Donc en vertu du théorème 7 la suite $\bar{x} = \{a^n\}$ est limitable par la méthode B_k. Nous démontrerons qu'elle n'est pas limitable par la méthode B_{k+1}, et par conséquent, en vertu de la remarque 13, qu'elle n'est limitable par aucune méthode B_p où $p > k$.

Remarquons à cet effet que

$$(79) \qquad B_{k+1}(t, \bar{x}) = 2^{k+1}e^{-t}\sum \frac{t^{n2^{k+1}}a^n}{\Gamma(n2^{k+1}+1)}$$

$$= \begin{cases} 2^{k+1}e^{it}\left[1+\sum\limits_{r=1}^{2^{k+1}-1}\dfrac{1}{\Gamma(r2^{k+1})}\displaystyle\int_0^{1+i} e^{-u}u^{r2^{k+1}-1}du\right] & \text{pour} \quad k<-1, \\ e^{it} \quad \text{pour} \quad k=-1. \end{cases}$$

Nous omettons les détails du calcul qui a mené a la formule (79).

De la formule (79) il résulte que $\lim\limits_{t\to\infty} B_{k+1}(t, \bar{x})$ n'existe pas, donc la suite $\bar{x} = \{a^n\}$ n'est, en effet, pas limitable par la méthode B_{k+1}.

On pourrait démontrer, comme dans la démonstration du théorème 8, que la suite $\{(-1)^n\Gamma(n2^k+1)/\Gamma(n2^{k-1}+1)\}$ est limitable par la méthode B_k et que sa transformée n'existe pourtant pas par rapport à la méthode B_{k-1}, donc, en vertu de la remarque 15, elle n'existe par rapport à aucune méthode B_q d'indice $q < k$.

Travaux cités

[1] G. Doetsch, *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Inaug.-Diss., Göttingen 1920.

[2] — *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, New-York 1943.

[3] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

[4] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen*, Berlin 1922.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), p. 129-160.

[6] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[7] S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938.

[8] G. Sannia, *Nuovo metodo di sommazione delle serie: estensione del metodo di Borel*, Rend. del circ. mat. di Palermo 42 (1917), p. 303-322.

[9] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace mat.-fiz. 22 (1911), p. 113-119.

[10] L. Włodarski, *Sur les méthodes continues de limitation (I)*, Studia Math. 14 (1954), p. 161-187.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1956

Sur l'existence d'une solution unique de certains problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes

par Z. Szmydt (Kraków)

§ 1. Considérons le système de n équations différentielles

$$u_{xy}^{(i)}(x, y) = f^{(i)}(x, y, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}, u_y^{(1)}, \ldots, u_y^{(n)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont les seconds membres sont continus; nous l'écrirons dans la suite sous la forme vectorielle

$$(1.1) \qquad U_{xy}(x, y) = F(x, y, U, U_x, U_y).$$

Désignons par D le rectangle défini par les inégalités

$$(1.2) \qquad -a \leqslant x \leqslant a, \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta \quad \text{où} \quad 0 < a < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \infty.$$

Considérons deux courbes continues Γ et Λ situées dans le rectangle D et définies respectivement par les équations

$$(1.3) \qquad y = \gamma(x) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

$$(1.4) \qquad x = \lambda(y) \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Définition 1. Dans cet article la fonction $U(x, y)$ sera dite *régulière dans un domaine* si elle est continue et admet des dérivées U_x, U_y, U_{xy} continues dans ce domaine.

Soit

$$P = (p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}), \qquad Q = (q^{(1)}, \ldots, q^{(n)})$$

et envisageons les problèmes suivants R et S.

Problème R. *Existe-t-il une solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux conditions*

$$U_x(x, y) = G[x, U(x, y), U_y(x, y)] \quad \textit{lorsque} \quad y = \gamma(x) \quad \textit{et} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

$$U(\lambda(y), y) = U^* + \int_{y_0}^{y} B[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)]\,dt \quad \textit{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta$$

où $G(x, U, Q)$ et $B(y, U, P)$ sont des fonctions continues données d'avance, U^* est un vecteur constant et y_0 un point arbitraire de l'intervalle $\langle -\beta, \beta\rangle$.

PROBLÈME S. *Existe-t-il une solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux conditions*:

$$U(x_0, y_0) = U^*,$$

$$U_x(x, y) = G[x, U(x, y), U_y(x, y)] \quad \textit{lorsque} \quad y = \gamma(x) \quad \textit{et} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$$U_y(x, y) = H[y, U(x, y), U_x(x, y)] \quad \textit{lorsque} \quad x = \lambda(y) \quad \textit{et} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta$$

où (x_0, y_0) est un point arbitraire de D, U^* un vecteur constant et $G(x, U, Q)$, $H(y, U, P)$ sont des fonctions continues données d'avance.

Les problèmes R et S, introduits pour la première fois dans [2](1), y ont été abordés par deux méthodes. La première, basée sur le théorème de Schauder sur le point fixe, a permis de démontrer l'existence d'une solution du problème R (S) dans des hypothèses assez faibles qui n'assuraient pas l'unicité des solutions. La seconde, utilisant la méthode des approximations successives, a permis d'établir, dans des hypothèses plus restrictives, l'existence d'une solution unique du problème R (S) (cf. [2], remarque 2).

Les détails de la première méthode ont été exposés dans [3] et ceux de la seconde vont l'être dans cet article où, pour abréger, nous substituerons à la méthode des approximations successives celle qui est basée sur le principe de Banach-Cacciopoli-Tikhonov.

Il est à peu près évident que, lorsque $\lambda(y)$ est de classe C^1, le problème R est équivalent au problème S dans lequel $x_0 = \lambda(y_0)$, $H(y, U, P) = B(y, U, P) - \lambda'(y)P$ (cf. [3], remarque 1). Pourtant nous l'envisagerons indépendamment du problème S, tout comme nous l'avons fait dans [2] et [3], afin que l'on puisse dans les théorèmes concernant l'existence d'une solution ne faire pas intervenir des hypothèses supplémentaires relatives à la fonction $\lambda'(y)$ (cf. [3], § 1).

Dans l'article [3], après avoir démontré en détail les théorèmes concernant l'existence d'une solution du problème S (appelé problème I), nous avons esquissé les démonstrations des théorèmes relatifs au problème R (appelé problème II). Dans cet article nous procéderons inversement; ayant discuté le problème R (théorèmes 1-5) nous n'énoncerons qu'un seul théorème (théorème 6), relatif à l'existence de la solution unique du problème S en nous dispensant d'énoncer des théorèmes dont le rapport aux théorèmes 1 ou 4 serait le même que celui du théorème 6 au théorème 2.

