ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

# Remarque sur la possibilité d'un passage continu conservant la stabilité entre deux systèmes d'équations différentielles quelconques ayant une solution périodique et stable (*)

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

**§ 1.** Envisageons deux systèmes d'équations différentielles

$(S_0)$ $$dX/dt = F_0(t, X),$$

$(S_1)$ $$dX/dt = F_1(t, X)\ (^1).$$

Supposons que les fonctions $F_i(t, X)$ soient continues par rapport à $(t, X)$ pour $0 \leqslant t < +\infty$, $X$ quelconque et que chaque système $S_i$ $(i = 0, 1)$ admette une intégrale

(Intégrale $C_i$) $$X_i = \Phi_i(t) \quad (i = 0, 1),$$

périodique de période $T$ $(T > 0)$, asymptotiquement stable au sens de Liapounoff ([2], p. 168).

DÉFINITION 1. Nous dirons que le couple $\{F(t, X, \lambda), \Phi(t, \lambda)\}$ *constitue un passage régulier par rapport à la stabilité asymptotique entre* $(S_0, C_0)$ *et* $(S_1, C_1)$, lorsque $F$ et $\Phi$ sont continues par rapport à $(t, X, \lambda)$ pour $t \in \langle 0, \infty)$, $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, $X$ quelconque, et lorsqu'elles satisfont aux conditions

1) $F(t, X, 0) \equiv F_0(t, X)$, $F(t, X, 1) \equiv F_1(t, X)$,

2) $\Phi(t, 0) \equiv \Phi_0(t)$, $\Phi(t, 1) \equiv \Phi_1(t)$,

3) pour chaque $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ la fonction $X = \Phi(t, \lambda)$ constitue une solution asymptotiquement stable et périodique, de période $T$, du système d'équations

$(R_\lambda)$ $$dX/dt = F(t, X, \lambda).$$

---

(*) Le problème traité dans la présente note m'a été suggéré par la lecture d'un article de M. M. Gelfand et Lidskij [1].

(1) $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $F_i(t, X) = \{f_{i1}(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{in}(t, x_1, \ldots, x_n)\}$ $(i = 0, 1)$.

DÉFINITION 2. Nous dirons qu'*il est possible de passer du couple* $(S_0, C_0)$ *au couple* $(S_1, C_1)$ *d'une façon régulière par rapport à la stabilité asymptotique* lorsqu'il existe deux fonctions vectorielles $F(t, X, \lambda)$ et $\Phi(t, \lambda)$ continues par rapport à $(t, X, \lambda)$ pour $t\epsilon\langle 0, \infty)$, $\lambda\epsilon\langle 0, 1\rangle$, $X$ quelconque, telles que le couple $\{F, \Phi\}$ constitue un passage régulier par rapport à la stabilité asymptotique entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1, C_1)$.

Pour exprimer que cette propriété a lieu nous écrivons

$$(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1).$$

**§ 2.** Le passage régulier par rapport à la stabilité asymptotique possède les propriétés suivantes:

PROPRIÉTÉ $W_1$. *Si* $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1)$, *on a aussi*

$$(S_1, C_1) \xrightarrow{\text{asst}} (S_0, C_0)\ (^2).$$

PROPRIÉTÉ $W_2$. *Si* $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1)$ *et* $(S_1, C_1) \xrightarrow{\text{asst}} (S_2, C_2)$, *on a* $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_2, C_2)$ (³).

LEMME 1. *Envisageons le système*

$$(S) \qquad dX/dt = F(t, X).$$

*Supposons que* $A(t) = \{a_1(t), \ldots, a_n(t)\}$ *soit une fonction de classe* $C^1$, *et que* $C$ *soit une intégrale périodique de période* $T$ $(T > 0)$, *et que $C$ soit une intégrale périodique de même période $T$, asymptotiquement stable, du système $S$.*

*Désignons par $W$ la transformation linéaire*

$$(W) \qquad Y = X + A(t),$$

*par $W(S)$ le système d'équations différentielles qu'on obtient en appliquant la transformation $W$ au système $S$, et par $W(C)$ l'image de l'intégrale $C$ fournie par la transformation $W$.*

