En effet, si dans l'intégrale $z(t, x_i, \mu_a)$ de l'équation (10) nous posons $t=1$, la fonction $z(1, x_i, t_a - t_a^0)$ sera intégrale du système d'équations

$$\frac{\partial z}{\partial t_a} + H_a\left(t_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) = 0$$

définie dans R.

Cette intégrale sera l'unique solution du système dans l'ensemble R; ceci résulte de l'énoncé qui termine la note [1] (voir p. 36).

Travaux cités

[1] W. Pawelski, *Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 29-36.

[2] — *Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas de variables complexes*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 37-55.

[3] T. Ważewski, *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 16 (1937), p. 97-106.

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice

par T. Rachwał (Kraków)

Introduction. Dans la littérature qui traite de la théorie des courbes dans l'espace euclidien R_3 il existe un théorème sur l'ordre de la distance d'un point d'une courbe régulière à la sphère osculatrice. D'après ce théorème, sous certaines conditions imposées à la courbe, cet ordre n'est pas inférieur à 4. En rapport avec ce théorème M. S. Gołąb a posé le problème de la détermination plus précise de cet ordre dans le cas où les dérivées successives des deux courbures au point donné s'annulent. Sur la courbe C, donnée par une équation vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ nous faisons les hypothèses suivantes:

(Z) I. La fonction $\boldsymbol{r}(s)$ est régulière(1) dans l'intervalle (s_1, s_2) qui contient dans son intérieur le point s_0.

II. Le produit vectoriel $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''$ est différent de zéro dans l'intervalle (s_1, s_2).

D'après la théorie du contact, la détermination de l'ordre du contact entre la courbe et la sphère tangente à cette courbe se ramène à une étude des valeurs des dérivées successives de la fonction

$$F(s) = \tfrac{1}{2}\left((\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{v})^2 - (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v})^2\right), \tag{1}$$

où le vecteur $\boldsymbol{v}$ détermine le centre de la sphère tangente à la courbe au point $M(s_0)$. Le vecteur $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(s_0)$ détermine le point M_0 sur la courbe C et le vecteur $\boldsymbol{r}(s)$ — le point M de la courbe C voisin du point M_0.

L'ordre infinitésimal q de la distance d'un point M de la courbe à la sphère tangente à cette courbe au point en question est égal à l'ordre de la dérivée de la fonction $F(s)$ qui, la première, ne s'annule pas au point considéré.

Dans ce travail je démontre quelques théorèmes sur cet ordre. Les démonstrations de ces théorèmes sont basées sur des lemmes relatifs à la

(1) Admettant des dérivées de tous les ordres.

structure des fonctions ${}_{(n)}L$, ${}_{(n)}M$, ${}_{(n)}N$, coordonnées de la dérivée d'ordre n du vecteur tangent $\boldsymbol{t}$ de la courbe dans le système local de Frenet

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = {}_{(n)}L\boldsymbol{t} + {}_{(n)}M\boldsymbol{b} + {}_{(n)}N\boldsymbol{n} \tag{2}$$

où $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{n}$ sont les vecteurs binormal et normal principal de la courbe.

LEMME 1. *Si les hypothèses* (Z) *sont vérifiées et si* $n \geqslant 4$, *les fonctions* ${}_{(n)}L$, ${}_{(n)}M$ *et* ${}_{(n)}N$ *peuvent être mises sous la forme*

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}L &= \delta_n k^n + g_n \tau\tau^{(n-4)} k^2 - nkk^{(n-2)} + {}_{(n)}\bar{L}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-5)}),\\
{}_{(n)}M &= \varepsilon_n k^n + k^{(n-1)} + h_n k\tau\tau^{(n-3)} + {}_{(n)}\bar{M}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-4)}),\\
{}_{(n)}N &= k\tau^{(n-2)} + l_n k' \tau^{(n-3)} + w_n \tau k^{(n-2)} + {}_{(n)}\bar{N}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-4)})
\end{aligned}$$

où $\delta_n = (-1)^{n/2}$ *et* $\varepsilon_n = 0$ *pour* n *pair et* $\delta_n = 0$ *et* $\varepsilon_n = (-1)^{(n-1)/2}$ *pour* n *impair.*

Les coefficients g_n, h_n, l_n *et* w_n *sont des nombres réels. Les fonctions*

$${}_{(n)}\bar{L}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-5)}), \qquad {}_{(n)}\bar{M}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-4)}),$$
$${}_{(n)}\bar{N}(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-4)})$$

sont des polynômes des variables réelles figurant entre parenthèses. En tout cas ces polynômes ne contiennent pas de termes ne dépendant que de la courbure k.