(1) Le problème S ne diffère pas du problème I de la communication [2]. Le problème R y avait une forme un peu moins générale, la fonction B ne dépendant que de la variable y (cf. [2], p. 68, problème II). La généralisation exposée dans cet article, que j'ai signalée à la séance du 15 mai 1956 de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Cracovie, ne présente pas de difficultés nouvelles.

icm©

Remarque 1. Les problèmes classiques de Darboux, de Cauchy et de Picard sont équivalents aux problèmes du type R convenablement choisis (cf. [2], remarque 1).

I. Examinons, pour le système (1.1), le problème de Darboux relatif à l'existence d'une solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux relations

$$U(x, y_0) = \sigma(x) \quad \text{lorsque} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$
$$U(x_0, y) = \tau(y) \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta$$

où (x_0, y_0) est un point arbitraire du rectangle D et $\sigma(x)$, $\tau(y)$ sont des fonctions de classe C^1 données d'avance dans les intervalles $\langle -\alpha, \alpha\rangle$ et $\langle -\beta, \beta\rangle$ respectivement et telles que $\sigma(x_0) = \tau(y_0)$.

On vérifie facilement que le problème en question est équivalent au problème R dans lequel: $\gamma(x) \equiv y_0$, $\lambda(y) \equiv x_0$, $U^* = \tau(y_0)$, $G(x, U, Q) \equiv \sigma'(x)$, $B(y, U, P) \equiv \tau'(y)$.

II. Considérons le problème de Cauchy relatif à la question de l'existence d'une solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux conditions:

$$U\big(x, \gamma(x)\big) = \sigma(x) \quad \text{et} \quad U_x\big(x, \gamma(x)\big) = \varrho(x) \quad \text{lorsque} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$$

où $\varrho(x)$ est une fonction continue donnée d'avance, $\sigma(x)$ et $\gamma(x)$ sont des fonctions de classe C^1 et

$$\gamma'(x) \neq 0, \quad \min_{-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha} \gamma(x) = -\beta, \quad \max_{-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha} \gamma(x) = \beta. \tag{1.5}$$

Désignons par $\lambda(y)$ la fonction inverse de $\gamma(x)$ dont l'existence résulte de (1.5). En posant $B(y, U, P) = \sigma'\big(\lambda(y)\big)\lambda'(y)$, $U^* = \sigma\big(\lambda(y_0)\big)$, $G(x, U, Q) = \varrho(x)$, on voit immédiatement que le problème de Cauchy est un problème du type R.

III. Examinons, pour le système (1.1), le problème de Picard relatif à l'existence de la solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux relations

$$U(x, -\beta) = \sigma(x) \quad \text{lorsque} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$
$$U\big(\lambda(y), y\big) = \tau(y) \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta$$

où $\sigma(x)$ et $\tau(y)$, $\lambda(y)$ sont des fonctions de classe C^1 dans les intervalles $\langle -\alpha, \alpha\rangle$ et $\langle -\beta, \beta\rangle$ respectivement, $|\lambda(y)| \leqslant \alpha$, $\lambda(-\beta) = -\alpha$ et $\tau(-\beta) = \sigma(-\alpha)$.

On vérifie facilement que le problème en question est équivalent au problème R dans lequel: $\gamma(x) \equiv -\beta$, $G(x, U, Q) \equiv \sigma'(x)$, $y_0 = -\beta$, $U^* = \tau(-\beta)$ et $B(y, U, P) \equiv \tau'(y)$.

Les théorèmes 1 et 2 qui vont être démontrés dans le § 3 assurent l'existence d'une solution unique du problème R, n'imposant aux courbes Γ et Λ (situées dans le rectangle D et données par les équations (1.3) et (1.4) respectivement) que des hypothèses de régularité (cf. prémisses 2° et 3° de l'hypothèse Z). En faisant des hypothèses supplémentaires sur les courbes en question on peut affaiblir certaines hypothèses intervenant dans le théorème 2 (théorèmes 4 et 5).

La remarque 1 étant faite, il est évident que les théorèmes concernant l'existence d'une solution unique des problèmes de Darboux, de Cauchy et de Picard peuvent être déduits du théorème 1 ou du théorème 2. Dans le § 5 nous énoncerons le corollaire 1, résultant du théorème 4, qui assure l'existence d'une solution unique du problème de Picard dans des hypothèses assez faibles.

§ 2. Notations et hypothèses.

HYPOTHÈSE Z. 1° *Les nombres a, β et y_0 vérifient les inégalités*:

$$0 < a < \infty, \quad 0 < \beta < \infty, \quad -\beta \leqslant y_0 \leqslant \beta,$$

2° $\gamma(x)$ *est une fonction continue telle que*

$$-\beta \leqslant \gamma(x) \leqslant \beta \quad \textit{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

3° $\lambda(y)$ *est une fonction de classe C^1 telle que*

$$-a \leqslant \lambda(y) \leqslant a \quad \textit{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Soit

$$w = \max_{-\beta \leqslant y \leqslant \beta} |\lambda'(y)|, \tag{2.1}$$

$$h = 2\max(a, \beta). \tag{2.2}$$

DÉFINITION 2. Si $V = (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})$ est un vecteur arbitraire à n dimensions, alors

$$|V| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v^{(i)}|.$$

Désignons par Π l'ensemble défini par les inégalités

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta, \quad |U| \leqslant r, \quad |P| \leqslant r, \quad |Q| \leqslant r \tag{2.3}$$

$$\text{où} \quad 0 < r < \infty$$

et introduisons encore les deux ensembles suivants:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad |U| \leqslant r \quad \text{et} \quad |Q| \leqslant r, \tag{2.4}$$

$$-\beta \leqslant y \leqslant \beta, \quad |U| \leqslant r \quad \text{et} \quad |P| \leqslant r. \tag{2.5}$$