(²) Le couple $\{\hat{F}, \hat{\Phi}\}$ qui constitue un passage entre $(S_1, C_1)$ et $(S_0, C_0)$ peut être obtenu du couple $\{F, \Phi\}$ constituant un passage entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1, C_1)$ par un changement du paramètre $\lambda = 1-\bar{\lambda}$. Il suffit de poser

$$\hat{F}(t, X, \bar{\lambda}) = F(t, X, 1-\bar{\lambda}), \qquad \Phi(t, \bar{\lambda}) = \Phi(t, 1-\bar{\lambda}).$$

(³) On peut obtenir un couple $\{F, \Phi\}$ qui constitue un passage régulier entre $(S_0, C_0)$ et $(S_2, C_2)$ par un changement convenable des paramètres dans les fonctions $\{\bar{F}(t, X, \lambda), \bar{\Phi}(t, \lambda)\}$ qui constituent un passage entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1, C_1)$ et dans les fonctions $\{\bar{\bar{F}}, \bar{\bar{\Phi}}\}$ constituant un passage entre $(S_1, C_1)$ et $(S_2, C_2)$. On peut facilement vérifier qu'il suffit de poser

$$F(t, X, \lambda) = \begin{cases} \bar{F}(t, X, 2\lambda) & \text{pour} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ \bar{\bar{F}}(t, X, 2\lambda-1) & \text{pour} \quad \frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\Phi(t, \lambda) = \begin{cases} \bar{\Phi}(t, 2\lambda) & \text{pour} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ \bar{\bar{\Phi}}(t, 2\lambda-1) & \text{pour} \quad \frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$



*Ceci admis, la courbe $W(C)$ constitue une intégrale asymptotiquement stable et périodique de période $T$ du système $W(S)$.*

Démonstration. La transformation $W$ conserve les distances entre deux points quelconques $(t, X)$, $(t, \bar{X})$. En effet, prenons deux intégrales $C$: $X = \Phi(t)$ et $\bar{C}$: $X = \bar{\Phi}(t)$ du système $S$. Soit

$$\varrho(t) = |\Phi(t)-\bar{\Phi}(t)|, \qquad r(t) = \left|W(\Phi(t))-W(\bar{\Phi}(t))\right|.$$

Il résulte de la définition de la transformation $W$ que

$$r(t) = |\Phi(t)+A(t)-\bar{\Phi}(t)-A(t)| = \varrho(t).$$

Les inégalités $\varrho(t) \leqslant \varepsilon$ et $r(t) \leqslant \varepsilon$ sont donc équivalentes. Il s'ensuit que (relativement à $S$) les relations $\varrho(t) \to 0$ pour $t \to \infty$ et $r(t) \to 0$ pour $t \to \infty$ sont équivalentes. Il est donc presque évident que la stabilité asymptotique de l'intégrale $C$ est équivalente à celle de $W(C)$.

PROPRIÉTÉ $W_3$. *Pour chaque système d'équations différentielles $S_0$ possédant une intégrale $C_0$: $X = \Phi_0(t)$ périodique de période $T$ et asymptotiquement stable il existe un système d'équations $S_1^0$ admettant $C_1^0$: $X = 0$ comme intégrale asymptotiquement stable et telle que* $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1^0, C_1^0)$.

Démonstration. Par l'intermédiaire de la transformation

$$(W_\lambda) \qquad Y = X - \lambda\Phi_0(t) \quad \text{pour} \quad \lambda\epsilon\langle 0, 1\rangle,$$

le système d'équations $S_0$ est transformé en un système d'équations

$$(R_\lambda) \qquad dY/dt = F\big(t, Y+\lambda\Phi_0(t)\big)-\lambda\Phi_0'(t),$$

qui admet (comme il résulte du lemme 1) la fonction

$$Y = \Phi_0(t)(1-\lambda) = \Phi(t, \lambda) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

comme intégrale asymptotiquement stable et périodique (de période $T$).

Posons par définition

$$F(t, X, \lambda) = F\big(t, X+\lambda\Phi_0(t)\big)-\lambda\Phi_0'(t), \qquad F_1^0(t, X) = F(t, X, 1).$$

Les fonctions $\{F, \Phi\}$ sont continues par rapport à $(t, X, \lambda)$ pour $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $X$ quelconque.

On a

$$F(t, X, 0) = F(t, X), \qquad \Phi(t, 0) = \Phi_0(t),$$

$$F(t, X, 1) = F\big(t, X+\Phi_0(t)\big)-\Phi_0'(t) = F_1^0(t, X),$$

$$\Phi(t, 1) \equiv 0.$$

Le couple $\{F, \Phi\}$ constitue donc un passage régulier entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1^0, C_1^0)$.

