons par β_n'' la première racine — en comptant de α_n' à droite — de l'équation $z_n(t) = \sigma A$ et par γ_n' la première racine —

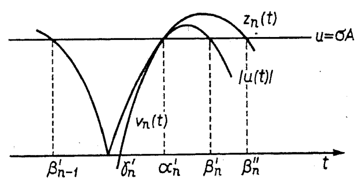

Fig. 1

en comptant de α_n' à gauche — de l'équation $v_n(t) = 0$. Des relations (27) et (28) et des théorèmes du type de Sturm sur la comparaison des intégrales de l'équation (20) avec celles des équations (29) il résulte que

$$\beta_n'-\alpha_n' \leqslant \beta_n''-\alpha_n' \quad \text{et} \quad \beta_n'-\beta_{n-1}' \geqslant \alpha_n'-\gamma_n'.$$

Mais on peut aisément évaluer les grandeurs des intervalles $\beta_n''-\alpha_n'$ et $\alpha_n'-\gamma_n'$. En effet, on a

(30) $$z_n(t) = Z_n \cos\sqrt{m_n a(\alpha_n')}\,(t-\delta_n)$$

où

$$Z_n^2 = u^2(\alpha_n')+\frac{u'^2(\alpha_n')}{m_n a(\alpha_n')} = u^2(\alpha_n')+\frac{u'^2(\alpha_n')}{a(\alpha_n')}+\frac{u'^2(\alpha_n')}{a(\alpha_n')}\left[\frac{1}{m_n}-1\right]$$
$$= A^2(\alpha_n')+\frac{u'^2(\alpha_n')}{a(\alpha_n')}\left[\frac{1}{m_n}-1\right].$$

Le quotient $u'^2(\alpha_n')/a(\alpha_n')$ est en vertu de l'inégalité (18) borné et $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = 1$. On obtient donc de cette dernière relation: $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = \lim\limits_{n\to\infty} A(\alpha_n') = A$. Posons $Z_n = \mu_n A$, où $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 1$. De la formule (30) et de la définition de β_n'' on obtient

$$\beta_n''-\alpha_n' = \frac{2}{\sqrt{m_n a(\alpha_n')}}\arccos\frac{A\sigma}{Z_n} = \frac{2}{\sqrt{m_n a(\alpha_n')}}\arccos\frac{\sigma}{\mu_n}.$$

Les suites μ_n et m_n tendant vers 1, il en résulte que pour n suffisamment grands

$$\beta_n''-\alpha_n' \leqslant \frac{2}{\sqrt{a(\alpha_n')}}\arccos\sigma^2,$$

puisque $\sigma^2<\sigma$ et, a fortiori

(31) $$\beta_n'-\alpha_n' \leqslant \frac{2}{\sqrt{a(\alpha_n')}}\arccos\sigma^2 \quad \text{pour} \quad n\geqslant n_1.$$

Pareillement $v_n(t) = V_n\cos\sqrt{M_n a(\alpha_n')}\,(t-\bar\delta_n)$ où

$$V_n^2 = u^2(\alpha_n')+\frac{u'^2(\alpha_n')}{M_n a(\alpha_n')}\to A^2 \quad \text{pour} \quad n\to\infty.$$

On peut donc poser $V_n = \nu_n A$, où $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n = 1$. La longueur de l'intervalle (γ_n', α_n') est donc donnée par la formule

$$\alpha_n'-\gamma_n' = \frac{1}{\sqrt{M_n a(\alpha_n')}}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sigma A}{V_n}\right] = \frac{1}{\sqrt{M_n a(\alpha_n')}}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sigma}{\nu_n}\right].$$

Les suites M_n et ν_n tendent vers 1, on a donc pour n suffisamment grand

$$\alpha_n'-\gamma_n' \geqslant \frac{1}{\sqrt{a(\alpha_n')}}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\sigma^2\right]$$

et, par conséquent

(32) $$\beta_n'-\beta_{n-1}' \geqslant \frac{1}{\sqrt{a(\alpha_n')}}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\sigma^2\right] \quad \text{pour} \quad n\geqslant n_2.$$

Pour $i\geqslant n_0 = \max(n_1, n_2)$ on aura donc, en vertu de (31) et (32):

$$\frac{\beta_i'-\alpha_i'}{\beta_i'-\beta_{i-1}'} \leqslant \frac{2\arccos\sigma^2}{\frac{1}{2}\pi-\arccos\sigma^2}$$

et, par suite

$$\frac{\sum\limits_{i=n_0}^{n}(\beta_i'-\alpha_i')}{\sum\limits_{i=n_0}^{n}(\beta_i'-\beta_{i-1}')} = \frac{\sum\limits_{i=n_0}^{n}(\beta_i'-\alpha_i')}{\beta_n'-\beta_{n_0-1}'} \leqslant \frac{2\arccos\sigma^2}{\frac{1}{2}\pi-\arccos\sigma^2}.$$

Cela veut dire que la densité de la suite S_σ sur (β_{n_0-1}', ∞) ou, ce qui revient au même, sur $(0, \infty)$ est au plus égale à $2\arccos\sigma^2/(\frac{1}{2}\pi-\arccos\sigma^2)$. Par un choix convenable de σ on peut donc bien faire en sorte que cette densité soit plus petite que ε_0, ce qu'il fallait démontrer.

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[2] M. Biernacki, *Sur l'équation différentielle $x''+A(t)x=0$*, Prace Mat.-fiz. 40 (1933), p. 163-171.

[3] H. Milloux, *Sur l'équation différentielle $x''+A(t)x=0$*, Prace Mat.-fiz. 41 (1934), p. 39-54.

[4] G. Prodi, *Un'osservazione sugl'integrali dell'equazione $y''+A(x)y=0$ nel caso $A(x)\to\infty$ per $x\to\infty$*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1950, p. 462-464.

[5] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Sec. Ed., Bologna 1949.

[6] G. Trevisan, *Su l'equazione differenziale $y''(x)+A(x)y(x)=0$*, Rendiconti del Sem. Mat. di Padova 23 (1954), p. 340-342.

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1956