Travaux cités

[1] И. Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Москва-Ленинград 1949.

[2] — *Теория устойчивости движения*, Москва-Ленинград 1952.

[3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1949.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

Reçu par la Rédaction le 4. 5. 1956

Sur les méthodes continues de limitation du type de Borel

par L. Włodarski (Łódź)

Introduction (1). Nous pouvons considérer la limite de la suite $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ comme une fonctionnelle $\xi = L(x)$ définie pour les suites convergentes $x = \{\xi_n\}$.

Introduisons les notations suivantes:

$$x = \{\xi_n\} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}, \quad \lambda x = \{\lambda \xi_n\}, \quad y = \{\eta_n\},$$

$$x+y = \{\xi_n + \eta_n\}, \quad xy = \{\xi_n \eta_n\}, \quad x/y = \{\xi_n/\eta_n\},$$

$\bar{x}_n$ — suite qu'on obtient de la suite x par un changement arbitraire du $n^{\text{-ième}}$ terme; $\bar{x}_n = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \bar{\xi}_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$,

x^*_{-1} — suite qu'on obtient de la suite x en y ajoutant un premier terme; $x^*_{-1} = \{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$,

x^*_1 — suite qu'on obtient de la suite x en en retranchant le premier terme; $x^*_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$.

La fonctionnelle en question a les propriétés suivantes:

1° $L(x+y) = L(x)+L(y)$,	c'est-à-dire elle est additive,
2° $L(\lambda x) = \lambda L(x)$,	c'est-à-dire elle est homogène,
3° $L(\bar{x}_n) = L(x)$,	c'est-à-dire elle ne dépend pas du changement d'un des termes,
4° $L(x^*_{-1}) = L(x)$,	c'est-à-dire elle est translative à droite,
5° $L(x^*_1) = L(x)$,	c'est-à-dire elle est translative à gauche,
6° $L(xy) = L(x)L(y)$,	c'est-à-dire elle est multiplicative,
7° $L(x/y) = L(x)/L(y)$,	pour $L(y) \neq 0$.

Les propriétés 1°-7° s'entendent de la manière suivante: Si le membre droit d'une des égalités existe, alors le membre gauche de l'égalité correspondante existe aussi et il est égal au membre droit.

(1) Les résultats de ce travail ont été exposés par l'auteur à la séance du 30. IV. 1955 de la Société Mathématique Polonaise, Section de Lublin.

La méthode de limitation définit la fonctionnelle $L(x)$ dans un certain ensemble X (appellé domaine de cette méthode). La méthode de limitation est une généralisation de la limite ordinaire, si elle est permanente, c'est-à-dire si la fonctionnelle correspondante $L(x)$ pour les suites convergentes est définie et égale à la limite ordinaire:

(P) $\quad L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n \quad$ pour les suites convergentes $\quad x = \{\xi_n\}$.

La méthode de limitation est d'autant meilleure que la classe des suites pour lesquelles elle est définie est plus vaste et que le nombre de propriétés données, auxquelles elle satisfait, est plus grand.

On voit que les propriétés 4° et 5° entraînent la propriété 3° et que la permanence et la propriété 6° (resp. 7°) entraînent la propriété 2°.

Les méthodes les plus générales de limitation des suites sont celles de Toeplitz. Une telle méthode, donnée sous forme d'une matrice infinie (a_{mn}), définit la fonctionnelle $L(x)$ par la formule

$$L(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\xi_n.$$

Chacune des méthodes de Toeplitz a les propriétés 1° et 2°. On connaît les simples conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode de Toeplitz soit permanente (voir par exemple [9], page 117). Chaque méthode permanente de Toeplitz a la propriété 3°.

Parmi les méthodes de Toeplitz, celle qu'on emploie le plus souvent est la méthode des premières moyennes, définie par la formule

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_n}{n+1}.$$

Cette méthode est permanente et elle a les propriétés 1°-5°.