Remarque 1. Soit $r > 0$ un nombre quelconque fixe. Désignons par $\omega_r$ le cylindre

$$(\omega_r) \qquad |X| \leqslant r, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Envisageons deux systèmes d'équations différentielles

$$(R) \qquad dX/dt = F(t, X),$$

$$(R_M) \qquad dX/dt = \overline{F}(t, X) \quad \text{(système modifié)}$$

à seconds membres continus dans tout le demi-espace $t \geqslant 0$ et identiques dans le cylindre $\omega_r$. Supposons, en plus que

$$F(t, 0) \equiv \overline{F}(t, 0) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Ceci admis, l'intégrale $X \equiv 0$ n'est asymptotiquement stable que simultanément pour les systèmes $R$ et $R_M$.

La démonstration résulte immédiatement du fait qu'une intégrale $C$ du système $R$ (respectivement du système $R_M$) contenue pour $t \geqslant 0$ dans le cylindre $\omega_r$, est aussi une intégrale du système $R_M$ (respectivement du système $R$). En effet, choisissons un nombre positif $\varepsilon$ quelconque, $0 < \varepsilon < r$ et envisageons le cylindre $\omega_\varepsilon$. $\omega_\varepsilon$ étant contenu dans $\omega_r$, une intégrale $C$ du système $R$ (respectivement $R_M$) contenue dans $\omega_\varepsilon$ constitue aussi une intégrale du système $R_M$ (respectivement $R$). Soit $\delta_\varepsilon$ ($\delta_\varepsilon > 0$) un nombre tel que chaque intégrale $C$ du système $R$ (respectivement $R_M$) issue d'un point de la sphère

$$(K_\varepsilon) \qquad |X| \leqslant \delta_\varepsilon, \quad t = 0,$$

soit toujours contenue dans le cylindre $\omega_\varepsilon$ pour $0 \leqslant t < \infty$. Chaque intégrale du système $R_M$ (respectivement $R$) passant par un point de $K_\varepsilon$ est identique pour tout $t \geqslant 0$ à une intégrale du système $R$ (respectivement $R_M$) issue d'un point appartenant à $K_\varepsilon$, donc elle est toujours contenue dans $\omega_\varepsilon$ (pour $t \geqslant 0$). D'une manière analogue, si chaque intégrale issue d'un point de $K_\varepsilon$ tend vers zéro pour $t \to \infty$, chaque intégrale de $R_M$ (respectivement $R$) passant par un point de $K_\varepsilon$ tend aussi vers zéro pour $t \to \infty$. Ceci prouve que $X \equiv 0$ ne peut être stable que simultanément pour les systèmes $R_M$ et $R$.

Théorème 1. *Envisageons deux systèmes d'équations $S_0$ et $S_1$ à seconds membres continus pour le $(t, X)$ du demi-espace $t \geqslant 0$. Supposons que $C_0$ soit une intégrale périodique de période $T$ ($T > 0$) du système d'équations $S_0$ asymptotiquement stable. D'une manière analogue soit $C_1$ une intégrale du même genre du système $S_1$. Ceci admis, on peut passer de $(S_0, C_0)$ à $(S_1, C_1)$ régulièrement par rapport à la stabilité asymptotique, c'est-à-dire $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1)$.*



Démonstration. Il résulte de la propriété $W_3$ qu'il existe deux systèmes d'équations $S_1^*$ et $S_2^*$ à seconds membres continus pour tout $(t, X)$ appartenant au demi-espace $t \geqslant 0$, dont une intégrale asymptotiquement stable est la fonction $C^*$: $X \equiv 0$ et tels que

$$(1) \qquad (S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1^*, C^*), \qquad (S_1, C_1) \xrightarrow{\text{asst}} (S_2^*, C^*)$$

d'où, en vertu de la propriété $W_1$, il résulte que

$$(2) \qquad (S_2^*, C^*) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1).$$

Il suffit de prouver que

$$(3) \qquad (S_1^*, C^*) \xrightarrow{\text{asst}} (S_2^*, C^*),$$

car (1), (2), (3) et la propriété $W_2$ entraînent $(S_0, C_0) \xrightarrow{\text{asst}} (S_1, C_1)$.