§ 3. THÉORÈME 1. *Admettons l'hypothèse Z et assujettissons les fonctions continues F, G, B aux conditions de Lipschitz suivantes*:

$$|F(x, y, U, P, Q) - F(x, y, \tilde{U}, \tilde{P}, \tilde{Q})| \leqslant L\{|U-\tilde{U}| + |P-\tilde{P}| + |Q-\tilde{Q}|\}, \tag{3.1}$$

$$|G(x, U, Q) - G(x, \tilde{U}, \tilde{Q})| \leqslant K_1\{|U-\tilde{U}| + |Q-\tilde{Q}|\}, \tag{3.2}$$

$$|B(y, U, P) - B(y, \tilde{U}, \tilde{P})| \leqslant K_2\{|U-\tilde{U}| + |P-\tilde{P}|\} \tag{3.3}$$

dans les ensembles (2.3), (2.4) *et* (2.5) *respectivement pour des constantes L, K_1, K_2 satisfaisant à l'inégalité* (cf. (2.1) et (2.2))

$$K_1(w+h+1) + K_2(h+1) + hL(w+h+2) < 1. \tag{3.4}$$

Supposons que

$$|F(x, y, U, P, Q)| \leqslant N \quad \textit{dans l'ensemble } \Pi \tag{3.5}$$

où

$$N \leqslant \min\{r/h^2, r/h(w+1)\} \tag{3.6}$$

et que

$$|U^*| \leqslant a, \quad |G(x, U, Q)| \leqslant a \quad \textit{dans l'ensemble } (2.4), \tag{3.7}$$
$$|B(y, U, P)| \leqslant a \quad \textit{dans l'ensemble } (2.5)$$

où

$$a \leqslant \min\{(r - Nh^2)/(1+2h), (r - wNh - Nh)/(1+w)\}. \tag{3.8}$$

Alors le problème R a une seule solution $U(x, y)$ [2].

Démonstration. On vérifie facilement que l'existence d'une solution unique du problème R est équivalente à celle d'une solution unique de classe C^1 du système

$$U(x, y) = \mathcal{L}[U] \tag{3.9}$$

où l'opérateur $\mathcal{L}[U]$ est défini par la formule (cf. [2], (4), p. 69 et [3], (6.2), § 6)

$$\mathcal{L}[U] = U^* + \int_{y_0}^{y} B[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)]\,dt + \tag{3.10}$$
$$+ \int_{\lambda(y)}^{x} G[s, U(s, \gamma(s)), U_y(s, \gamma(s))]\,ds +$$
$$+ \int_{\lambda(y)}^{x} \Big\{ \int_{\gamma(s)}^{y} F[s, t, U(s, t), U_x(s, t), U_y(s, t)]\,dt \Big\}\,ds.$$

---

[2] Cette solution satisfait évidemment dans le rectangle D aux relations suivantes:

$$|U(x, y)| \leqslant r, \quad |U_x(x, y)| \leqslant r, \quad |U_y(x, y)| \leqslant r, \quad |U_{xy}(x, y)| \leqslant N.$$

Pour établir le théorème 1 il suffit donc de démontrer que l'équation (3.9) a exactement une solution de classe C^1. Nous le démontrerons en utilisant la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov.

Désignons par E l'ensemble des fonctions $U(x,y)$ de classe C^1 dans le rectangle D qui y satisfont aux inégalités (cf. définition 2)

$$|U(x,y)| \leqslant r, \quad |U_x(x,y)| \leqslant r \quad \text{et} \quad |U_y(x,y)| \leqslant r.$$

Soit $\|U(x,y)\|$ la norme de la fonction $U(x,y)\epsilon E$, définie par la formule

$$\|U(x,y)\| = \max_{(x,y)\epsilon D}\{|U(x,y)|+|U_x(x,y)|+|U_y(x,y)|\}. \tag{3.11}$$

On constate facilement que E est un espace métrique complet. Nous allons démontrer que la transformation fonctionnelle

$$\tilde{U}(x,y) = \mathcal{L}[U] \tag{3.12}$$

où $\mathcal{L}[U]$ est donné par (3.10), transforme l'espace E en un sous-ensemble de celui-ci:

$$\mathcal{L}[E] \subset E. \tag{3.13}$$

En effet, si $U\epsilon E$ la fonction $\tilde{U}(x,y)$ définie par (3.12) est une fonction de classe C^1 dans le rectangle D et on a

$$\tilde{U}_x(x,y) = G[x, U(x,\gamma(x)), U_y(x,\gamma(x))] + \int_{\gamma(x)}^{y} F[x,t,U(x,t),U_x(x,t),U_y(x,t)]dt, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_y(x,y) = {} & B[y, U(\lambda(y),y), U_x(\lambda(y),y)] - \\ & -\lambda'(y)G[\lambda(y), U(\lambda(y),\gamma(\lambda(y))), U_y(\lambda(y),\gamma(\lambda(y)))] - \\ & -\lambda'(y)\int_{\gamma(\lambda(y))}^{y} F[\lambda(y),t,U(\lambda(y),t),U_x(\lambda(y),t),U_y(\lambda(y),t)]dt + \\ & + \int_{\lambda(y)}^{x} F[s,y,U(s,y),U_x(s,y),U_y(s,y)]ds.\end{aligned} \tag{3.15}$$

De là, en tenant compte de l'hypothèse Z et des relations (3.7), (2.2), (3.5), (3.8) et (2.1), on démontre que les inégalités

$$|\tilde{U}_x(x,y)| \leqslant a+hN \leqslant r \quad \text{et} \quad |\tilde{U}_y(x,y)| \leqslant a+wa+whN+hN \leqslant r$$

ont lieu dans le rectangle D; d'une façon analogue on déduit de (3.12) l'inégalité

$$|\tilde{U}(x,y)| \leqslant a+2ha+h^2N \leqslant r \quad \text{dans le rectangle } D.$$

La fonction $\tilde{U}(x,y)$ appartient donc à E.

Supposons que ${}^1U(x,y)\epsilon E$ et ${}^2U(x,y)\epsilon E$. Soit

$${}^1\tilde{U}(x,y) = \mathcal{L}[{}^1U], \quad {}^2\tilde{U}(x,y) = \mathcal{L}[{}^2U]. \tag{3.16}$$

Nous allons démontrer que

$$\|{}^1\tilde{U}(x,y)-{}^2\tilde{U}(x,y)\| \leqslant \varrho\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\| \tag{3.17}$$

(cf. (3.11)) où

$$\varrho = K_1(w+h+1)+K_2(h+1)+hL(w+h+2). \tag{3.18}$$

Remarquons à cet effet qu'en vertu de (3.16), (3.10), (3.1)-(3.3), (2.2), (2.1) et de l'hypothèse Z on a dans le rectangle D les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}|{}^1\tilde{U}(x,y)-{}^2\tilde{U}(x,y)| \leqslant {} & hK_2\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\|+hK_1\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\|+ \\ & +h^2L\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\| = (hK_2+hK_1+h^2L)\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\|,\end{aligned}$$

$$|{}^1\tilde{U}_x(x,y)-{}^2\tilde{U}_x(x,y)| \leqslant (K_1+hL)\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\|,$$

$$|{}^1\tilde{U}_y(x,y)-{}^2\tilde{U}_y(x,y)| \leqslant (K_2+wK_1+whL+hL)\|{}^1U(x,y)-{}^2U(x,y)\|.$$

De là résulte l'inégalité (3.17) dans laquelle le nombre ϱ défini par (3.18) est, en vertu de l'hypothèse (3.4), inférieur à l'unité.