S. Mazur et W. Orlicz [5] (p. 158, théorème 4.4) ont démontré qu'une méthode de Toeplitz permanente douée de la propriété 6° (respectivement la propriété 7°) définit la fonctionnelle $L(x)$ comme la limite d'une suite partielle $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_{m_n}$, où $\{m_n\}$ est une suite croissante de nombres naturels (elle est donc ce qu'on appelle une méthode extraite d'une méthode identique); il s'ensuit qu'aucune méthode de Toeplitz permanente, ayant les propriétés 6° (respectivement 7°) et limitant au moins une suite divergente ne peut avoir ni la propriété 4° ni la propriété 5°.

Nous considérons la propriété 4° (respectivement 5°) comme très importante, étant donné que toutes les méthodes de limitation (pas nécessairement la méthode de Toeplitz) permanentes et ayant les propriétés 1°, 2° et 4° (respectivement 5°) sont compatibles dans une certaine

classe de suites divergentes, par exemple dans le cas où elles limitent la suite $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ c'est toujours avec la limite $\frac{1}{2}$ et si pour un $a \neq 1$ quelconque elles limitent la suite géométrique (a^n) avec une limite finie, celle-ci est toujours nulle.

Les méthodes de limitation des suites généralement employées sont des méthodes continues [10]. Une telle méthode, donnée par une suite de fonctions $\{a_n(t)\}$ $(0 \leqslant t < T)$, définit la fonctionnelle $L(x)$ par la formule

$$L(x) = \lim_{t\to T-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\,\xi_n.$$

Le théorème et le corollaire de Mazur pour les méthodes de Toeplitz, cité précédemment, s'étendent aux méthodes continues.

Parmi les méthodes classiques les plus connues, la méthode d'Abel-Poisson qui définit la fonctionnelle $A(x)$ par la formule

$$A(x) = \lim_{t\to 1-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \xi_n, \tag{1}$$

possède les propriétés 1°-5° et la méthode de Borel, qui définit la fonctionnelle $B(x)$ par la formule

$$B(x) = \lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\xi_n \tag{2}$$

a les propriétés 1°-4°.

Évidemment les deux méthodes sont permanentes.

Dans ce travail nous allons examiner les méthodes B_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ qui définissent la fonctionnelle $B_k(x)$ par la formule

$$B_k(x) = 2^k \lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)}\xi_n. \tag{3}$$

Pour $k = 0$ nous obtenons la méthode classique de Borel. Dans le § 1, nous allons démontrer que les méthodes B_k sont continues, permanentes et possèdent les propriétés 1°-4°.

Dans le § 2 nous allons prouver que les méthodes B_k sont compatibles. Nous démontrerons en outre que, *si une suite est limitable par la méthode* B_k *et si sa transformée existe (c'est-à-dire, si la série correspondante de la formule* (3) *est convergente) — relativement à la méthode* B_p, *où* $p < k$, *alors cette suite est limitable par la méthode* B_p *avec la même limite que par la méthode* B_k.

Pour démontrer ce théorème nous nous appuierons sur le lemme principal suivant:

Si la fonction $f(u)$ est définie et continue pour $u>0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=g$, alors on a aussi $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)=g$ où $F(t)$ est définie par la formule

$$F(t)=\frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t}+u\right)f(u)\,du. \tag{4}$$

Dans ce paragraphe nous allons aussi démontrer qu'en vertu des propriétés de la transformation de Laplace les méthodes B_k sont compatibles avec la méthode d'Abel et, de plus, que chaque suite qui est limitable par l'une des méthodes B_k et pour laquelle la transformée relativement à la méthode d'Abel existe, est aussi limitable par la méthode d'Abel avec la même limite.

Dans le § 3, nous allons nous occuper du domaine de la méthode B_k, c'est-à-dire de l'ensemble des suites limitables par cette méthode.

On verra que pour deux méthodes B_p et B_q $(q\neq p)$, il existe une suite limitable par l'une d'elles et non limitable par l'autre. De plus, pour chaque méthode B_k il existe une suite qui est limitable par cette méthode et n'est limitable par aucune méthode d'indice plus grand, et une suite limitable par cette méthode et non limitable par aucune méthode dont l'indice est plus petit.