Il reste donc à prouver que (3) a lieu pour chaque couple de systèmes $S_1^*$ et $S_2^*$ admettant $X \equiv 0$ pour intégrale asymptotiquement stable. Ces systèmes ont la forme

$$(S_i^*) \qquad dX/dt = F_i(t, X) \quad (i = 1, 2)$$

où $F_i(t, X)$ sont des fonctions continues pour $0 \leqslant t < \infty$, $X$ quelconque, et satisfont aux identités

$$(4) \qquad F_i^*(t, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2).$$

De la remarque 1 (se rapportant à un système modifié uniquement à l'extérieur d'un cylindre) il résulte que, pour passer de $(S_1^*, C^*)$ à $(S_2^*, C^*)$ régulièrement par rapport à la stabilité asymptotique, il suffit de définir une fonction $F(t, X, \lambda)$ continue pour $t \geqslant 0$, $X$ quelconque, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ de telle façon que pour chaque $\lambda \epsilon (0, 1)$ dans un certain voisinage $|X| \leqslant a(\lambda)$ de l'intégrale $C^*$ l'identité $F(t, X, \lambda) \equiv F_1^*(t, X)$ soit satisfaite, et une fonction continue $a(\lambda)$ de la variable $\lambda$ telle que $a(\lambda) > 0$ pour $\lambda \epsilon (0, 1)$ et $a(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to 1$. D'autre part on doit avoir

$$(5) \qquad F(t, X, 0) \equiv F_1^*(t, X), \qquad F(t, X, 1) \equiv F_2^*(t, X).$$

On obtient une telle fonction $F(t, X, \lambda)$ en posant, par exemple,

$$(6) \qquad F(t, X, \lambda) = F_2^*(t, X) + \sigma(|X|, \lambda)[F_1^*(t, X) - F_2^*(t, X)]$$

où $\sigma(u, \lambda)$ est une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

A) $\sigma(u, \lambda)$ est continue pour $(u, \lambda)$ appartenant à l'ensemble $0 \leqslant u$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $(u, \lambda) \neq (0, 1)$,

B) la fonction $\sigma(u, \lambda)$ est bornée dans un voisinage du point $u = 0$, $\lambda = 1$,

C) $\sigma(u, 0) \equiv 1$, $\sigma(u, \lambda) \equiv 1$ pour $0 \leqslant u \leqslant a(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$,

D) $\sigma(u, 1) \equiv 0$ pour $u \geqslant 0$.(4)

En vertu de (4) et de la condition B) on vérifie facilement que, lorsque $\sigma$ possède les propriétés A), B), C), D), la fonction $F(t, X, \lambda)$ définie par (6) est continue par rapport à $(t, X, \lambda)$ pour chaque $(t, X)$ et $\lambda \epsilon \langle 0, 1 \rangle$. Elle satisfait aux conditions (5) et

$$F(t, X, \lambda) \equiv F_1^*(t, X) \quad \text{pour} \quad |X| \leqslant a(\lambda), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

En vertu de la remarque 1 il résulte de ces dernières identités que pour chaque $\lambda \epsilon \langle 0, 1 \rangle$ la fonction $\Phi(t, \lambda) \equiv 0$ est une intégrale asymptotiquement stable du système $R_\lambda$

$$(R_\lambda) \qquad dX/dt = F(t, X, \lambda).$$

La fonction $F(t, X, \lambda)$ définie ci-dessus constitue avec la fonction $\Phi(t, \lambda) \equiv 0$ un passage régulier par rapport à la stabilité asymptotique entre $(S_1^*, C^*)$ et $(S_2^*, C^*)$. La démonstration se trouve ainsi terminée.

**§ 3.** Remarque 2. Si l'on définit le passage entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1, C_1)$ régulier par rapport à la stabilité au sens de Liapounoff ([2], p. 168) de même que nous l'avons fait pour le passage régulier par rapport à la stabilité asymptotique, on obtient le théorème suivant tout à fait analogue au théorème 1 et admettant une démonstration analogue.

THÉORÈME 1'. *Considérons deux systèmes d'équations $S_0$ et $S_1$ à seconds membres continus partout et supposons que $S_i$ admette une intégrale périodique $C_i$, de période $T$, stable au sens de Liapounoff $(i = 0, 1)$. Ceci posé, il existe entre $(S_0, C_0)$ et $(S_1, C_1)$ un passage régulier par rapport à la stabilité au sens de Liapounoff telle que $\Phi(t, \lambda)$ est périodique de période $T$.*

**§ 4.** Admettons que $F(t, X, \lambda)$ et $\Phi(t, \lambda)$ satisfassent aux conditions précisées dans la définition 1.