En tenant compte de (3.13), (3.17) et du théorème de Banach sur le point fixe on arrive à la conclusion qu'il existe dans E exactement une fonction $U(x,y)$ invariante par rapport à la transformation (3.12), c'est-à-dire que l'équation (3.9) a une seule solution de classe C^1 dans le rectangle D. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Remarque 2. Il est évident qu'on peut remplacer dans le théorème 1 les hypothèses (3.4), (3.6), (3.8) par les hypothèses

$$a < r/(1+w), \quad K_1(w+1)+K_2 < 1 \tag{3.19}$$

et par l'hypothèse que h vérifie les inégalités[3]

$$K_1h+K_2h+hL(w+h+2) < 1-K_1(w+1)-K_2,$$

$$2ha+h^2N \leqslant r-a \quad \text{et} \quad Nh(1+w) \leqslant r-a(1+w).$$

Théorème 2. *Admettons l'hypothèse Z et supposons que la fonction $F(x,y,U,P,Q)$ soit continue dans l'ensemble Π_1 défini (dans l'espace des variables x,y,U,P,Q) par les relations*

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta \quad (U,P,Q \textit{ arbitraires}) \tag{3.20}$$

---

[3] Ces inégalités sont satisfaites lorsque h est suffisamment petit, c'est-à-dire lorsque le rectangle D est suffisamment petit (cf. (1.2) et (2.2)).

et y satisfasse à la condition de Lipschitz (3.1). *D'une façon analogue assujettissons les fonctions continues* $G(x, U, Q)$ *et* $B(y, U, P)$ *aux conditions de Lipschitz* (3.2) *et* (3.3) *dans les ensembles*

(3.21) $$-a \leqslant x \leqslant a \quad (U \text{ et } Q \text{ arbitraires}),$$

(3.22) $$-\beta \leqslant y \leqslant \beta \quad (U \text{ et } P \text{ arbitraires})$$

respectivement et supposons que l'inégalité

(3.23) $$K_1(w+h+1)+K_2(h+1)+hL(w+h+2) < 1$$

soit satisfaite.

Alors le problème R *a une seule solution.*

Démonstration. La démonstration du théorème 2 étant analogue à celle du théorème 1, nous nous bornerons à l'esquisser.

Considérons l'ensemble des fonctions $U(x, y)$ de classe C^1 dans le rectangle D. En admettant (3.11), on obtient ainsi un espace métrique complet que nous désignerons par E^*. L'existence d'une solution unique du problème R étant équivalente à celle d'un point fixe unique de la transformation (3.12) considérée dans E^*, pour l'établir nous appliquerons le théorème de Banach. Il suffit à cet effet de démontrer que (3.12) transforme l'espace E^* en un sous-ensemble de celui-ci et que l'inégalité (3.17) résulte des relations: ${}^1U(x, y) \in E^*$, ${}^2U(x, y) \in E^*$, ${}^1\tilde{U}(x, y) = \mathcal{L}[{}^1U]$ et ${}^2\tilde{U}(x, y) = \mathcal{L}[{}^2U]$. La première de ces propriétés est évidente, la démonstration de la seconde ne diffère pas de celle qui a été faite dans le cas du théorème 1.

Remarque 3. Il est évident que l'hypothèse (3.23) est satisfaite lorsque

(3.24) $$K_1(w+1)+K_2 < 1$$

et la constante h satisfait à l'inégalité

(3.25) $$K_1h+K_2h+hL(w+h+2) < 1-K_2-K_1(w+1).$$

L'hypothèse (3.23) a été imposée par la méthode de la démonstration que nous avons admise [4]. Toutefois, quelque petit que soit le nombre h, les constantes K_1 et K_2 ne peuvent pas être arbitraires. Nous le démontrerons dans le § 4 en indiquant des exemples dans lesquels le problème R n'admet pas de solution unique bien que toutes les hypothèses du théorème 2, sauf (3.23), soient satisfaites, $L = 0$ et que h puisse être choisi arbitrairement petit.

[4] En modifiant convenablement la démonstration du théorème 2 on peut remplacer l'hypothèse (3.23) par l'hypothèse: $K_1(w+K_2) < 1$ (plus faible que (3.24)) et par l'hypothèse que la constante h est suffisamment petite.

Remarque 4. On peut substituer (§ 5, théorème 4 et théorème 5) dans le théorème 2 l'hypothèse (3.24) à (3.23) en imposant en même temps certaines restrictions supplémentaires aux courbes Γ et Λ. Les hypothèses imposées dans le théorème 4 aux courbes en question sont en particulier satisfaites lorsque la courbe Γ est une caractéristique (la courbe Λ n'est assujettie qu'à la prémisse 3° de l'hypothèse Z). On peut donc déduire du théorème 4 les corollaires relatifs à l'existence d'une solution unique des problèmes de Darboux et de Picard dans des hypothèses assez faibles (cf. le corollaire 1).

§ 4. Considérons le problème R*, qui est un cas particulier du problème R [5]:

Problème R*. *Existe-t-il une solution régulière* (cf. définition 1) $U(x, y)$ *du système*

(4.1) $$U_{xy}(x, y) = 0$$

dans le carré D *défini par les inégalités*

(4.2) $$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -a \leqslant y \leqslant a \quad \text{où} \quad 0 < a < \infty,$$

satisfaisant aux conditions

(4.3) $$U_x\big(x, \gamma(x)\big) = -K_1U_y\big(x, \gamma(x)\big) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

(4.4) $$U\big(\lambda(y), y\big) = U^* + \int_{y_0}^{y} \big[K_2U_x\big(\lambda(t), t\big)+B_1(t)\big]\,dt$$

lorsque $-a \leqslant y \leqslant a$, *où* K_1, K_2 *sont des constantes positives,* $y_0 \in \langle -a, a\rangle$, U^* *est un vecteur constant et* $B_1(t)$ *est une fonction continue donnée d'avance.*

Nous indiquerons maintenant trois exemples dans lesquels le problème R* (donc le problème R) n'admet pas de solution unique. Dans ces exemples le nombre a peut être arbitrairement petit, $L = 0$ et toutes les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites, sauf (3.23).

Exemple 1. Si $K_2 = \frac{1}{2}$, $K_1 > 2$, $y_0 = 0$, $U^* = 0$, $\gamma(x) \equiv 2x/K_1$, $\lambda(y) \equiv y$, $B_1(y) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$, alors chaque fonction

$$U(x, y) = c(x^2-y^2/2)$$

où c désigne une constante arbitraire est une solution du problème R*. Le problème R* a donc une infinité de solutions.

