Sur la distribution des points extrémaux dans les ensembles plans

par J. Siciak (Kraków)

1. Introduction. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan, $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue dans E, $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de E et $\omega(z,\zeta) = |z-\zeta|\, e^{-f(z)-f(\zeta)}$. Posons

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k), \qquad \Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \Bigg(\prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\Bigg) e^{nf(\zeta_j)},$$
$$j = 0, 1, \ldots, n$$

et désignons par $\eta^{(n)}$ un système de $n+1$ points de E

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\} \tag{1}$$

pour lequel $V(\eta^{(n)}) = \max\limits_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)})$, par E^* l'ensemble des points d'accumulation de la suite triangulaire (1) et par $\Phi_n(z, E)$ la borne inférieure du plus grand des modules $|\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)})|$, $j = 0, 1, \ldots, n$, lorsque, n et z étant fixes, le système $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans E.

Le système (1) est dit *système de points extrémaux* (ou *système extrémal*) de rang n de E par rapport à la fonction génératrice ω. Nous dirons que l'ensemble E *jouit en un point* $z_0 \in E$ *de la propriété* P, si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que pour toute suite de polynômes $\{P_n(z)\}$ uniformément bornée dans E, où $P_n(z)$ est de degré $\leqslant n$, la suite $\{P_n(z)(1+\varepsilon)^{-n}\}$ est uniformément bornée dans le cercle $|z-z_0| < \delta$.

On sait ([1], [2]) que la suite $\{[V(\eta^{(n)})]^{2/n(n+1)}\}$ converge vers une limite $v(E, f)$ dite *écart* de l'ensemble E par rapport à la fonction ω et que, si $v(E,f) > 0$, il existe dans le plan entier une limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E)} = \Phi(z, E, f) \tag{2}$$

partout positive, jouissant des propriétés suivantes:

$$\Phi(z, E, f) = e^{f(z)}, \quad \text{si} \quad z \in E^*, \tag{3}$$

$$\Phi(z, E, f) \leqslant e^{f(z)}, \quad \text{si} \quad z \in E, \tag{4}$$

(5) $\log \Phi(z, E, f)$ est une fonction harmonique en tout point fini du plan n'appartenant pas à E^*, continue en tout point $z_0 \in E^*$ en lequel l'ensemble E jouit de la propriété P, admettant à l'infini un pôle d'ordre 1.

D'autre part, on sait que l'ensemble E jouit de la propriété P en tout point d'un continu quelconque $C \subseteq E$.

L'écart $v(E, f)$ où $f \equiv 0$ est dit *diamètre transfini* (ou *capacité*) de l'ensemble E. Le diamètre transfini de E sera désigné par $d(E)$.

2. Propriétés de l'ensemble E^*. Le système (1) de points extrémaux de rang n de E correspondant à la fonction ω n'est pas, en général, unique et par suite l'ensemble E^* peut *a priori* dépendre du choix des systèmes extrémaux $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots$

F. Leja a posé le problème d'examiner si l'ensemble E^* peut dépendre du choix des systèmes extrémaux et s'il peut admettre des points isolés lorsque l'ensemble E est une somme de continus (1).

Le but de cette Note est de donner une solution partielle de ce problème. Nous allons notamment démontrer le

Théorème. *Si l'écart $v(E, f)$ est positif et l'ensemble E jouit en chacun de ses points de la propriété P, alors*

1° *le diamètre transfini du produit $K(z_0, r) \cap E^*$, où z_0 est un point quelconque de E^* et $K(z_0, r)$ le cercle $|z-z_0| \leqslant r$, est quel que soit $r > 0$ positif,*

$$d[K(z_0, r) \cap E^*] > 0 \ (2), \tag{6}$$

2° *l'ensemble E^* ne dépend pas du choix des systèmes extrémaux* (1).

Démonstration. Nous dirons qu'un ensemble E est un *noyau transfini* si, pour tout point $z_0 \in E$ et tout $r > 0$, le diamètre transfini de $K(z_0, r) \cap E$ est positif.