DÉFINITION 3. Nous dirons que le passage $\{F(t, X, \lambda), \Phi(t, \lambda)\}$ *est équirégulier par rapport à la stabilité au sens de Liapounoff* (ou bien que

(4) On peut (par exemple) poser $a(\lambda) = 1-\lambda$, tandis qu'à l'extérieur de l'ensemble $Z$ des points $(u, \lambda)$ pour lesquels au moins l'une des trois conditions suivantes I, II, III est remplie:

$$\text{I. } \lambda = 0, \qquad \text{II. } \lambda = 1, \qquad \text{III. } 0 \leqslant u \leqslant a(\lambda),\ 0 < \lambda < 1$$

on peut poser $\sigma(u, \lambda) = 1 - \dfrac{1-g(\lambda)}{b(\lambda)-a(\lambda)}(u - a(\lambda))$ pour $a(\lambda) < u \leqslant b(\lambda)$, $\sigma(u, \lambda) = g(\lambda)$ pour $b(\lambda) < u$ où $g(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont des fonctions (quelconques) continues pour $0 < \lambda < 1$ et telles que $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $0 < g(\lambda) < 1$ pour $0 < \lambda < 1$ et $b(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to 1$, $b(\lambda) > a(\lambda)$ pour $0 < \lambda < 1$.



dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ l'intégrale $X = \Phi(t, \lambda)$ du système $R_\lambda$ est *uniformément stable par rapport à* $\lambda$) lorsque pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta_\varepsilon$ $(\delta_\varepsilon > 0)$ ne dépendant pas de $\lambda$, tel que pour chaque système $R_\lambda$ $(\lambda \epsilon \langle 0, 1 \rangle)$ toute intégrale $X(t, \lambda)$ de $R_\lambda$ qui est issue à l'instant $t = 0$ d'un point $X$ du voisinage $|X - \Phi(0, \lambda)| \leqslant \delta_\varepsilon$ satisfasse à la condition

$$|X(t, \lambda) - \Phi(t, \lambda)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Rémarque 3. On vérifie facilement que la notion ainsi introduite possède les propriétés $W_1$, $W_2$, $W_3$. De plus, on peut facilement démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *On peut passer équirégulièrement par rapport à la stabilité de Liapounoff d'un système quelconque d'équations différentielles $S_0$ à seconds membres continus, admettant la fonction $X \equiv 0$ pour intégrale stable au sens de Liapounoff à un système à seconds membres identiquement nuls.*

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant:

LEMME 2. *Envisageons trois systèmes d'équations différentielles*

$$(S_0) \ \frac{dX}{dt} = F_0(t, X), \qquad (S_1) \ \frac{dX}{dt} = 0, \qquad (R_\lambda) \ \frac{dX}{dt} = F(t, X, \lambda).$$

*Relativement aux nombres fixes $\alpha$, $c$ et aux fonctions $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ nous admettons que:*

$0 < \alpha < 1$, $0 < c$,

$a(\lambda)$ *est continue pour* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$a(\lambda) > 0$ *pour* $0 \leqslant \lambda < 1$, $a(1) = 0$,

$b(\lambda)$ *est continue pour* $\alpha \leqslant \lambda < 1$,

$c > b(\lambda) > a(\lambda)$ *pour* $\alpha \leqslant \lambda < 1$,

$$(7) \qquad b(1) = 0.$$

*Relativement aux fonctions $F_0(t, X)$ et $F(t, X, \lambda)$ nous admettons les hypothèses:*

$F_0(t, X)$, $F(t, X, \lambda)$ *sont continues pour* $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $X$ *quelconque,*

$F(t, 0, \lambda) \equiv F_0(t, 0) \equiv 0$ *pour* $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$F(t, X, 0) \equiv F_0(t, X)$, $F(t, X, 1) \equiv 0$ *pour* $t \geqslant 0$ *et chaque* $X$,

$$(8) \quad F(t, X, \lambda) = F_0(t, X) \quad \textit{lorsque} \quad t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ |X| \leqslant a(\lambda),$$

$$(9) \quad F(t, X, \lambda) \equiv 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \geqslant 0,\ \alpha \leqslant \lambda < 1,\ b(\lambda) \leqslant |X| \leqslant c.$$

*Supposons enfin que la ligne $X \equiv 0$ (pour $0 \leqslant t < \infty$) soit une intégrale stable au sens de Liapounoff du système $S_1$.*