Nous allons aussi démontrer que, pour a arbitraire complexe, qui n'est cependant pas un nombre réel $\geqslant 1$, la suite géométrique $\{a^n\}$, est limitable par l'une des méthodes B_k (d'indice négatif) avec la limite zéro.

On sait que par exemple la méthode d'Abel limite la suite géométrique $\{a^n\}$ seulement dans le cas où $\operatorname{mod}(a)\leqslant 1$, et la méthode de Borel dans le cas où $R(a)<1$.

En vertu du théorème sur la concordance des méthodes B_k, nous pouvons considérer ces méthodes comme une seule méthode étant une généralisation naturelle de la méthode classique de Borel.

Nous dirons qu'une suite est limitable par la méthode généralisée de Borel si elle est limitable par l'une des méthodes B_k.

De tout ce qui a été dit précédemment il résulte que la série géométrique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ est sommable par la méthode généralisée de Borel avec la somme $1/(1-z)$ pour tout z complexe à l'exception des nombres réels $\geqslant 1$.

Les méthodes B_k d'indices négatifs se prêtent bien à la limitation de la série géométrique. Par contre les méthodes B_k d'indices positifs sont particulièrement utiles pour la limitation des suites rapidement divergentes. Par exemple la suite $\{(-1)^n(2n)!/n!\}$ est limitable par la méthode B_1

(avec la limite zéro) et elle n'est limitable par aucune des méthodes B_k dont l'indice k est inférieur à 1.

On connaît les théorèmes suivant lesquels chaque suite limitable par la méthode d'Euler l'est aussi par la méthode B_0 avec le même nombre comme limite et chaque suite limitable par les méthodes de Hölder ou de Cesàro l'est aussi par la méthode d'Abel avec le même nombre comme limite.

De ces théorèmes et de tout ce qui a été dit précédemment il résulte que toutes les méthodes B_k sont compatibles avec les méthodes d'Euler, de Cesàro et de Hölder.

K. Knopp s'est aussi occupé des méthodes B_k d'indices non négatifs (voir par exemple [4], p. 450, Erweitertes Borelsches Verfahren), mais il ne signale rien sur leur concordance; G. Doetsch [2] a démontré la concordance de la méthode classique B_0 avec la méthode d'Abel.

O. Sannia [8] et G. Doetsch [1] ont encore introduit d'autres généralisations de la méthode de Borel.

O. Sannia appelle la suite $x=\{\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ limitable par la méthode B_k, si la suite $x_k=\{\xi_k,\xi_{k+1},\xi_{k+2},\ldots\}$ est limitable par la méthode de Borel.

Il est facile de voir que ces méthodes sont concordantes et que leurs domaines forment une suite ascendante (pour k croissant). Si l'on considère la suite de ces méthodes comme une seule méthode (dans le sens donné précédemment), alors cette méthode, étant une généralisation de la méthode classique de Borel, est par cela même translative à droite et à gauche.

G. Doetsch a donné une méthode composée de la méthode de Borel avec celle des moyennes définies pour les fonctions. Nous disons que la fonction $f(t)$ est limitable par la méthode des premières moyennes avec le nombre m, comme limite, si

1° il existe une intégrale $\int_0^t f(u)\,du$ pour chaque $t>0$,

2° $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du=m$.

G. Doetsch appelle la suite $x=\{\xi_n\}$ limitable par la méthode de B_k avec la limite m si la transformée de Borel

$$B(t,x)=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\xi_n$$

est limitable par la $k^{\text{ème}}$ itération de la méthode de la première moyenne avec le nombre m comme limite.

Les méthodes B_k au sens de Doetsch sont concordantes et leurs domaines forment une suite ascendante (pour k croissant). D'autre part elles sont aussi translatives à droite.

Si l'on considère la suite de ces méthodes comme une seule méthode, celle-ci est aussi translative à gauche et, de plus, la série-produit de Cauchy des deux séries sommables par cette méthode est aussi sommable par cette méthode.