Désignons par E_f l'ensemble des points finis du plan en lesquels la fonction $\log \Phi(z, E, f)$ cesse d'être harmonique. Il est clair que E_f est fermé, borné, non vide (3) et que $E_f \subset E^*$. Je dis que E_f est un noyau transfini.

---

(1) Dans le cas où E a des points isolés on sait que l'ensemble E^* peut aussi en avoir.

(2) Il s'ensuit que l'ensemble $K(z_0, r) \cap E^*$ est toujours non dénombrable.

(3) Si E_f était vide, la fonction $\log \Phi(z, E, f)$ serait régulière en tout point fini du plan et atteindrait un minimum en un point régulier sans être constante, car elle admet un pôle à l'infini. L'ensemble E_f est fermé, car il est le complément d'un ensemble ouvert.

En effet, supposons qu'il existe un point $z_0 \epsilon E_f$ et un nombre $r > 0$ tels que $d[K(z_0, r) \frown E_f] = 0$. Le produit $K(z_0, r) \frown E_f$ ne contient alors aucun continu et, d'après le théorème de Phragmén-Brouwer, les points intérieurs de l'ensemble $K(z_0, r) \setminus E_f$ forment un domaine. Désignons ce domaine par B et soit $u(z)$ la fonction harmonique dans l'intérieur du cercle $K(z_0, r)$, continue dans sa fermeture et égale à $\log \Phi(z, E, f)$ sur la circonférence $|z-z_0| = r$. La fonction $v(z) = u(z) - \log \Phi(z, E, f)$ est harmonique dans le domaine B, continue dans sa fermeture, et tend vers zéro sauf, au plus, pour les points d'un ensemble de capacité nulle, quand z tend vers la frontière de domaine B en restant dans l'intérieur de B. On en conclut que $v(z) \equiv 0$ en vertu du théorème d'unicité pour les fonctions harmoniques.

Puisque $\bar{B} = \overline{K(z_0, r) \setminus E_f} = K(z_0, r)$ on a $\log \Phi(z, E, f) = u(z)$ dans le cercle $K(z_0, r)$ et la fonction $\log \Phi(z, E, f)$ est harmonique en z_0 contrairement à l'hypothèse, donc l'ensemble E_f est un noyau transfini.

Je dis que $E_f = E^*$. Puisque $E_f \subseteq E^*$, il suffit de démontrer que $E^* \subset E_f$. L'ensemble CE_f complémentaire de E_f par rapport au plan fermé est une somme finie ou dénombrable de domaines disjoints:

$$CE_f = D_\infty + D_1 + D_2 + \ldots, \tag{7}$$

D_∞ contenant le point à l'infini.

Supposons qu'il existe un point z_0 de E^* n'appartenant pas à E_f. Alors z_0 est contenu dans l'intérieur de l'un des domaines (7); $z_0 \epsilon D_k$, où k est un nombre naturel ou $k = \infty$. D'après la définition de l'ensemble E^* il existe une suite $\{\eta_{k_n}^{(n)}\}$, $0 \leqslant k_n \leqslant n$, de points des systèmes (1) telle que z_0 soit son point d'accumulation. Sans restreindre la généralité du raisonnement on peut admettre que tous les termes de la suite $\{\eta_{k_n}^{(n)}\}$ appartiennent à D_k.