*Ceci posé, $X \equiv 0$ est une intégrale stable de chaque système $R_\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ et elle est uniformément stable par rapport à $\lambda$.*

Démonstration du lemme 2. Soit $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < c)$ un nombre quelconque. Choisissons un nombre $L$ $(L > 0)$ de telle façon que l'on ait $b(\lambda) < \varepsilon$ pour $L \leqslant \lambda \leqslant 1$ (ce qui est possible grâce à (7)). Chaque intégrale du système $R_\lambda$ pour $\lambda \epsilon \langle L, 1\rangle$ issue d'un point de l'ensemble $\Sigma(\varepsilon, \lambda)$, $b(\lambda) < |X| < \varepsilon$, constitue aussi une intégrale du système $S_0$ (cf. (9)) et par suite étant constante elle est toujours contenue dans l'ensemble $\Sigma(\varepsilon, \lambda)$. En vertu de la dernière propriété on voit aisément que pour $\lambda$ satisfaisant aux inégalités $L \leqslant \lambda \leqslant 1$ chaque intégrale du système $R_\lambda$ issue pour $t = 0$ d'un point de l'ensemble $|X| < \varepsilon$ est toujours contenue pour $t \geqslant 0$ dans l'ensemble:

(cylindre $\omega_\varepsilon$) $\qquad |X| < \varepsilon, \quad t \geqslant 0.$

En vertu de la stabilité supposée de l'intégrale $X \equiv 0$ du système $S_0$, pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir $\delta_1(\varepsilon) > 0$, de telle façon que chaque intégrale du système $S_0$ issue d'un point de l'ensemble $t = 0$, $|X| < \delta_1(\varepsilon)$ soit toujours contenue dans $\omega_\varepsilon$ pour $t \geqslant 0$. La fonction $F(t, X, \lambda)$ étant identique à $F_0(t, X)$ lorsque $\lambda \epsilon \langle 0, 1\rangle$ et $|X| \leqslant a(\lambda)$ (cf. (8)), on vérifie facilement qu'en posant

$$k(\varepsilon) = \min_{0 \leqslant \lambda \leqslant L} a(\lambda) \quad \text{et} \quad \delta_\varepsilon = \min\big(k(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \varepsilon\big)$$

on obtient un $\delta_\varepsilon > 0$ commun pour tout le système $R_\lambda$ (pour $\lambda \epsilon \langle 0, 1\rangle$), tel que les solutions de $R_\lambda$ issues de la sphère $t = 0$, $|X| < \delta_\varepsilon$ soient toujours contenues dans $\omega_\varepsilon$ pour $t \geqslant 0$.

La démonstration du théorème 2 se trouve, en vertu du lemme 2, ramenée à la construction d'une fonction $F(t, X, \lambda)$ satisfaisant aux conditions précisées dans l'énoncé de ce lemme, $a$, $c$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 2. Nous construisons ensuite une fonction $\sigma(u, \lambda)$ ayant les propriétés suivantes:

$\sigma(u, \lambda)$ est continue pour les $(u, \lambda)$ tels que $u \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $(u, \lambda) \neq (0, 1)$,

$\sigma(u, \lambda) \equiv 1$ lorsque $0 \leqslant u \leqslant a(\lambda)$,

$\sigma(u, \lambda) \equiv 0$ lorsque $b(\lambda) \leqslant u \leqslant c$, $a \leqslant \lambda < 1$,

$\sigma(u, 1) \equiv 0$ et $\sigma(u, 0) \equiv 1$.

On peut facilement vérifier que la fonction

$$F(t, X, \lambda) = \sigma(|X|, \lambda) F_0(t, X)$$

satisfait aux conditions du lemme 2, ce qui termine la démonstration du théorème 2.



Remarque 4. On vérifie sans peine que toutes les constructions envisagées dans la présente note peuvent être appliquées aussi dans les démonstrations des théorèmes que l'on obtient des théorèmes 1, 2 et 1′ en supposant les seconds membres des systèmes $S_0$, $S_1$ et $R_\lambda$ périodiques de période $T$ $(T > 0)$. Cette périodicité devra être conservée dans le passage de $S_0$ à $S_1$ pour tout $\lambda \epsilon \langle 0, 1\rangle$.

### Travaux cités

[1] И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский, *О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, Успехи Математических наук Т. X, 1 (63) (1955), p. 3-40.

[2] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1949.

*Reçu par la Rédaction le 9. 6. 1956*