[5] Du problème R on obtient le problème R* en admettant $a = \beta$, $G(x, U, Q) \equiv -K_1Q$, $B(y, U, P) \equiv K_2P+B_1(y)$. Il est évident que K_1 et K_2 sont des constantes de Lipschitz des fonctions G et B par rapport aux variables Q et P respectivement.

Je dois à J. Szarski l'idée d'envisager le problème R* indépendamment du problème R.

Dans cet exemple quelque petit que soit $h = 2a$, l'inégalité (3.23) n'est pas satisfaite car, $\lambda'(y)$ étant égale à l'unité, on a $w = 1$ (cf. (2.1)), donc $K_1(w+1)+K_2 = 2K_1+\frac{1}{2} > 1$.

Exemple 2. Si $K_2 = 0$, $K_1 = 1$, $\gamma(x) \equiv x$, $\lambda(y) \equiv y$, $B_1(y) \not\equiv 0$ dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$, alors le problème R* n'a pas de solution, quelque petit que soit a.

On vérifie facilement que l'inégalité (3.23) n'est pas satisfaite, car en vertu de la définition de $\lambda(y)$ on a $w = 1$ (cf. (2.1)), donc $K_2+K_1(1+w) = 2 > 1$.

Dans cet exemple les conditions (4.3) et (4.4) sont incompatibles, ce qu'on constate immédiatement en tenant compte de la coïncidence des courbes Γ et Λ. L'exemple 2 est donc assez banal. C'est pourquoi nous indiquerons encore un exemple qui ne présente pas ce défaut.

Exemple 3. Le problème R* dans lequel $K_1 = 1$, $K_2 = 0$, $U^* = 0$, $y_0 = 0$ et $\gamma(x) \equiv x$, $\lambda(y) \equiv -y$ dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$ n'a pas de solution lorsque $B_1(y) \equiv 2y$, et en a une infinité lorsque $B_1(y) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$ (6).

a. Soit $B_1(y) \equiv 2y$ lorsque $-a \leqslant y \leqslant a$ et supposons, pour la démonstration par l'impossible, que le problème R* considéré ci-dessus ait une solution $\tilde{U}(x, y)$. Il en résulte l'existence des fonctions $M(x)$ et $N(y)$ dont la somme est identique à la fonction $\tilde{U}(x, y)$:

$$\tilde{U}(x, y) = M(x)+N(y) \quad \text{dans le rectangle } D,$$

et qui satisfont dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$ aux relations

$$M'(x) = -N'(x) \quad \text{et} \quad M(-y)+N(y) = y^2.$$

On en déduit la relation

$$M(-y)+c-M(y) = y^2 \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant y \leqslant a \tag{4.5}$$

où c désigne une constante. En remplaçant dans (4.5) y par $-y$ on obtient

$$M(y)+c-M(-y) = y^2 \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant y \leqslant a. \tag{4.6}$$

L'addition des égalités (4.5) et (4.6) conduit à la relation

$$y^2 = c \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant y \leqslant a.$$

La contradiction obtenue achève notre démonstration.

b. Supposons que $B_1(y) \equiv 0$ lorsque $-a \leqslant y \leqslant a$ et désignons par $M(x)$ une fonction arbitraire paire, de classe C^1 dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$.

(6) Dans le cas considéré ci-dessus l'inégalité (3.24) n'est pas satisfaite, car $K_2+K_1(w+1) = w+1 = 2$. L'exemple 3 est étroitement lié à celui de la remarque 4 de ma communication [2].

On vérifie facilement que la fonction $U(x, y) = M(x)-M(y)$ est une solution du problème considéré.

Nous achèverons l'examen du problème R* en démontrant le théorème 3 qui assure l'existence d'une solution unique du problème R* dans des hypothèses plus faibles que celles qu'il faudrait admettre pour déduire le même résultat du théorème 2.

Théorème 3. *Admettons l'hypothèse Z en y posant $\beta = a$ et supposons que $B_1(y)$ soit une fonction continue dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$ et que l'inégalité*

$$\left|K_1\left[K_2-\lambda'(\gamma(x))\right]\right| < 1 \quad \textit{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a \tag{4.7}$$

soit satisfaite.

Alors le problème R* *a exactement une solution* (7).

Démonstration. Chaque solution de l'équation (4.1) ayant la forme

$$U(x, y) = M(x)+N(y), \tag{4.8}$$

nous obtenons pour les fonctions inconnues $M(x)$ et $N(y)$ le système d'équations suivant:

$$M'(x) = -K_1 N'(\gamma(x)) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a, \tag{4.9}$$

$$M(\lambda(y))+N(y) = U^*+\int_{y_0}^{y}\left[K_2 M'(\lambda(t))+B_1(t)\right]dt \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant y \leqslant a. \tag{4.10}$$

En différentiant (4.10), on obtient

$$N'(y) = [K_2-\lambda'(y)]M'(\lambda(y))+B_1(y) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant y \leqslant a. \tag{4.11}$$

En mettant (4.11) dans la relation (4.9) on obtient l'équation

$$M'(x) = -K_1\left[K_2-\lambda'(\gamma(x))\right]M'\left(\lambda(\gamma(x))\right)-K_1B_1(\gamma(x)) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a$$

qui en posant

$$\varrho(x) = -K_1\left[K_2-\lambda'(\gamma(x))\right], \quad \sigma(x) = \lambda(\gamma(x)), \quad B_2(x) = -K_1B_1(\gamma(x))$$

peut être écrite sous la forme

$$M'(x) = \varrho(x)M'(\sigma(x))+B_2(x) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a. \tag{4.12}$$

En vertu de l'hypothèse (4.7) on a

$$|\varrho(x)| < 1 \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

(7) L'hypothèse (4.7) est non seulement plus faible que l'hypothèse (3.24), mais même plus faible que l'hypothèse: $K_1(w+K_2) < 1$ (cf. le renvoi (4)).

La méthode des approximations successives permet donc de démontrer que l'équation (4.12) a une solution unique $M'(x)$. La fonction $N'(y)$ étant définie par l'équation (4.11), il ne nous reste qu'à déterminer la valeur de la constante arbitraire intervenant dans la somme $M(x)+N(y)$, ce qui est possible en vertu de la condition (4.10). La solution $U(x,y) = M(x)+N(y)$ est ainsi parfaitement déterminée.

§ 5. Dans certaines hypothèses supplémentaires sur les courbes Γ et Λ, le rectangle D peut être divisé par des parallèles aux axes des coordonnées en rectangles D_i $(i = 1, \ldots, M)$, tels que la solution du problème R dans le rectangle D tout entier puisse être obtenue par le prolongement univoque de la solution des problèmes respectifs du rectangle D_i au rectangle D_{i+1} $(i = 1, \ldots, M-1)$.