Il est cependant facile de remarquer que les méthodes de Sannia, aussi bien que celles de Doetsch, n'apportent à l'étude de la sommabilité de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ rien de nouveau à part ce que nous pouvons obtenir par la méthode classique de Borel.

Je tiens à remercier ici le prof. J. Mikusiński pour ses remarques et ses observations qui m'ont été très précieuses.

§ 1. Soit donnée une méthode de limitation fonctionnelle A définie par une suite de fonctions réelles $a_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ de la variable réelle t prenant des valeurs dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$ $(T \leqslant \infty)$.

DÉFINITION 1. Nous appelons la suite des nombres complexes $x = \{\xi_n\}$ *limitable par la méthode* A *avec la limite* ξ (finie ou infinie) si

1° la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, \xi_n \tag{5}$$

est convergente pour $0 \leqslant t < T$,

2° $\lim\limits_{t\to T-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, \xi_n = \xi$.

Nous appelons la série $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *sommable par la méthode* A *avec la somme* β, si la suite de ses sommes partielles est limitable par la méthode A avec la limite β.

DÉFINITION 2. Si la condition 1° est satisfaite (mais pas nécessairement la condition 2°), nous appelons la somme de la série (5) *transformée de la suite* x *par rapport à la méthode* A et nous la désignons par $A(t, x)$.

DÉFINITION 3. *Le domaine* A^* *de la méthode* A est l'ensemble de toutes les suites limitables par la méthode A.

DÉFINITION 4. Nous appelons la méthode A *continue* (voir [10]) si

(a) les fonctions $a_n(t)$ sont continues,

(b) il existe une suite $\{t_m\}$ $(0 \leqslant t_m < T)$ tendant vers T telle que pour chaque suite $\{\xi_n\}$ la convergence de la série (5) pour $t = t_m$ et pour $t = t_{m+1}$ entraîne la convergence uniforme de la série (5) dans l'intervalle $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$.

DÉFINITION 5. Nous dirons que la méthode A est *permanente* si elle limite chaque suite convergente en lui assignent comme limite sa limite ordinaire.

Pour qu'une méthode continue soit permanente (voir [10], p. 169, corollaire) nous avons les conditions nécessaires et suffisantes suivantes:

I° $\lim\limits_{t\to T-} a_n(t) = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$,

II° $\lim\limits_{t\to T-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t) = 1$,

III° il existe un nombre fini K (indépendant de t) tel que l'inégalité $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)| \leqslant K$ soit satisfaite pour $0 \leqslant t < T$.

THÉORÈME 1. *La méthode* B_k, *définie par la suite des fonctions*

$$b_{nk}(t) = 2^k e^{-t} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \geqslant 0, \quad T = \infty, \tag{6}$$

est une méthode continue et permanente pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Démonstration. La condition (a) de continuité de la méthode (définition 4) est évidemment satisfaite: la condition (b) l'est aussi, et l'on peut prendre comme suite $\{t_m\}$ une suite arbitraire quelconque de nombres positifs tendant vers ∞. Cela résulte des propriétés élémentaires des séries de puissances, car la transformée (5) (définition 2) par rapport à la méthode B_k a la forme

$$B_k(t, x) = 2^k e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)}\, \xi_n. \tag{7}$$

Nous allons maintenant démontrer la permanence de la méthode B_k. La condition I° de permanence est évidemment satisfaite. Nous allons donc démontrer que la condition II° de permanence l'est aussi, c'est-à-dire que

$$\lim_{t\to T-} \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(t) = 1. \tag{8}$$

Au cours de notre démonstration nous allons distinguer différents cas. Supposons d'abord que