En vertu de la définition du $n^{\text{ième}}$ système extrémal (1) on a

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} \omega(\eta_{k_n}^{(n)}, \eta_j^{(n)}) = \max_{z\epsilon E} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} \omega(z, \eta_j^{(n)}). \tag{8}$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$\left.\begin{aligned} A_n(z) &= \Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} |z-\eta_j^{(n)}|\Big) e^{-nf(z)}, \\ B_n(z) &= \Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} |z-\eta_j^{(n)}|\Big) \Phi^{-n}(z, E, f). \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

L'égalité (8) prend la forme

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} \omega(\eta_{k_n}^{(n)}, \eta_j^{(n)}) = \exp\Big[-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} f(\eta_j^{(n)})\Big] \max_{z\epsilon E} A_n(z)$$

ce qui entraîne

$$\max_{z\epsilon E} A_n(z) = A_n(\eta_{k_n}^{(n)}). \tag{10}$$

D'après (5) la fonction $B_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, est le module d'une certaine fonction analytique dans D_k, continue dans la fermeture de D_k. Si $B_n(z)$ était constante dans D_k on aurait

$$\Phi^n(z, E, f) = a_n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} |z-\eta_j^{(n)}|, \qquad z \epsilon D_k,$$

où a_n est une constante positive. Il s'ensuit que $B_n(z) \neq \text{const}$ sauf au plus pour un indice $n = n_0$(4). Par suite, si F_k est la frontière de D_k,

$$\max_{z\epsilon F_k} B_n(z) > B_n(z_0), \quad \text{lorsque} \quad n \neq n_0 \quad \text{et} \quad z_0 \epsilon D_k. \tag{11}$$

Puisque $F_k \subset E_f \subset E^*$ et $e^{f(z)} = \Phi(z, E, f)$ pour $z \epsilon E^*$, on a $B_n(z) = A_n(z)$ pour $z \epsilon E^*$ et

$$\max_{z\epsilon F_k} B_n(z) = \max_{z\epsilon F_k} A_n(z). \tag{12}$$

Mais $F_k \subset E$, donc $\max\limits_{z\epsilon F_k} A_n(z) \leqslant \max\limits_{z\epsilon E} A_n(z)$ et, en tenant compte de (10)

$$\max_{z\epsilon F_k} A_n(z) \leqslant A_n(\eta_{k_n}^{(n)}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

En vertu de (4) on a, pour $z \epsilon E$, l'inégalité $B_n(z) \geqslant A_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, et en particulier

$$B_n(\eta_{k_n}^{(n)}) \geqslant A_n(\eta_{k_n}^{(n)}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Les points $\eta_{k_n}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, appartiennent à D_k, donc d'après (11), (12) et (14)

$$\max_{z\epsilon F_k} A_n(z) > A_n(\eta_{k_n}^{(n)}) \quad \text{pour} \quad n \neq n_0. \tag{15}$$

Puisque les inégalités (13) et (15) sont contradictoires on a $E_f \subseteq E^*$ et, l'ensemble E_f, où f est fixe, ne dépendant pas du choix des systèmes extrémaux (1), l'ensemble E^* jouit de la même propriété, c. q. f. d.

3. Remarques. I. Supposons que l'ensemble E satisfasse aux hypothèses du théorème précédent et qu'il se réduise à la frontière d'un domaine G contenant le point $z = \infty$ dans son intérieur. Alors

(4) Si $B_n(z) \neq \text{const}$, $z \epsilon D_k$, pour chaque n, nous posons $n_0 = 0$.

E^* est égal à la fermeture de la somme de tous les systèmes extrémaux $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots$

En effet, en vertu des hypothèses concernant E, l'ensemble E_f est maintenant la frontière du domaine D_∞ et l'ensemble E^* est contenu dans la fermeture de D_∞, $E^* \subset \bar{D}_\infty$. Le domaine D_k défini à la page 216 est maintenant identique à D_∞.

La fonction donnée par (9) ne peut être constante pour chaque n dans D_∞, car $\Phi(z, E, f) > 0$ pour tous les points z, et le produit $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k_n}}^{n} |z-\eta_j^{(n)}|$ s'annule aux points $\eta_j^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq k_n$. Par suite, en répétant le raisonnement des pages 216 et 217 nous concluons que tous les points des systèmes extrémaux $\eta^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, sont situés sur la frontière de D_∞, c'est-à-dire sur l'ensemble E_f.

Puisque E_f est fermé, la fermeture de la somme de tous les systèmes $\eta^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, est aussi contenue dans l'ensemble E_f. Par suite, en vertu de l'égalité $E^* = E_f$, notre remarque est juste.