LEMME 2. *Avec les hypothèses du lemme* 1, *les polynômes* ${}_{(n)}L$ *et* ${}_{(n)}M$ *peuvent être mis sous la forme d'une somme des deux polynômes*

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}L &= {}_{(n)}L_1(k, \ldots, k^{(n-2)}) + {}_{(n)}L_2(k, \ldots, k^{(n-4)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-4)}),\\
{}_{(n)}M &= {}_{(n)}M_1(k, \ldots, k^{(n-1)}) + {}_{(n)}M_2(k, \ldots, k^{(n-3)}, \tau, \ldots, \tau^{(n-3)})
\end{aligned}$$

où les fonctions ${}_{(n)}L_1$, ${}_{(n)}L_2$, ${}_{(n)}M_1$ *et* ${}_{(n)}M_2$ *sont des polynômes des grandeurs indiquées entre parenthèses. Dans les polynômes* ${}_{(n)}L_2$ *et* ${}_{(n)}M_2$ *les dérivées* $k^{(\nu)}$ *pour* $\nu = 0, 1, \ldots$ *ne peuvent figurer que dans des produits avec les dérivées* $\tau^{(\mu)}$ *pour* $\mu = 0, 1, \ldots$

LEMME 3. *Avec les hypothèses* (Z), *si* $n \geqslant 4$ *les polynômes* ${}_{(n)}L_1$ *et* ${}_{(n)}M_1$ *du lemme* 2 *peuvent être mis sous la forme*

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}L_1 &= \delta_n k^n + \sum_{i=1}^{n-2} k^{(i)}\big(a_{n,n-i-1} k^{n-i-1} + {}_{(ni)}A(k, k^{(i)}, \ldots, k^{(n-i-2)})\big),\\
{}_{(n)}M_1 &= \varepsilon_n k^n + \sum_{i=1}^{n-1} k^{(i)}\big(b_{n,n-i-1} k^{n-i-1} + {}_{(ni)}B(k, k^{(i)}, \ldots, k^{(n-i-3)})\big)
\end{aligned}$$

où les coefficients sont réels et satisfont aux relations suivantes:

$$b_{n0} = 1,\ a_{n,n-i-1} = 0,\ \textit{pour}\ n-i-1\ \textit{pair et}\ 1 \leqslant i < n-2,$$
$$b_{n,n-i-1} = 0,\ \textit{pour}\ n-i-1\ \textit{impair et}\ 1 \leqslant i < n-1.$$

Les fonctions ${}_{(ni)}A$ *et* ${}_{(ni)}B$ *sont des polynômes des variables indiquées entre parenthèses et ne renferment pas de termes ne dépendant que de la courbure* k.

Remarque. Les valeurs des coefficients a_{np} et b_{np} sont définies comme il suit:

$$a_{np} = 0 \quad \text{pour} \quad p \leqslant 0, \qquad a_{n,n-1} = \delta_n n, \qquad b_{n,n-1} = \varepsilon_n n.$$

LEMME 4. *Si les hypothèses* (Z) *sont vérifiées et si* $n \geqslant 4$, *les polynômes* ${}_{(n)}L_2$, ${}_{(n)}M_2$ *et* ${}_{(n)}N$ *peuvent être représentés comme il suit:*

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}L_2 = k &\sum_{j=0}^{[(n-4)/2]} \tau^{(j)}\,{}_{(n0j)}P(k, \tau^{(j)}, \ldots, \tau^{(n-j-4)}) +\\
&+ \sum_{i=1}^{n-4} k^{(i)} \sum_{j=0}^{[(n-i-4)/2]} \tau^{(j)}\,{}_{(nij)}P(k, k^{(i)}, \ldots, k^{(n-i-j-4)}, \tau^{(j)}, \ldots, \tau^{(n-i-j-4)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}M_2 = k &\sum_{j=0}^{[(n-3)/2]} \tau^{(j)}\big({}_{(n0j)}Q(k, \tau^{(j)}, \ldots, \tau^{(n-j-5)}) + e_{n0j}\tau^{(n-j-3)}\big) +\\
&+ \sum_{i=1}^{n-3} k^{(i)} \sum_{j=0}^{[(n-i-3)/2]} \tau^{(j)}\,{}_{(nij)}Q(k, k^{(i)}, \ldots, k^{(n-i-j-5)}, \tau^{(j)}, \ldots, \tau^{(n-i-j-3)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}N = k&\Big\{\tau^{(n-2)} + \sum_{j=0}^{n-4} \tau^{(j)}\big(\vartheta_{nj} k^{n-j-2} + {}_{(n0j)}R(k, \tau^{(j)}, \ldots, \tau^{(n-j-4)})\big)\Big\} +\\
&+ \sum_{i=1}^{n-2} k^{(i)}\Big\{\xi_{n,n-i-2}\tau^{(n-i-2)} + \sum_{j=0}^{n-i-4} \tau^{(j)}\,{}_{(nij)}R(k, k^{(i)}, \ldots, k^{(n-i-j-4)}, \tau^{(j)},\\
&\qquad\qquad \ldots, \tau^{(n-i-j-4)})\Big\}
\end{aligned}$$

