ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Sur un théorème de A. Filippoff

par Z. OPIAL (Kraków)

En généralisant un certain critérium d'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \tag{1}$$

donné par E. Harg [1], A. F. Filippoff a démontré le théorème suivant:

Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont continues, impaires et positives pour $x > 0$, l'inégalité

$$g(x) \geqslant (\tfrac{1}{4}+\varepsilon)f(x)F(x) \quad \text{où} \quad F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi \quad (\varepsilon > 0) \tag{A}$$

est suffisante pour que toute solution de l'équation (1), *aux valeurs initiales suffisamment petites, soit périodique.*

La démonstration de ce théorème a été publiée pour la première fois dans la monographie de W. W. Stépanoff et W. W. Némycki, *Théorie qualitative des équations différentielles* (en russe) ([2], p. 146). A. Filippoff, dans une note [3] publiée un peu plus tard, déduit cette proposition d'un théorème plus général, en remplaçant d'ailleurs l'inégalité (A) par l'inégalité moins restrictive:

$$(8-\varepsilon)G(x) \geqslant F^2(x) \quad \text{où} \quad G(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi \quad (\varepsilon > 0) \tag{B}$$

et en rejetant de plus l'hypothèse que $xf(x) > 0$.

Le but de la présente Note est de donner à ces conditions suffisantes une forme encore plus générale et d'obtenir en même temps un simple critérium d'apériodicité des solutions de l'équation du type envisagé.

§ 1. Nous dirons que l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{1}$$

où, comme d'habitude $x^{\cdot\cdot} = d^2x/dt^2$ et $x^{\cdot} = dx/dt$, est du type (S), si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, définies sur l'axe des x tout entier sont continues et remplissent les conditions suivantes:

1° toutes les deux sont impaires, c'est-à-dire pour tout x

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = -g(x),$$

2° $g(x)$ est positive pour x positifs, c'est-à-dire pour tout $x \neq 0$, $xg(x) > 0$.

Dans la suite nous nous bornerons à l'étude des intégrales des équations du type (S). Remplaçons d'abord l'équation (1) par le système dynamique

$$v^{\cdot} = -f(x)v - g(x), \qquad x^{\cdot} = v \tag{2}$$

à un seul point singulier $(0, 0)$. En dehors de l'axe des abscisses x on peut ensuite remplacer ce système par une seule équation

$$dv/dx = -f(x) - g(x)/v. \tag{3}$$

Prenons sur le demi-axe positif un point quelconque $(\xi, 0)$. Désignons par L_ξ^+ et L_ξ^- les parties de la courbe intégrale L_ξ du système (2) passant par ce point, situées respectivement au-dessus et au-dessous de l'axe des x (nous n'envisageons que le segment de la courbe intégrale en question qui est situé à droite de l'axe des ordonnées). Le point mobile $P\big(x(t), v(t)\big)$ dont le mouvement est déterminé par le système (2), en se mouvant (pour t décroissant) sur la courbe L_ξ à partir du point $(\xi, 0)$:

1° reste dans un domaine borné convenablement choisi, puisque la fonction $f(x) + g(x)/v$ est bornée dans le domaine: $0 \leqslant x \leqslant \xi$, $-\infty < v < +\infty$, sauf dans un voisinage du point $(0, 0)$;

2° n'aboutit à aucun point $(\eta, 0)$ de l'axe des abscisses, sauf, peut-être, à l'origine du système des coordonnées $(0, 0)$. En effet, dans le cas contraire, dans un voisinage suffisamment petit du premier de ces points, en comptant à partir de $(\xi, 0)$, on devrait avoir $dv/dx = -f(x) - g(x)/v < 0$ ce qui est impossible;

3° s'approche constamment de l'axe des ordonnées puisque, pour $v(t) > 0$, on a, en vertu de (2): $x^{\cdot}(t) > 0$ (dans le mouvement envisagé t décroît!).