A. $k < 0$. Soit $q = -k > 0$. On remarque que si la fonction $f(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$f'(t) - f(t) = g(t), \tag{9}$$

alors elle a la forme

$$f(t) = e^t\Big[f(0)+\int_0^t e^{-u}g(u)\,du\Big]. \tag{10}$$

Profitant de la connue

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{11}$$

nous voyons que la fonction

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^{-q}}}{\Gamma(n2^{-q}+1)} \tag{12}$$

satisfait à l'équation (9), où

$$g(t) = \sum_{i=1}^{2^q-1} \frac{t^{i2^{-q}-1}}{\Gamma(i2^{-q})}, \tag{13}$$

d'où il résulte que la fonction (12) est de la forme (10). En tenant, en outre, compte du fait que pour la fonction (12) on a $f(0) = 1$, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^{-q}}}{\Gamma(n2^{-q}+1)} = e^t\Big[1+\sum_{i=1}^{2^q-1} \frac{1}{\Gamma(i2^{-q})}\int_0^t e^{-u}u^{i2^{-q}-1}\,du\Big]; \tag{14}$$

en comparant les formules (6) et (14) nous obtenons dans le cas A

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(t) = 2^k\Big[1+\sum_{i=1}^{2^{-k}-1} \frac{1}{\Gamma(i2^k)}\int_0^t e^{-u}u^{i2^k-1}\,du\Big] \tag{15}$$

ce que montre que la formule (8) est bien vérifiee.

Dans le cas

B. $k = 0$ la formule (8) est évidemment satisfaite, car alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(t) \equiv 1.$$

Examinons maintenant le cas

C. $k > 0$. Considérons la fonction

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{pn}}{(pn)!}, \tag{16}$$

où p est un nombre naturel arbitraire. La fonction (16) satisfait à l'équation différentielle

$$h^{(p)}(t)-h(t) = 0, \tag{17}$$

où $h(0) = 1,\ h'(0) = h''(0) = \ldots = h^{(p-1)}(0) = 0$.

Prenons maintenant

$$a = e^{i2\pi/p} \quad (i \text{ — unité imaginaire}) \tag{18}$$

dans ce cas, les nombres $1, a, \ldots, a^{p-1}$ seront les racines de l'équation

$$z^p-1 = 0; \tag{19}$$

de même les nombres $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ seront les racines de l'équation

$$z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+1 = 0. \tag{20}$$

En vertu des propriétés connues des équations différentielles, la fonction $h(t)$ satisfaisant à l'équation (17) a la forme

$$h(t) = \sum_{r=0}^{p-1} A_r e^{a^r t}; \tag{21}$$

or, étant donné les valeurs initiales de la fonction $h(t)$ le système suivant d'équations est satisfait:

$$\begin{gathered}
A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{p-1} = 1,\\
A_0+A_1a+A_2a^2+\ldots+A_{p-1}a^{p-1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_0+A_1a^{p-1}+A_2a^{2(p-1)}+\ldots+A_{p-1}a^{(p-1)(p-1)} = 0.
\end{gathered}$$

En additionnant membre à membre, on obtient $pA_0 = 1$. Le reste des termes disparaît, $a, a^2, \ldots a^{p-1}$ étant les racines de l'équation (20). Nous avons donc $A_0 = 1/p$. En considérant la valeur obtenue A_0 et en tenant compte de (16) et de (21) nous aurons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{pn}}{(pn)!} = \frac{1}{p}e^t+\sum_{r=1}^{p-1} A_r e^{a^r t} \tag{22}$$

où $a = e^{i2\pi/p}$ (voir (18)). En appliquant la formule (22) pour $p = 2^k$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(t) = 1+2^k\sum_{r=1}^{2^k-1} A_r e^{(a^r-1)t} \tag{23}$$

d'où il résulte aussitôt que la formule (8) est satisfaite, car la partie réelle des expressions a^r-1 pour $1 \leqslant r < 2^k$ est toujours négative.

Pour terminer la démonstration du théorème 1, il reste encore à montrer que les fonctions (6) satisfont à la condition III° de permanence des méthodes continues de limitation. Toutefois, puisque $b_{nk}(t)$ sont des fonctions positives pour tous les indices et que la somme $\sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(t)$ est une fonction continue, la condition III° de permanence résulte dans ce cas de la condition II°. La démonstration du théorème 1 est ainsi terminée.