où les coefficients e_{n0j} *et* $\xi_{n,n-i-2}$ *sont réels et où l'on a* $e_{n0j} < 0$ *et* $\xi_{n,n-i-2} > 0$. *Pour* $n-j$ *impair nous avons* $\vartheta_{nj} = 0$, *tandis que pour* $n-j$ *pair* $\vartheta_{nj} = (-1)^{(n-j)/2+1}$. *Les fonctions* ${}_{(n0j)}P$, ${}_{(n0j)}Q$ *et* ${}_{(n0j)}R$ *sont des polynômes de la courbure* k *et des dérivées de la deuxième courbure, indiquées entre parenthèses, où pour* $n-j-4 < j$, ${}_{(n0j)}P \equiv 0$, ${}_{(n0j)}R \equiv 0$ *et pour* $n-j-5 < j$, ${}_{(n0j)}Q = 0$. *Dans ces polynômes la courbure* k *intervient de la même manière que dans les lemmes précédents. Les fonctions* ${}_{(nij)}P$, ${}_{(nij)}Q$ *et* ${}_{(nij)}R$ *sont des polynômes des variables indiquées entre parenthèses. Dans ces polynômes il n'y a pas de termes ne dépendant que des dérivées* $k^{(\nu)}$. *Les fonctions* ${}_{(nij)}R$ *peuvent être, en particulier, des polynômes ne dépendant que de la courbure* k *(si* $n-i-j-4 < i$ *et* $n-i-j-4 < j$*).*

Lemme 5. *Les coefficients $a_{m+1-i,2p-i}$ et $b_{m+1-i,2p-i}$ qui figurent dans le lemme 3, satisfont pour $m\geqslant 4$ et pour $0<p\leqslant[m/2]$ et i, p entier positif, à l'équation*

$$\sum_{i=1}^{2p}(-1)^{[(i+3)/2]}\binom{m+2}{i}(a_{m+1-i,2p-i}+b_{m+1-i,2p-i}) = (-1)^{p+1}+b_{m+1,2p}.$$

§ 1. L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère tangente dans le cas d'hypothèses particulières.

Théorème 1. *Si la courbe C, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ remplit les hypothèses (Z) et possède un point $M_0 = M(s_0)$ pour une valeur s_0 de l'intervalle (s_1, s_2), où les conditions suivantes sont remplies pour $n\geqslant 4$:*

$$(\mathrm{Z}^*)\quad\begin{cases}1.\ k_0 = k(s_0) > 0,\\ 2.\ k_0^{(i)} = k^{(i)}(s_0) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n-3,\\ 3.\ \tau_0^{(j)} = \tau^{(j)}(s_0) = 0 \text{ pour } j = 0, 1, \ldots, n-4,\\ 4.\ \text{le centre de la sphère tangente à la courbe } C \text{ au point } M_0 \text{ est}\\ \quad\ \text{situé sur la polaire du point } M_0\ (a = 1/k_0)\,(^2),\end{cases}$$

alors l'ordre $q\geqslant n$.

Si en outre $k_0^{(n-2)}\neq 0$, $\tau_0^{(n-3)} = 0$, on a exactement $q = n$.

Pareillement, si $\tau_0^{(n-3)}\neq 0$ et $\beta\neq -k_0^{(n-3)}/k_0^2\tau_0^{(n-3)}$, où β est la deuxième coordonnée du centre de la sphère osculatrice contenu dans le plan $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0)$, nous avons également $q = n$.

Démonstration. Nous démontrerons tout d'abord que toutes les dérivées de la fonction $F(s)$ d'ordre moindre que n s'annulent pour s_0.

Calculons la m-ème dérivée de la fonction $F(s)$:

$$(3)\quad F^{(m)}(s) = \big(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v})\big)^{(m-1)} = m\boldsymbol{t}^{(m-2)}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}^{(m-1)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v})+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}\boldsymbol{t}^{(i)}\boldsymbol{t}^{(m-i-2)},$$

$$(4)\quad F^{(m)}(s_0) = m\boldsymbol{t}_0^{(m-2)}\boldsymbol{t}_0-\left(\frac{1}{k_0}\boldsymbol{n}_0+\beta\boldsymbol{b}_0\right)\boldsymbol{t}_0^{(m-1)}+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}\boldsymbol{t}_0^{(i)}\boldsymbol{t}_0^{(m-2-i)}$$

$$(5)\quad = m\,{}_{(m-2)}L(s_0)-\frac{1}{k_0}\,{}_{(m-1)}M(s_0)-\beta\,{}_{(m-1)}N(s_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}\big({}_{(m-2-i)}L(s_0)\,{}_{(i)}L(s_0)+{}_{(m-2-i)}M(s_0)\,{}_{(i)}M(s_0)+{}_{(m-2-i)}N(s_0)\,{}_{(i)}N(s_0)\big).$$