La courbe L_ξ^+, suffisamment prolongée, coupera donc l'axe des ordonnées. La courbe L_ξ^- aura la même propriété. Plusieurs cas sont possibles:

Cas I. Pour tout $\xi > 0$ les courbes L_ξ^+ et L_ξ^- coupent l'axe des ordonnées en dehors de l'origine du système des coordonnées. Pour les équations du type (S) les éléments linéaires du système (2) étant symétriques par rapport à l'axe des v, les courbes symétriques des courbes

L_ξ^+ et L_ξ^- par rapport à cet axe sont aussi des courbes intégrales. En les joignant les unes aux autres, on obtient une courbe intégrale du système (2) fermée. En répétant le même procédé pour tous les ξ on obtient une infinité de telles courbes qui donnent l'origine à autant de solutions périodiques de l'équation (1). Toutes les autres courbes intégrales du système (2) qui ne se laissent pas construire de cette manière ne peuvent être fermées. Le plan (x, v) est ainsi partagé (fig. 1) en trois régions R_1, R_2 et R_3, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, dont les deux dernières peuvent d'ailleurs être vides. La région R_1, contenant dans son intérieur l'axe des abscisses et séparée de R_2 et de R_3 par deux courbes intégrales non fermées, est toute remplie d'intégrales fermées. Les deux autres régions R_2 et R_3 ne contiennent que des intégrales de l'équation (3) qui se laissent définir pour tous les x. En d'autres termes, pour qu'une intégrale $x(t)$ de l'équation (1), aux valeurs initiales $x(0) = x_0$ et $x^{\cdot}(0) = v_0$, soit périodique, il faut et il suffit que le point $P(x_0, v_0)$ soit situé à l'intérieur de la région R_1. Dans le cas envisagé toutes les intégrales aux valeurs initiales suffisamment petites seront donc périodiques.

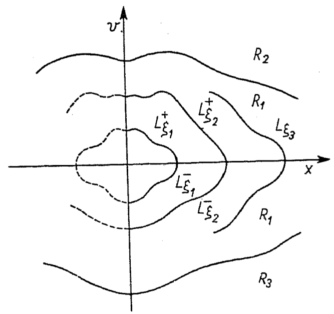

Fig. 1

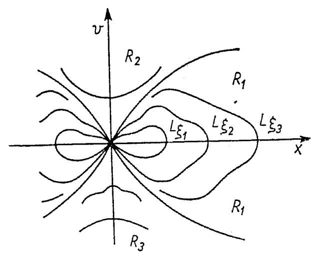

Fig. 2

Cas IIa. Pour tout $\xi > 0$ chacune des courbes L_ξ^+ et L_ξ^- coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 0)$. Dans ce cas le plan (x, v) est de nouveau partagé en trois régions R_1, R_2, R_3 (fig. 2), mais, cette fois, toutes les trois doivent être non vides. En effet, la région R_1 est remplie de toutes les courbes intégrales L_ξ, les deux autres régions contiennent toutes les intégrales de l'équation (3), issues des points de l'axe des ordonnées, excepté le point $(0, 0)$. La borne inférieure de telles intégrales situées dans le demi-plan $v > 0$ constitue la frontière commune des régions R_1 et R_2. Elle se compose des deux intégrales „maximales" ou „supérieures", issues du point $(0, 0)$. La structure de la région R_3 est tout à fait semblable.

Dans le cas envisagé le système (2) n'a évidemment pas de courbes intégrales fermées et, par conséquent, l'équation (1) n'a pas de solutions périodiques, excepté — bien sûr — la solution triviale $x(t) \equiv 0$.

Cas IIb. Seulement l'une des courbes L_ξ^+ et L_ξ^- coupe pour tout $\xi > 0$ l'axe des ordonnées à l'origine du système des coordonnées. Dans ce cas la situation est presque la même que dans le cas précédent. N'insistant pas davantage nous voyons qu'aucune courbe intégrale du système (2) n'est fermée, l'équation (1) n'a pas de solutions périodiques non triviales.

Cas III. Pour tout ξ plus petit qu'un $\xi_0 > 0$, l'une ou l'autre des courbes L_ξ^+, L_ξ^- aboutit au point $(0, 0)$, mais pour tout $\xi > \xi_0$ ni L_ξ^+ ni L_ξ^- n'aboutit à ce point. Dans ce cas le plan (x, v) se décompose en quatre régions R_1, R_2, R_3 et R_4 (fig. 3) symétriques par rapport à l'axe $x = 0$, dont les deux dernières peuvent être vides. Parmi les courbes intégrales du système (2) celles et seulement celles qui appartiennent à la région R_2 sont fermées, et, par suite, l'équation (1) a dans ce cas une infinité de solutions périodiques.