II. *Si E ne se réduit pas à la frontière d'un domaine G contenant le point $z = \infty$ dans son intérieur, l'ensemble E^* peut être plus petit que la fermeture de la somme des systèmes extrémaux*, ce que prouve l'exemple suivant:

Soit E la somme de l'intervalle E_1: $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et du cercle E_2: $|z-\frac{5}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$, $E = E_1 \cup E_2$, et $f(z)$ la fonction définie sur E par les formules

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{sur } E_1, \\ \log|z| & \text{sur } E_2. \end{cases}$$

Il est clair que l'ensemble E satisfait aux hypothèses du théorème précedent.

Examinons le premier système extrémal $\eta^{(1)} = \{\eta_0^{(1)}, \eta_1^{(1)}\}$ de l'ensemble donné E correspondant à la fonction $\omega(z, \zeta) = |z-\zeta| e^{-f(z)-f(\zeta)}$. Posons $\zeta^{(1)} = \{\zeta_0, \zeta_1\}$. Si $\zeta_0 \epsilon E_1$ et $\zeta_1 \epsilon E_1$ on a $V(\zeta^{(1)}) = |\zeta_0-\zeta_1| \leqslant \frac{1}{2}$, si $\zeta_0 \epsilon E_2$ et $\zeta_1 \epsilon E_2$ il vient $V(\zeta^{(1)}) = |\zeta_0-\zeta_1|/|\zeta_0\zeta_1| \leqslant 1/2\cdot 2 = \frac{1}{4}$ et si $\zeta_0 \epsilon E_1$ et $\zeta_1 \epsilon E_2$, alors $V(\zeta^{(1)}) = |\zeta_0-\zeta_1|/|\zeta_1| \leqslant 1$. Puisque $V(\zeta^{(1)}) = 1$, lorsque $\zeta_0 = 0$ et ζ_1 est un point quelconque de E_2 on a $\eta^{(1)} = \{0, \eta\}$, où η est un point fixe quelconque de l'ensemble E_2 (par exemple $\eta = \frac{5}{2}$).

Je dis qu'aucun des points des systèmes $\eta^{(n)}$, où $n > 1$, n'est contenu dans l'intérieur de E_2. Dans le cas contraire il existerait un système $\eta^{(n_0)} = \{\eta_0^{(n_0)}, \eta_1^{(n_0)}, \ldots, \eta_{n_0}^{(n_0)}\}$, $n_0 > 1$, et un point, soit $\eta_0^{(n_0)}$, situé dans l'intérieur de E_2. Par la définition du $n^{\text{ième}}$ système extrémal on a

$$\prod_{k=1}^{n_0} \omega(\eta_0^{(n_0)}, \eta_k^{(n_0)}) = \max_{z \epsilon E_2} \prod_{k=1}^{n_0} \omega(z, \eta_k^{(n_0)}). \tag{16}$$

Lorsque $z \epsilon E_2$ on a $\omega(z, \eta_k^{(n_0)}) = |z-\eta_k^{(n_0)}|/|z| e^{f(\eta_k^{(n_0)})}$, par suite le produit $\prod_{k=1}^{n_0} \omega(z, \eta_k^{(n_0)})$ est le module d'un fonction analytique non constante dans le cercle E_2 et, comme son maximum ne peut pas être atteint dans l'intérieur de ce cercle, la formule (16) ne saurait être vraie.

Par suite l'ensemble E^* est contenu dans la somme de l'intervalle E_1 et de la circonférence $|z-\frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$. Si nous posons $\eta^{(1)} = \{0, \frac{5}{2}\}$, la fermeture de la somme des systèmes extrémaux de l'ensemble donne E est plus grande que l'ensemble E^*.

Travaux cités

[1] F. Leja, *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1949), 35-42.

[2] — *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 319-342.

Reçu par la Rédaction le 25. 6. 1956