On démontre facilement que l'on a toujours $F'(s_0) = 0$ et que pour $a = 1/k_0$ $F''(s_0) = 0$; alors on a aussi $F'''(s_0) = -k_0'/k_0-\beta k_0\tau_0 = 0$

(2) a est la première coordonnée du centre de la sphère tangente contenue dans le plan $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0)$.

d'après (Z*). Il suffit donc de calculer la valeur de $F^{(m)}(s_0)$ pour $m\geqslant 4$. Puisque ${}_{(1)}L = 0$, ${}_{(1)}M = k$, ${}_{(1)}N = 0$, ${}_{(2)}L = -k^2$, ${}_{(2)}M = k'$, ${}_{(2)}N = k\tau$,

$$(6)\quad {}_{(3)}L = -3kk',\qquad {}_{(3)}M = -k^3+k''-k\tau^2,\qquad {}_{(3)}N = 2\tau k'+\tau' k,$$

donc, en vertu des hypothèses (Z*) et du lemme 2, les valeurs des fonctions ${}_{(p)}L$, ${}_{(p)}M$, ${}_{(p)}N$ pour $p\leqslant n-1$ sont

$${}_{(p)}L(s_0) = \delta_p k_0^p,\qquad {}_{(p)}M(s_0) = \varepsilon_p k_0^p,\qquad {}_{(p)}N(s_0) = 0.$$

Pour m remplissant les inégalités $n-1\geqslant m\geqslant 4$ on obtient

$$F^{(m)}(s_0) = m\delta_{m-2}k_0^{m-2}-\varepsilon_{m-1}k_0^{m-2}+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}k_0^i k_0^{m-i-2}\{\delta_i\delta_{m-i-2}+\varepsilon_i\varepsilon_{m-i-2}\}$$

$$(7)\quad = k_0^{m-2}\left(m\delta_{m-2}-\varepsilon_{m-1}+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}\{\delta_i\delta_{m-i-2}+\varepsilon_i\varepsilon_{m-i-2}\}\right).$$

En utilisant le lemme 1 on démontre facilement que l'expression entre parenthèses { } dans (7) est égale à zéro; il s'ensuit que pour $m\leqslant n-1$ chaque $F^{(m)}(s_0)$ est égale à zéro.

Calculons $F^{(n)}(s_0)$. Puisque

$$(8)\quad {}_{(n-2)}L(s_0) = \delta_{n-2}k_0^{n-2},\qquad {}_{(n-1)}M(s_0) = \varepsilon_{n-1}k_0^{n-1}+k_0^{(n-2)},$$
$${}_{(n-1)}N(s_0) = k_0\tau_0^{(n-3)},$$

donc

$$(9)\quad F^{(n)}(s_0) = k_0^{n-2}\left(n\delta_{n-2}-\varepsilon_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-3}\binom{n-1}{i}\{\delta_{n-i-2}\delta_i+\varepsilon_{n-i-2}\varepsilon_i\}\right)-$$
$$-k_0^{(n-2)}/k_0-\beta k_0\tau_0^{(n-3)}.$$

Nous avons démontré que, pour $m>3$, on a

$$m\delta_{m-2}-\varepsilon_{m-1}+\sum_{i=1}^{m-3}\binom{m-1}{i}\{\delta_{m-i-2}\delta_i+\varepsilon_{m-i-2}\varepsilon_i\} = 0.$$

La démonstration ci-dessus est valable aussi pour $m = n$. En profitant de cette remarque on obtient

$$(10)\quad F^{(n)}(s_0) = -k_0^{(n-2)}/k_0-\beta k_0\tau_0^{(n-3)}.$$

De (10) il suit évidemment que si

I. $k_0^{(n-2)} = \tau_0^{(n-3)} = 0$, donc $F^{(n)}(s_0) = 0$; par conséquent $q>n$ pour β arbitraire;

II. $k_0^{(n-2)}\neq 0$ et $\tau_0^{(n-3)} = 0$, donc $F^{(n)}(s_0)\neq 0$; par conséquent $q = n$ pour β arbitraire;

III. $\tau_0^{(n-3)} \neq 0$ et $\beta \neq -k_0^{(n-2)}/k_0^2\tau_0^{(n-3)}$, donc $F^{(n)}(s_0) \neq 0$, d'où $q = n$;

IV. $\tau_0^{(n-3)} \neq 0$ et $\beta = -k_0^{(n-2)}/k_0^2\tau_0^{(n-3)}$, par suite $F^{(n)}(s_0) = 0$, d'où $q > n$.

En résumant nous pouvons dire, qu'avec les hypothèses de notre théorème, on a toujours $q \leqslant n$.