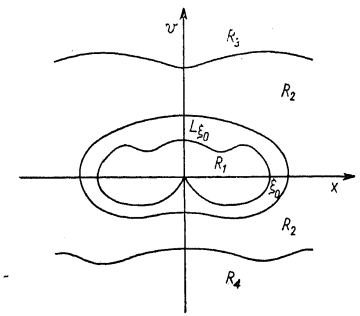

Fig. 3

Ces trois derniers cas ont cela de commun que lorsque l'un d'eux a lieu, on peut toujours trouver des solutions non périodiques de l'équation (1), aux valeurs initiales aussi petites que l'on voudra, et seulement dans le troisième on peut en trouver une infinité qui soient périodiques.

En quoi la différence essentielle entre le Cas I et tous les autres consiste-t-elle? La réponse est facile. En effet, le Cas I est le seul dans lequel aucune des courbes L_ξ^+, L_ξ^- n'aboutit au point $(0, 0)$. Mais ces courbes sont des intégrales de l'équation auxiliaire (3). Donc, dans ce cas et seulement dans ce cas l'équation (3) n'a pas d'intégrale aboutissant à l'origine du système des coordonnées. Tous les autres cas IIa, IIb et III exigent l'existence au moins d'une telle intégrale.

§ 2. L'analyse que nous avons faite au paragraphe précédent nous permet maintenant de démontrer facilement le théorème suivant:

Théorème 1. *Pour que toutes les intégrales de l'équation*

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{1}$$

du type (S), *aux valeurs initiales*: $x(0) = x_0$ *et* $x'(0) = v_0$ *suffisamment petites, soient périodiques, il suffit qu'il existe un nombre positif* a *tel que l'on ait*

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|}\,d\xi \geqslant (\tfrac{1}{4}+\varepsilon)|F(x)| \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \quad (\varepsilon > 0) \tag{4}$$

où $F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi$.

Démonstration. D'après ce que nous avons dit, il suffit de démontrer que c'est le Cas I qui a lieu, c'est-à-dire que l'équation (3) n'a pas d'intégrale aboutissant au point $(0, 0)$. Supposons donc, pour la démonstration par l'impossible, que l'équation (3) ait au moins une telle intégrale. Désignons-la par $v(x)$. Nous savons déjà que la fonction $v(x)$ doit avoir un signe constant dans un intervalle assez petit $(0, b)$. De plus, supposons $b \leqslant a$. Dans l'intervalle $(0, b)$ la fonction $v(x)$ satisfait à l'égalité

$$v(x) - v(\eta) = -\int_\eta^x f(\xi)\,d\xi - \int_\eta^x \frac{g(\xi)}{v(\xi)}\,d\xi \qquad (0 < \eta \leqslant x \leqslant b).$$

Faisant tendre η vers zéro, on constate que la fonction $g(x)/v(x)$ doit être intégrable dans l'intervalle $(0, b)$ tout entier, et que l'on a, par conséquent

$$v(x) = -F(x) - \int_0^x \frac{g(\xi)}{v(\xi)}\,d\xi \qquad 0 \leqslant x \leqslant b. \tag{5}$$

Si $v(x) > 0$, l'intégrale

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{v(\xi)}\,d\xi$$

est positive. On a donc dans ce cas $v(x) \leqslant -F(x)$ c'est-à-dire $F(x) < 0$ pour $0 < x \leqslant b$. On peut donc remplacer l'identité (5) par celle-ci

$$|v(x)| = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{|v(\xi)|}\,d\xi. \tag{6}$$

Si, au contraire $v(x) < 0$, l'intégrale

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{v(\xi)}\,d\xi$$

est négative. On a donc $v(x) \geqslant -F(x)$ c'est-à-dire $F(x) > 0$ pour $0 < x \leqslant b$. Dans ce cas on peut remplacer l'identité (5) par la relation (6). Dans l'un et l'autre de ces deux cas on a

$$|v(x)| \leqslant |F(x)| \tag{7}$$

d'où $1/|F(x)| \leqslant 1/|v(x)|$ et, par suite, $g(x)/|F(x)| \leqslant g(x)/|v(x)|$. De l'intégrabilité de la fonction $g(x)/|v(x)|$ dans l'intervalle $(0, b)$ résulte l'intégrabilité de la fonction $g(x)/|F(x)|$. Donc, si l'inégalité (4) est remplie du seul fait que la fonction $g(x)/|F(x)|$ n'est intégrable dans aucun intervalle $(0, x)$, $x > 0$, la relation (6) est impossible et la démonstration est terminée.