Cette méthode a été appliqué par E. Kamke pour la démonstration de l'unicité des solutions du problème de Darboux dans un rectangle arbitrairement grand ([1], p. 408-410)([8]). Nous indiquerons encore quelques théorèmes qui peuvent être établis au moyen de la même méthode et dans lesquels intervient comme prémisse l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE Z*. 1° *L'hypothèse* Z *est satisfaite.*

2°. *Les fonctions continues F, G, B sont assujetties aux conditions de Lipschitz* (3.1), (3.2) *et* (3.3) *dans les ensembles* (3.20), (3.21) *et* (3.22) *respectivement.*

3° *Les constantes K_1, K_2 et w* (cf. (2.1)) *vérifient l'inégalité* $K_1(w+1)+K_2 < 1$ *(la constante de Lipschitz L* (cf. (3.1)) *n'est assujettie à aucune restriction).*

THÉORÈME 4. *Admettons l'hypothèse* Z*. *Soit k le plus grand nombre positif vérifiant l'inégalité*

$$k\{K_1+K_2+L(w+k+2)\} < 1-K_2-K_1(w+1). \tag{5.1}$$

Supposons qu'il existe des nombres $\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1$ tels que les relations suivantes soient satisfaites (fig. 1):

$$-\beta \leqslant \eta_0 \leqslant y_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \beta, \quad 0 < \eta_1-\eta_0 \leqslant k, \quad -\alpha \leqslant \xi_0 < \xi_1 \leqslant \alpha, \quad \xi_1-\xi_0 \leqslant k, \tag{5.2}$$

$$\eta_0 \leqslant \gamma(x) \leqslant \eta_1 \quad \textit{lorsque} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$$\xi_0 \leqslant \lambda(y) \leqslant \xi_1 \quad \textit{lorsque} \quad \eta_0 \leqslant y \leqslant \eta_1.$$

Alors le problème R *a une solution unique.*

([8]) On peut l'appliquer aussi pour démontrer l'existence d'une solution unique du problème de Cauchy en divisant le rectangle D en rectangles D_i tout comme l'a fait E. Kamke, vu la démonstration du théorème énoncé à la page 410 de [1].

Démonstration. Si $h \leqslant k$ le théorème 4 résulte du théorème 2 et de la remarque 3 (cf. § 3). Admettons donc que $k < h$.

I. Les conditions

$${}^0U_x(x,y) = G[x, {}^0U(x,y), {}^0U_y(x,y)] \quad \text{lorsque} \quad y = \gamma(x) \quad \text{et} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$${}^0U(\lambda(y),y) = U^* + \int_{y_0}^{y} B[t, {}^0U(\lambda(t),t), {}^0U_x(\lambda(t),t)]\,dt \quad \text{lorsque} \quad \eta_0 \leqslant y \leqslant \eta_1$$

déterminent la solution régulière ${}^0U(x,y)$ du système (1.1) dans le rectangle $ABCD$, c'est-à-dire le problème engendré par le problème R dans le rectangle $ABCD$ a exactement une solution.

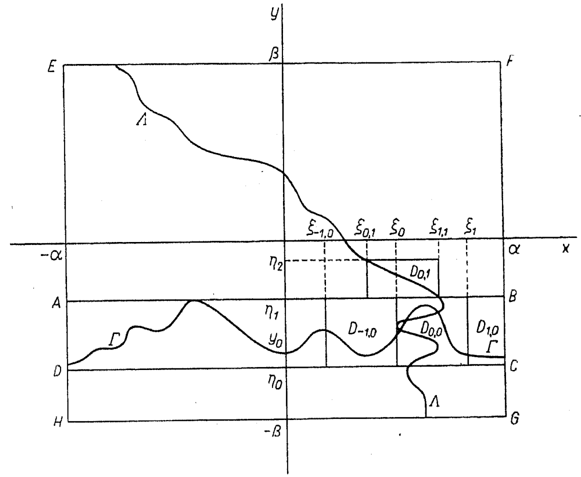

Fig. 1

Pour le prouver, choisissons une suite de nombres $\xi_{i,0}$ satisfaisant aux relations:

$$-\alpha = \xi_{-m_0,0} < \xi_{-m_0+1,0} < \ldots < \xi_{-1,0} < \xi_{0,0} < \xi_{1,0} < \ldots < \xi_{n_0,0} = \alpha,$$

$$\xi_{i+1,0}-\xi_{i,0} \leqslant k \quad (i = -m_0, \ldots, n_0-1),$$

$$\xi_{0,0} = \xi_0, \quad \xi_{1,0} = \xi_1$$

et désignons par $D_{i,0}$ les rectangles définis par les inégalités

$$\xi_{i,0} \leqslant x \leqslant \xi_{i+1,0}, \quad \eta_0 \leqslant y \leqslant \eta_1 \quad (i = -m_0, \ldots, n_0-1).$$

On vérifie facilement que, en vertu de nos hypothèses, le problème R engendre dans le rectangle $D_{0,0}$ un problème du même type qui a, en vertu du théorème 2, exactement une solution régulière ${}^{0,0}U(x,y)$. Cette solution étant définie en particulier sur le côté $x=\xi_{1,0}=\xi_1$, $\eta_0\leqslant y\leqslant\eta_1$, remarquons que le théorème 2 détermine dans le rectangle $D_{1,0}$ l'intégrale régulière ${}^{1,0}U(x,y)$ de l'équation (1.1) satisfaisant aux relations

$$ {}^{1,0}U_x(x,y)=G[x,{}^{1,0}U(x,y),{}^{1,0}U_y(x,y)] \quad \text{lorsque} \quad y=\gamma(x) \quad \text{et} \quad \xi_{1,0}\leqslant x\leqslant\xi_{2,0}, $$

$$ {}^{1,0}U(\xi_{1,0},y)={}^{0,0}U(\xi_{1,0},y) \quad \text{lorsque} \quad \eta_0\leqslant y\leqslant\eta_1. $$

En continuant le même procédé on définit successivement les fonctions régulières ${}^{2,0}U(x,y),\ldots,{}^{n_0-1,0}U(x,y)$ et ${}^{-1,0}U(x,y),\ldots,{}^{-m_0,0}U(x,y)$ dans les rectangles $D_{2,0},\ldots,D_{n_0-1,0}$ et $D_{-1,0},\ldots,D_{-m_0,0}$ respectivement. On arrive ainsi[9] à la solution ${}^{0}U(x,y)$ dont l'existence devait être démontrée (I).

II. Il existe exactement une solution ${}^{*}U(x,y)$ du problème engendré par le problème R dans le rectangle $DCFE$ (fig. 1).