§ 2. L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice dans le cas d'hypothèses particulières. Dans les calculs qui vont suivre nous introduisons le déterminant suivant:

$$W_{np} = \begin{vmatrix} k_0^{(n-2)} & k_0^{(p-1)} \\ \tau_0^{(n-3)} & \tau_0^{(p-2)} \end{vmatrix} \quad \text{pour} \quad p \geqslant n-1 \geqslant 3.$$

THÉORÈME 2. *Si la courbe C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ remplit pour $n \geqslant 4$ les conditions suivantes:*

1. *les hypothèses (Z) et (Z*) sont vérifiées,*

2. *au point $M_0 - \tau_0^{(n-3)} \neq 0$,*

3. *le centre de la sphère osculatrice à C au point M_0 dans le système $(\mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$ du plan normal a les coordonnées α, β, définies comme il suit:*

$$\alpha = \frac{1}{k_0}, \qquad \beta = \frac{-k_0^{(n-2)}}{k_0^2\tau_0^{(n-3)}},$$

4. *$W_{np} = 0$ pour $p = n, \ldots, m$, où $n \leqslant m \leqslant 2n-5$,*

5. *$W_{n,m+1} \neq 0$,*

alors l'ordre $q = m+2$.

THÉORÈME 3. *Si la courbe C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ vérifie pour $n \geqslant 4$ les hypothèses* 1, 2, 3 *du théorème* 2 *et si*

4. *$W_{np} = 0$ pour $p = n, \ldots, 2n-4$,*

5. *$W_{n,2n-3} \neq 0$,*

alors nous avons $q \geqslant 2n-2$.

THÉORÈME 4. *Si la courbe C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ vérifie pour $n \geqslant 4$ les hypothèses* 1, 2, 3 *du théorème* 2 *et si $W_{np} = 0$ pour $p = n, \ldots, 2n-3$, on a $q = 2n-2$.*

Démonstration du théorème 2. Nous allons calculer $F^{(m)}(s_0)$ pour $n < m \leqslant 2n-3$:

$$F^{(m)}(s_0) = m\,{}_{(m-2)}L(s_0) + \sum_{p=1}^{m-3}\binom{m-1}{p}\left\{{}_{(p)}L_0\,{}_{(m-p-2)}L_0 + {}_{(p)}M_0\,{}_{(m-p-2)}M_0 + {}_{(p)}N_0\,{}_{(m-p-2)}N_0\right\} - \frac{1}{k_0}\,{}_{(m-1)}M_0 + \frac{k_0^{(n-2)}}{k_0^2\tau_0^{(n-3)}}\,{}_{(m-1)}N_0. \tag{11}$$

Les valeurs des fonctions ${}_{(q)}L$, ${}_{(q)}M$, ${}_{(q)}N$ pour $s = s_0$ et $q \leqslant 2n-4$ s'expriment, d'après les lemmes 3, 4 et les hypothèses du théorème, par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} {}_{(q)}L_0 &= {}_{(q)}L(s_0) = \delta_q k_0^q + \sum_{i=n-2}^{q-2} k_0^{(i)} a_{q,q-i-1} k_0^{q-i-1}, \\ {}_{(q)}M_0 &= {}_{(q)}M(s_0) = \varepsilon_q k_0^q + \sum_{i=n-2}^{q-1} k_0^{(i)} b_{q,q-i-1} k_0^{q-i-1}, \\ {}_{(q)}N_0 &= {}_{(q)}N(s_0) = k_0\tau_0^{(q-2)} + \sum_{j=n-3}^{q-4} \vartheta_{qj}\tau_0^{(j)} k_0^{q-j-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Remarquons que, pour $m \leqslant 2n-3$, et pour $p = 1, \ldots, m-3$, on aura ${}_{(p)}N_{0\,(m-p-2)}N_0 = 0$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} F^{(m)}(s_0) = {} & m\delta_{m-2}k_0^{m-2} + \sum_{p=1}^{m-3}\binom{m-1}{p}\{\delta_p\delta_{m-p-2} + \varepsilon_p\varepsilon_{m-p-2}\}k_0^{m-2} - \\ & -\varepsilon_{m-1}k_0^{m-2} + m\sum_{i=n-2}^{m-4} a_{m-2,m-i-3}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3} + \\ & + \sum_{p=1}^{m-3}\binom{m-1}{p}\Bigg(\sum_{i=n-2}^{m-p-4}\delta_p a_{m-p-2,m-p-i-3}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3} + \\ & + \sum_{i=n-2}^{m-p-3}\varepsilon_p b_{m-p-2,m-p-i-3}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3} + \\ & + \sum_{i=n-2}^{p-2}\delta_{m-p-2}a_{p,p-i-1}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3} + \\ & + \sum_{i=n-2}^{p-1}\varepsilon_{m-p-2}b_{p,p-i-1}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3}\Bigg) - \sum_{i=n-2}^{m-2} b_{m-1,m-i-2}k_0^{(i)}k_0^{m-i-3} + \\ & + \frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}} + \sum_{j=n-3}^{m-5}\vartheta_{m-1,j}\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-3}. \end{aligned}$$