Supposons donc, pour la suite, que la fonction $g(x)/|F(x)|$ soit intégrable dans un intervalle $(0, c)$, $c \leqslant b$. Tous nos raisonnements ultérieurs seront valables justement dans cet intervalle.

Admettons pour l'instant qu'au lieu de (4) on ait

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|}\, d\xi \geqslant a|F(x)| \qquad (0 \leqslant x \leqslant c) \tag{8}$$

où a est un nombre positif. En remplaçant maintenant dans la formule (6) sous le signe d'intégration la fonction $|v(x)|$ par $|F(x)|$ on obtiendra, en vertu de (7)

$$|v(x)| \leqslant |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|}\, d\xi$$

d'où, en raison de l'hypothèse (8):

$$|v(x)| \leqslant a_1|F(x)| \quad \text{où} \quad a_1 = 1-a. \tag{7_1}$$

En remplaçant de nouveau dans (6) la fonction $|v(x)|$ par $a_1|F(x)|$, et en profitant encore de l'hypothèse (8), on obtient

$$|v(x)| \leqslant a_2|F(x)| \quad \text{où} \quad a_2 = 1-a/a_1. \tag{7_2}$$

De pareils calculs poursuivis indéfiniment conduisent à une suite d'inégalités

$$|v(x)| \leqslant a_n|F(x)| \quad \text{où} \quad a_n = 1-a/a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{7_n}$$

Mais on peut facilement montrer que pour $a > \frac{1}{4}$ les termes de la suite a_n ne peuvent être tous positifs. En effet, dans le cas contraire ce serait une suite décroissante bornée inférieurement et, par conséquent, convergente vers un nombre réel β qui devrait être la racine de l'équation algébrique du second degré $\beta^2 - \beta + a = 0$, ce qui est impossible. Parmi les termes a_n il y a donc des nombres négatifs ce qui conduit, en vertu de (7_n), à l'inégalité impossible $|v(x)| < 0$ dans l'intervalle $(0, c)$.

La supposition que l'équation (3) a au moins une intégrale $v(x)$ aboutissant au point $(0, 0)$ est donc incompatible avec l'hypothèse (4) et le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Il reste à montrer que tout couple de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ qui satisfait à l'inégalité (B) de Filippoff, satisfait aussi à l'inégalité (4). En effet, de (B) on obtient d'abord $\sqrt{(8-\varepsilon)G(x)} \geqslant |F(x)|$ et ensuite

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|} d\xi \geqslant \frac{1}{\sqrt{8-\varepsilon}} \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{G(\xi)}} d\xi = \frac{2\sqrt{G(x)}}{\sqrt{8-\varepsilon}} \geqslant \frac{2}{8-\varepsilon}|F(x)| \geqslant \left(\frac{1}{4}+\eta\right)|F(x)|$$

où $\eta = \varepsilon/32$. D'autre part, par des exemples faciles à construire on pourrait montrer que l'inégalité (4) est essentiellement moins restrictive que celle de Filippoff.

§ 3. On peut démontrer de la même manière le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *S'il existe un nombre positif a tel que l'on ait, pour $0 \leqslant x \leqslant a$, l'inégalité*

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|} d\xi \leqslant \frac{1}{4}|F(x)| \qquad \text{où} \qquad F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

on peut trouver des intégrales non périodiques de l'équation $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ du type (S), aux valeurs initiales aussi petites que l'on voudra. Si $a = \infty$, aucune intégrale non triviale de cette équation n'est périodique.

Démonstration. Comme précédemment il suffit de démontrer que, dans l'hypothèse (9), on a ou bien un des Cas IIa et IIb, ou bien le Cas III. A cet effet il suffit, comme nous le savons, de démontrer que cette hypothèse garantit l'existence au moins d'une telle intégrale de l'équation auxiliaire (3) qui aboutit au point $(0, 0)$, ce que nous ferons à l'aide de la méthode des approximations successives.

Avant de passer au point essentiel de la démonstration, remarquons que de la relation (9) il suit que la fonction $F(x)$ a un signe constant dans l'intervalle $(0, a)$.