Si $\eta_1=\beta$ l'existence de la solution ${}^{*}U$ résulte de I. Sinon, désignons par c un nombre remplissant les relations

$$ 0<c\leqslant k, \quad |\lambda(\bar{y})-\lambda(\bar{\bar{y}})|\leqslant k \quad \text{lorsque} \quad |\bar{y}-\bar{\bar{y}}|\leqslant c, \quad \bar{y},\bar{\bar{y}}\in\langle-\beta,\beta\rangle. $$

Un tel nombre existe en vertu de la continuité uniforme de la fonction $\lambda(y)$. Soit $\eta_2=\min(\beta,\eta_1+c)$. Il en résulte l'existence des nombres $\xi_{0,1}$ et $\xi_{1,1}$ vérifiant les relations

$$ \xi_{1,1}-\xi_{0,1}=k \quad \text{et} \quad \xi_{0,1}\leqslant\lambda(y)\leqslant\xi_{1,1} \quad \text{lorsque} \quad \eta_1\leqslant y\leqslant\eta_2. $$

Soit $D_{0,1}$ le rectangle défini par les inégalités

$$ \xi_{0,1}\leqslant x\leqslant\xi_{1,1}, \quad \eta_1\leqslant y\leqslant\eta_2. $$

En vertu du théorème 2, les conditions

$$ {}^{0,1}U_x(x,\eta_1)={}^{0}U_x(x,\eta_1) \quad \text{lorsque} \quad \xi_{0,1}\leqslant x\leqslant\xi_{1,1}, $$

$$ {}^{0,1}U(\lambda(y),y)={}^{0}U(\lambda(\eta_1),\eta_1)+\int_{\eta_1}^{y}B[t,{}^{0,1}U(\lambda(t),t),{}^{0,1}U_x(\lambda(t),t)]\,dt \quad \text{lorsque} \quad \eta_1\leqslant y\leqslant\eta_2 $$

déterminent dans le rectangle $D_{0,1}$ la solution régulière ${}^{0,1}U(x,y)$ de l'équation (1.1).

---

(9) En tenant compte de la propriété suivante facile à démontrer: la fonction $\tilde{U}(x,y)$ égale à ${}^{i,0}U(x,y)$ dans le rectangle $D_{i,0}$ et à ${}^{i+1,0}U(x,y)$ dans le rectangle contigu $D_{i+1,0}$ est une solution régulière du système (1.1) dans $D_{i,0}+D_{i+1,0}$ $(i=-m_0,\ldots,n_0-1)$.

Considérons maintenant une suite de nombres $\xi_{i,1}$ vérifiant les inégalités:

$$ -a=\xi_{-m_1,1}<\xi_{-m_1+1,1}<\ldots<\xi_{-1,1}<\xi_{0,1}<\xi_{1,1}<\ldots<\xi_{n_1-1,1}<\xi_{n_1,1}=a, $$

$$ \xi_{i+1,1}-\xi_{i,1}\leqslant k \quad \text{lorsque} \quad i=-m_1,\ldots,n_1-1 $$

et désignons par $D_{i,1}$ les rectangles définis par les inégalités

$$ \xi_{i,1}\leqslant x\leqslant\xi_{i+1,1}, \quad \eta_1\leqslant y\leqslant\eta_2 \quad (i=-m_1,\ldots,n_1-1). $$

Les fonctions ${}^{0}U(x,y)$ (cf. I) et ${}^{0,1}U(x,y)$ étant définies, on démontre facilement (cf. le renvoi[9]) qu'en résolvant successivement les problèmes de Darboux dans les rectangles $D_{1,1},\ldots,D_{n_1-1,1}$ et ensuite dans les rectangles $D_{-1,1},\ldots,D_{-m_1,1}$, on détermine la solution regulière ${}^{1}U(x,y)$ du problème engendré par le problème R dans le rectangle D_1, défini par les inégalités

$$ -a\leqslant x\leqslant a, \quad \eta_0\leqslant y\leqslant\eta_2. $$

Si $\eta_2=\beta$ on a ${}^{*}U(x,y)={}^{1}U(x,y)$, sinon nous posons

$$ \eta_3=\min(\eta_2+c,\beta) $$

et nous répétons le raisonnement qui a été appliqué dans le rectangle:

$$ -a\leqslant x\leqslant a, \quad \eta_1\leqslant y\leqslant\eta_2, $$

en aboutissant à la solution régulière ${}^{2}U(x,y)$ dans le rectangle D_2:

$$ -a\leqslant x\leqslant a, \quad \eta_0\leqslant y\leqslant\eta_3. $$

Après un nombre fini de ces procédés nous arriverons à déterminer a solution ${}^{*}U(x,y)={}^{l}U(x,y)$ dans le rectangle:

$$ -a\leqslant x\leqslant a, \quad \eta_0\leqslant y\leqslant\eta_{l+1} \quad \text{où} \quad \eta_{l+1}=\beta. $$

La propriété II se trouve ainsi établie.

Si $\eta_0=-\beta$ notre théorème est démontré, sinon il suffit de prouver que le problème engendré par le problème R dans le rectangle $ABGH$ a exactement une solution. La démonstration de cette propriété, tout à fait analogue à celle de la propriété II, peut être omise ici.

Remarque 5. On vérifie facilement que les hypothèses imposées dans le théorème 4 aux courbes Γ et Λ sont satisfaites lorsque la courbe Γ coïncide avec la caractéristique $y=y_0$, et la fonction $\lambda(y)$ n'est assujettie qu'à la prémisse 3° de l'hypothèse Z.

Voici maintenant le corollaire 1 qui résulte immédiatement du théorème 4 et de la remarque 5.

icm©

COROLLAIRE 1. *Admettons l'hypothèse* Z^* *et supposons que*

$$\gamma(x) \equiv y_0 \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

Alors le problème R *a une solution unique. En particulier le problème de Picard* (cf. III, remarque 1, § 1) *a une solution unique dans les hypothèses suivantes* 1° *et* 2°:

1° *La fonction* $F(x, y, U, P, Q)$ *est continue dans l'ensemble* (3.20) *et y satisfait à la condition de Lipschitz par rapport aux variables* U, P *et* Q (10).

2° *Les fonctions* $\sigma(x)$, $\tau(y)$, $\lambda(y)$ *de classe* C^1 *dans les intervalles* $-a \leqslant x \leqslant a$ *et* $-\beta \leqslant y \leqslant \beta$ *respectivement satisfont aux relations*:

$$\sigma(-a) = \tau(-\beta), \quad \lambda(-\beta) = -a, \quad |\lambda(y)| \leqslant a \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Voici maintenant le théorème 5 qui peut être démontré par la même méthode que le théorème 4 et ne diffère de lui que par la transposition des hypothèses supplémentaires imposées aux courbes Γ et Λ (11).