(13)

(14)

Dans la deuxième somme de (13) on peut étendre la sommation jusqu'à $m-p-3$ et dans (14) jusqu'à $p-1$, puisque pour $i=m-p-3$ on a $a_{m-p-2,m-p-i-3}=a_{m-p-2,0}=0$ et $a_{p,p-i-1}=a_{p0}$ pour $i=p-1$. On a donc

$$
\begin{aligned}
(15)\quad F^{(m)}(s_0) &= k_0^{m-2}\Big(m\delta_{m-2}+\sum_{p=1}^{m-3}\binom{m-1}{p}\{\delta_p\delta_{m-p-2}+\varepsilon_p\varepsilon_{m-p-2}\}-\varepsilon_{m-1}\Big)+\\
&+m\sum_{i=n-2}^{m-4}a_{m-2,m-i-3}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}+\\
&+\sum_{p=1}^{m-3}\binom{m-1}{p}\Big\{\sum_{i=n-2}^{m-p-3}(\delta_p a_{m-p-2,m-p-i-3}+\varepsilon_p b_{m-p-2,m-p-i-3})k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}+\\
&+\sum_{i=n-2}^{p-1}(\delta_{m-p-2}a_{p,p-i-1}+\varepsilon_{m-p-2}b_{p,p-i-1})k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}\Big\}-\\
&-\sum_{i=n-2}^{m-2}b_{m-1,m-2-i}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}+\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\\
&+\sum_{j=n-3}^{m-5}\vartheta_{m-1,j}\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j)}}{\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-4}.
\end{aligned}
$$

L'expression entre parenthèses $\{\}$ dans (15) est égale à zéro. Nous calculerons maintenant $F^{(m)}(s_0)$ pour m impair:

$$
\begin{aligned}
(16)\quad & F^{(m)}(s_0)\\
&=\sum_{p=0}^{(m-3)/2}\sum_{i=n-2}^{m-p-3}\binom{m}{p+1}(\delta_p a_{m-p-2,m-p-i-3}+\varepsilon_p b_{m-p-2,m-p-i-3})k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}-\\
&-\sum_{i=n-2}^{m-2}b_{m-1,m-2-i}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}+\sum_{j=n-3}^{m-5}\vartheta_{m-1,}\frac{k_0^{(n-1)}\tau_0^{(j)}}{\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-4}+\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}.
\end{aligned}
$$

Dans la somme double (16) nous allons intervertir l'ordre des sommations et nous obtiendrons

$$
\begin{aligned}
F^{(m)}(s_0) &= \sum_{i=n-2}^{m-3}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}\sum_{p=0}^{m-i-3}\binom{m}{p+1}(\delta_p a_{m-p-2,m-p-i-3}+\varepsilon_p b_{m-p-2,m-p-i-3})\\
&-\sum_{i=n-2}^{m-2}b_{m-1,m-i-2}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}+\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-3}^{m-5}\vartheta_{m-1,j}\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j)}}{\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-4}\\
(17)\quad &= \sum_{i=n-2}^{m-3}k_0^{m-i-3}k_0^{(i)}\Big\{-b_{m-1,m-i-2}+\\
&+\sum_{p=0}^{m-i-3}\binom{m}{p+1}(\delta_p a_{m-p-2,m-p-i-3}+\varepsilon_p b_{m-p-2,m-p-i-3})\Big\}-\\
&-b_{m-1,0}k_0^{-1}k_0^{(m-2)}+\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-3}^{m-5}\vartheta_{m-1,j}\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j)}}{\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-4}.
\end{aligned}
$$

Nous démontrerons que l'expression entre parenthèses $\{\}$ dans (17) est égale à zéro, ou à 1, ou bien à -1:

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & -b_{m-1,m-i-2}+\\
&+\sum_{p=1}^{m-i-2}\binom{m}{p}(\delta_{p-1}a_{m-p-1,m-p-i-2}+\varepsilon_{p-1}b_{m-p-1,m-p-i-2})=\theta_{mi}
\end{aligned}
$$

où $\theta_{mi}=(-1)^{(m-i)/2}$ pour i impair, et zéro pour i pair. Si i est pair on peut démontrer, en s'appuyant sur les lemmes 1 et 2, que le premier membre de (18) est égal à zéro. Pour p pair, $m-p-i-2$ est impair. Donc $\delta_{p-1}=0$, $b_{m-1,m-i-2}=0$ et $b_{m-p-1,m-p-i-2}=0$. Cependant, pour p impair, $m-p-i-2$ est pair et on a alors $\varepsilon_{p-1}=0$, $b_{m-1,m-i-2}=0$ et $a_{m-p-1,m-p-i-2}=0$.