Cela posé, remarquons d'abord que la recherche de l'intégrale de l'équation (3) qui aboutit au point $(0, 0)$ conduit à l'équation intégrale

$$v(x) = -F(x) - \int_0^x \frac{g(\xi)}{v(\xi)} d\xi. \tag{10}$$

Il suffira donc de montrer que cette équation intégrale a au moins une solution continue.

La différence entre les deux cas possibles $F(x)>0$ et $F(x)<0$ n'est pas essentielle, car on peut remplacer l'équation (10) par l'équation

$$u(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{u(\xi)}\,d\xi \tag{11}$$

en posant $u(x)=v(x)$, si $F(x)<0$ et $u(x)=-v(x)$, si $F(x)>0$. Il suffit donc de considérer l'équation (11).

Posons d'abord dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$:

$$u_1(x) = |F(x)| \tag{12_1}$$

et ensuite

$$u_2(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{u_1(\xi)}\,d\xi = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|}\,d\xi. \tag{12_2}$$

On a donc $u_2(x) \leqslant |F(x)| = u_1(x)$ et, d'autre part, en vertu de (9): $u_2(x) \geqslant (1-\frac{1}{4})|F(x)|$ c'est-à-dire

$$a_1|F(x)| \leqslant u_2(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{où} \quad a_1 = 1-\tfrac{1}{4}. \tag{13_1}$$

On peut donc poser dans l'intervalle envisagé:

$$u_3(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{u_2(\xi)}\,d\xi \tag{12_3}$$

puisque l'inégalité (13_1) garantit l'existence de cette dernière intégrale. De (13_1) on obtient ensuite

$$a_2|F(x)| \leqslant u_3(x) \leqslant u_2(x) \quad \text{où} \quad a_2 = 1-\tfrac{1}{4}/a_1. \tag{13_2}$$

Procédant ainsi indéfiniment, on pose généralement

$$u_{n+1}(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{u_n(\xi)}\,d\xi \quad (n=1,2,\ldots) \tag{12_n}$$

ce qui conduit chaque fois aux inégalités

$$a_n|F(x)| \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \quad \text{où} \quad a_n = 1-1/4a_{n-1}. \tag{13_n}$$

On peut aisément vérifier que les nombres a_n forment une suite décroissante, bornée inférieurement par le nombre 0. Cette suite est donc convergente et sa limite β est l'unique racine de l'équation algébrique $\beta^2-\beta+\frac{1}{4}=0$ c'est-à-dire $\beta=\frac{1}{2}$. Les formules (12_n) nous permettent donc de définir réellement les fonctions $u_{n+1}(x)$ à partir de $u_n(x)$ et la suite décroissante de fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots$ converge vers une fonction $u(x)$ qui satisfait à l'inégalité $\frac{1}{2}|F(x)| \leqslant u(x)$. On en déduit l'inégalité $g(x)/u(x) \leqslant 2g(x)/|F(x)|$. Le quotient $g(x)/u(x)$ est donc sommable dans l'intervalle $(0, a)$. D'autre part tous les quotients $g(x)/u_n(x)$ sont bornés par la même fonction $2g(x)/|F(x)|$ sommable dans cet intervalle. D'après le théorème bien connu de Lebesgue sur la convergence des suites d'intégrales de fonctions sommables, la suite d'intégrales

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{u_n(\xi)}\,d\xi$$

converge vers l'intégrale

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{u(\xi)}\,d\xi$$

et, par conséquent, passant dans les formules (12_n) avec $u_n(x)$ à la limite $u(x)$, on obtient, dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, l'identité

$$u(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(\xi)}{u(\xi)}\,d\xi.$$

Il en résulte évidemment que la fonction $u(x)$ est continue. Si $a=\infty$, la fonction $u(x)$ peut être définie de cette manière sur le demi-axe $x \geqslant 0$ tout entier et, par conséquent, le Cas III est impossible. Notre théorème se trouve ainsi entièrement démontré.

Travaux cités

[1] E. McHarg, *A differential equation*, J. of London Math. Soc. 22 (1947), p. 83-85.

[2] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва - Ленинград 1949.

[3] А. Ф. Филиппов, *Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка*, Математический Сборник 30 (72) (1952), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1956