THÉORÈME 5. *Admettons l'hypothèse* Z^*. *Soit* k *le plus grand nombre positif vérifiant l'inégalité* (5.1). *Supposons que les nombres* $\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1$ *satisfaisant aux inégalités* (5.2) *existent et qu'on ait*

$$\xi_0 \leqslant \lambda(y) \leqslant \xi_1 \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$\eta_0 \leqslant \gamma(x) \leqslant \eta_1 \quad \text{lorsque} \quad \xi_0 \leqslant x \leqslant \xi_1.$$

Dans ces hypothèses le problème R *a une seule solution.*

Le théorème 5 entraîne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Supposons que*

$$y_0 = \gamma(x_0) \quad \text{et que} \quad \lambda(y) \equiv x_0 \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta \tag{5.3}$$

et admettons l'hypothèse Z^* *en y posant* $w = 0$ (cf. (2.1) et (5.3)).

Alors le problème R *a une solution unique.*

§ 6. Nous nous occuperons maintenant du problème de l'existence d'une solution unique du problème S et nous démontrerons le théorème 6 correspondant en un certain sens au théorème 2 relatif au problème R. Pareillement on peut obtenir les théorèmes concernant l'existence d'une solution unique du problème S, analogues aux théorèmes 1, 3 et 4 (le théorème correspondant au théorème 5 serait équivalent à celui qui correspond au théorème 4, les courbes Γ et Λ jouant dans le problème S le même rôle).

---

(10) La constante de Lipschitz en question n'est assujettie à aucune restriction.

(11) Ces théorèmes sont toutefois différents, car les courbes Γ et Λ ne jouent pas le même rôle dans le problème R.

Nous nous dispensons de présenter ici leurs énoncés, assez faciles à reconstruire, ainsi que d'indiquer les exemples qui mettent en évidence l'importance des hypothèses admises.

THÉORÈME 6. *Admettons que* $\gamma(x)$ *et* $\lambda(y)$ *soient des fonctions continues et que*

$$-\beta \leqslant \gamma(x) \leqslant \beta \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

$$-a \leqslant \lambda(y) \leqslant a \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Supposons que la fonction $F(x, y, U, P, Q)$, *continue dans l'ensemble* (3.20), *y satisfasse à la condition de Lipschitz* (3.1) *et que les fonctions* $G(x, U, Q)$ *et* $H(y, U, P)$, *continues dans les ensembles* (3.21) *et* (3.22) *respectivement, y satisfassent aux conditions de Lipschitz suivantes*:

$$|G(x, U, Q) - G(x, \tilde{U}, \tilde{Q})| \leqslant K_1\{|U - \tilde{U}| + |Q - \tilde{Q}|\},$$

$$|H(y, U, P) - H(y, \tilde{U}, \tilde{P})| \leqslant K_2\{|U - \tilde{U}| + |P - \tilde{P}|\}.$$

Alors, dans l'hypothèse que les constantes L, K_1, K_2 *et* h (cf. (2.2)) *satisfont à l'inégalité*:

$$(K_1 + K_2)(1+h) + hL(h+2) < 1 \tag{6.1}$$

le problème S *admet une solution unique.*

Démonstration. La démonstration du théorème 6 étant au fond analogue à celle du théorème 2, il suffira de l'esquisser.

On vérifie facilement que l'existence d'une solution unique du problème S est équivalente à celle d'une solution unique de classe C^1 du système

$$U(x, y) = L[U],$$

où l'opérateur $L[U]$ est défini par la formule (cf. [2], (3), p. 68 et [3], (2.2), § 2)

$$\begin{aligned} L[U] = U^* &+ \int_{x_0}^{x} G[s, U(s, \gamma(s)), U_y(s, \gamma(s))]\, ds + \\ &+ \int_{y_0}^{y} H[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)]\, dt + \\ &+ \int_{x_0}^{x} \Big\{ \int_{\gamma(s)}^{y_0} F[s, t, U(s, t), U_x(s, t), U_y(s, t)]\, dt \Big\} ds + \\ &+ \int_{y_0}^{y} \Big\{ \int_{\lambda(t)}^{x} F[s, t, U(s, t), U_x(s, t), U_y(s, t)]\, ds \Big\} dt. \end{aligned}$$

Pour établir le théorème 6 il suffit donc de démontrer l'existence d'un point fixe unique de la transformation

$$\tilde{U}(x,y) = L[U], \tag{6.2}$$

considérée dans l'espace E^* des fonctions $U(x,y)$ de classe C^1 dans le rectangle D et dont la norme est définie par (3.11). Supposons à cet effet que ${}^1U(x,y)\epsilon E^*$, ${}^2U(x,y)\epsilon E^*$. Soit

$${}^1\tilde{U}(x,y) = L[{}^1U], \quad {}^2\tilde{U}(x,y) = L[{}^2U].$$

On démontre, de même que dans le cas du théorème 1, que

$$\|{}^2\tilde{U}(x,y) - {}^1\tilde{U}(x,y)\| \leqslant [(K_1+K_2)(1+h)+hL(h+2)]\,\|{}^2U(x,y)-{}^1U(x,y)\|. \tag{6.3}$$

La relation $L[E^*]\subset E^*$ étant évidente, l'existence d'un point fixe de la transformation (6.2) résulte des inégalités (6.1) et (6.3) en vertu du théorème de Banach. Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[2] Z. Szmydt, *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, Vol. IV, No. 2 (1956), p. 67-72.

[3] — *Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Ann. Pol. Math. 4 (1957), p. 40-60.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 30. 4. 1956

On the estimation of Cesàro means of orthonormal series

by J. Meder (Szczecin)

1. A sequence of real functions $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ defined in the interval $\langle 0,1\rangle$ and such that the $\varphi_n^2(x)$ are integrable in $\langle 0,1\rangle$ is called an orthonormal system if

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{for} \quad i = k. \end{cases} \tag{1}$$

Instead of *an orthonormal system* we shall write *an ON-system*. If the system of functions is ON, then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{2}$$

with real coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ will be called an orthonormal series. We shall consider only orthonormal series satisfying the condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{3}$$

We do not repeat this assumption in the theorems presented here.

In this paper we shall be concerned with the estimation of Cesàro means of orthonormal series

$$\sigma_n^{(r)}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r a_k \varphi_k(x)}{A_n^r}, \tag{4}$$

where

$$A_0^r = 1, \quad A_n^r = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{n!}. \tag{5}$$

I wish to thank Professor Władysław Orlicz, Professor Leon Jeśmanowicz and Magister Julian Musielak for their kind perusal of this paper, and their valuable remarks.