Si i est impair, le premier membre de (18) n'est pas identiquement nul. D'après le lemme 5, le premier membre est égal à $(-1)^{(m-i)/2}$.

En tenant compte de l'égalité (18), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
F^{(m)}(s_0) &= \frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(m-3)}-k_0^{(m-2)}\tau_0^{(n-3)}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-2}^{m-3}\theta_{mj}k_0^{m-j-3}k_0^{(j)}+\\
(19)\quad &+\sum_{j=n-2}^{m-4}\vartheta_{m-1,j-1}\frac{k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j-1)}}{\tau_0^{(n-3)}}k_0^{m-j-3}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\theta_{m,m-3}=0$, il suffit de faire la sommation dans (19) jusqu'à $j=m-4$. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
F^{(m)}(s_0) &= \frac{W_{n,m-1}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-2}^{m-4}k_0^{m-j-3}\frac{k_0^{(j)}\tau_0^{(n-3)}\theta_{mj}+k_0^{(n-2)}\tau_0^{(j-1)}\vartheta_{m-1,j-1}}{\tau_0^{(n-3)}}\\
(20)\quad &= \frac{W_{n,m-1}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-1}^{m-4}\vartheta_{m-1,j-1}k_0^{m-j-3}\frac{W_{n,j+1}}{\tau_0^{(n-3)}}.
\end{aligned}
$$

Remarque. Pour limite inférieure de la sommation on a pris $n-1$ au lieu de $n-2$, car $W_{n,n-1}=0$. Dans le cas de m impair on a $\vartheta_{m-1,j-1}=0$ pour j pair et $(-1)^{(m-j)/2+1}$ pour j impair.

Pour m pair on obtient d'une manière analogue (nous omettons les détails du calcul)

$$
(21)\quad F^{(m)}(s_0)=\frac{W_{n,m-1}}{k_0\tau_0^{(n-3)}}+\sum_{j=n-1}^{m-4}\bar{\vartheta}_{m-1,j-1}k_0^{m-j-3}\frac{W_{n,j+1}}{\tau_0^{(n-3)}}
$$

où $\bar{\vartheta}_{m-1,j-1}=0$, pour j impair, et $(-1)^{(m-j)/2+1}$ pour j pair.

En vertu de nos hypothèses nous obtenons les formules (20) et (21)

$$F^{(n+1)}(s_0) = \ldots = F^{(m+1)}(s_0) = 0.$$

Par contre, on a

$$F^{(m+2)}(s_0) = \frac{W_{n,m+1}}{k_0 \tau_0^{(n-3)}} \neq 0$$

et l'ordre q est ègal à $m+2$.

Pour la démonstration du théorème 3 et 4 il faut encore calculer les grandeurs

$$F^{(2n-2)}(s_0) = (2n-2)\,{}_{(2n-4)}L_0 + \sum_{p=1}^{2n-5} \binom{2n-3}{p} \big({}_{(p)}L_{0\,(2n-4-p)}L_0 + {}_{(p)}M_{0\,(2n-4-p)}M_0 + {}_{(p)}N_{0\,(2n-4-p)}N_0\big) - \frac{1}{k_0}\,{}_{(2n-3)}M_0 + \frac{k_0^{(n-2)}}{k_0^2 \tau_0^{(n-3)}}\,{}_{(2n-3)}N_0,$$

$${}_{(2n-4)}L_0 = \delta_{2n-4} k_0^{2n-4} + \sum_{i=n-2}^{2n-6} a_{2n-4,2n-5-i} k_0^{2n-i-5} k_0^{(i)},$$

$${}_{(2n-3)}M_0 = \varepsilon_{2n-3} k_0^{2n-3} + \sum_{i=n-2}^{2n-4} b_{2n-3,2n-4-i} k_0^{2n-i-4} k_0^{(i)} + e_{2n-3,0,n-3} k_0 (\tau_0^{(n-3)})^2,$$

$${}_{(2n-3)}N = k_0 \tau_0^{(2n-5)} + \sum_{j=n-3}^{2n-7} \tau_0^{(j)} \vartheta_{2n-3,j} k_0^{2n-j-4} + \xi_{2n-3,n-3} k_0^{(n-2)} \tau_0^{(n-3)}.$$

Toutes les grandeurs ${}_{(p)}L_0$, ${}_{(2n-4-p)}L_0$, ${}_{(p)}M_0$ et ${}_{(2n-4-p)}M_0$ s'expriment pour $p = 1, \ldots, 2n-5$ par les formules du type (12). Le produit ${}_{(p)}N_{0\,(2n-4-p)}N_0$ est égal à zéro pour $p = 1, \ldots, 2n-5$ puisque ${}_{(p)}N_0 = 0$ pour $p = 1, \ldots, n-2$.

En employant une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 2 on obtient enfin la valeur de $F^{(2n-2)}(s_0)$ (les calculs correspondants sont omis):

$$F^{(2n-2)}(s_0) = \frac{W_{n,2n-3}}{k_0 \tau_0^{(n-3)}} + \sum_{i=n-1}^{2n-6} \bar{\vartheta}_{2n-3,i-1} k_0^{2n-i-5} \frac{W_{n,i+1}}{\tau_0^{(n-3)}} + \xi_{2n-3,n-3}\left(\frac{k_0^{(n-2)}}{k_0}\right)^2 + (-e_{2n-3,0,n-3})(\tau_0^{(n-3)})^2$$

où $\bar{\vartheta}_{2n-3,i-1} = 0$ pour i impair et $(-1)^{(2n-i)/2}$ pour i pair. Si l'on a $W_{nm} = 0$ pour $m = n, \ldots, 2n-3$, alors

$$F^{(2n-2)}(s_0) = -e_{2n-3,0,n-3}(\tau_0^{(n-3)})^2 + \xi_{2n-3,n-3}(k_0^{(n-2)}/k_0)^2.$$

On a donc $F^{(2n-2)}(s_0) > 0$ (en vertu du lemme 4) et dans ce cas $q = 2n-2$, conformément à la conclusion du théorème 4.

Si $W_{nm} = 0$ pour $m = n, \ldots, 2n-4$, mais $W_{n,2n-3} \neq 0$, alors

$$F^{(2n-2)}(s_0) = \frac{W_{n,2n-3}}{k_0 \tau_0^{(n-3)}} + (-e_{2n-3,0,n-3})(\tau_0^{(n-3)})^2 + \xi_{2n-3,n-4}\left(\frac{k_0^{(n-2)}}{k_0}\right)^2.$$

Si

$$\frac{W_{n,2n-3}}{k_0 \tau_0^{(n-3)}} \neq e_{2n-3,0,n-3}(\tau_0^{(n-3)})^2 - \xi_{2n-3,n-3}\left(\frac{k_0^{(n-2)}}{k_0}\right)^2$$

c'est-à-dire, si

$$F^{(2n-2)}(s_0) \neq 0, \tag{22}$$

on a $q = 2n-2$. Cependant, si

$$W_{n,2n-3} = e_{2n-3,0,n-3} k_0 (\tau_0^{(n-3)})^3 - \xi_{2n-3,n-3} (k_0^{(n-2)})^2 \frac{\tau_0^{(n-3)}}{k_0} \tag{23}$$

c'est-à-dire, si

$$F^{(2n-2)}(s_0) = 0, \tag{24}$$

on a $q > 2n-2$. En tenant compte des résultats (22) et (24) nous voyons que le théorème 3 est vrai.

On voit d'après ce qui précède, que dans le cas (23) l'ordre q a été évalué inférieurement.

Dans le cas (23), la fonction $F^{(m)}(s)$ dépend, pour $m \geqslant 2n-1$, de polynômes dont la forme ne peut pas être exactement déterminée au moyen des lemmes énoncés dans l'introduction. Il n'est alors pas possible de calculer la valeur de cette fonction en s'appuyant sur les considérations précédentes.

Dans le cas où τ est différent de zéro au voisinage du point envisagé et les courbes sont sphériques, une solution intéressante du problème dont nous nous occupons a été communiquée par M. E. Čech dans une lettre à M. Gołąb.

En introduisant les fonctions

$$f_1(s) = (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{t}, \quad f_2(s) = (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}, \quad f_3(s) = (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{b}$$

et en tenant compte des formules de Frenet, M. E. Čech forme pour $f_1(s)$ l'équation différentielle

$$f_1''' = \left(2\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau}\right) f_1'' + \left(\frac{k''}{k} - 2\frac{k'^2}{k^2} - \frac{k'\tau'}{k\tau} - k^2 - \tau^2\right) f_1' + \left(k^2\frac{\tau'}{\tau} - kk'\right) f_1 - \varphi(s)$$

où

$$\varphi(s) = k\left(\frac{1}{k}\right)'' + \frac{k'\tau'}{k\tau} + \tau^2.$$

Pour les courbes sphériques on a $\varphi(s) \equiv 0$. Si $\varphi^{(i)}(s_0) = 0$ pour $0 < i \leqslant q-5$ et si $\varphi^{(q-4)}(s_0) \neq 0$, l'ordre du contact est égal à q.

Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1956