Dans la suite de nos raisonnements il nous faudra introduire la notion de produit de composition de fonctions et quelques-unes de ses propriétés.

DÉFINITION 6. Nous appelons *produit de composition* $f(t)*g(t)$ des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ la fonction

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Remarque 1. Le produit de composition est commutatif, c'est-à-dire

$$f(t)*g(t) = g(t)*f(t).$$

Nous démontrons cette propriété par l'échange des variables dans l'intégrale correspondante.

Remarque 2. Le produit de composition est additif par rapport à chaque facteur, c'est-à-dire

$$[f_1(t)+f_2(t)]*g(t) = [f_1(t)*g(t)]+[f_2(t)*g(t)].$$

La preuve est évidente.

Remarque 3. Le produit de composition est homogène par rapport à chaque facteur, c'est-à-dire

$$[af(t)]*g(t) = a[f(t)*g(t)].$$

La preuve est évidente.

LEMME 1. *Soit $f(t)$ une fonction complexe de la variable réelle définie et continue pour $t \geqslant 0$. Si l'on a*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = m \quad (\textit{fini ou infini}),$$

alors pour la fonction

$$g(t) = f(t)*e^{-t}\frac{t^a}{\Gamma(a+1)} \qquad (a > -1)$$

on aura aussi $\lim_{t\to\infty} g(t) = m$.

Démonstration. En vertu des remarques 2 et 3, il suffira de démontrer le lemme seulement dans le cas où $f(t)$ est une fonction réelle. Dans la démonstration, nous allons distinguer quelques cas particuliers.

A. $f(t) \equiv m$. Nous avons alors

$$g(t) = \frac{m}{\Gamma(a+1)}\int_0^t e^{-u}u^a\,du,$$

d'où en vertu de la définition de la fonction $\Gamma(s)$ nous aurons $\lim_{t\to\infty} g(t) = m$, ainsi la thèse est démontrée.

B. $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Soit donné un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$. Il existe alors en vertu de l'hypothèse un T tel que

(24) $$|f(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant T.$$

Supposons maintenant que $t > T$ et représentons la fonction $g(t)$ sous la forme

(25) $$g(t) \doteq \frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^{t-T} f(t-u)e^{-u}u^a\,du+\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_{t-T}^{t} f(t-u)e^{-u}u^a\,du.$$

La fonction $f(t)$ étant continue, elle est bornée dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ par un certain nombre M. Notons, de plus, que si $0 \leqslant u \leqslant t-T$, alors $T \leqslant t-u \leqslant t$, et si $t-T \leqslant u \leqslant t$, alors $0 \leqslant t-u \leqslant T$. En tenant compte de ce fait et de l'inégalité (24), nous obtenons l'évaluation suivante de la fonction (25):

(26) $$|g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\Gamma(a+1)}\int_0^{t-T} e^{-u}u^a\,du+\frac{M}{\Gamma(a+1)}\int_{t-T}^{t} e^{-u}u^a\,du.$$

De là on obtient ensuite

(27) $$|g(t)| \leqslant \varepsilon+\frac{M}{\Gamma(a+1)}e^{-t}e^{T}\max(1, t^a),$$

ce qui donne $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, c'est-à-dire la thèse dans le cas examiné.

C. $\lim_{t\to\infty} f(t) = m$ (nombre fini). Prenons $f_1(t) = f(t)-m$. Dans ce cas nous aurons

(28) $$f(t) = m+f_1(t) \quad \text{où} \quad \lim_{t\to\infty} f_1(t) = 0.$$

En vertu de (28) et de la remarque 2, nous obtiendrons

(29) $$g(t) = m*e^{-t}\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}+f_1(t)*e^{-t}\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}.$$

En appliquant au premier produit de composition du membre droit de l'égalité (29) le lemme 1, cas A, et au second produit de composition le lemme 1, cas B, nous obtenons la proposition dans le cas C.

D. $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Soit N un nombre arbitraire. En vertu de l'hypothèse il existe un T tel que

(30) $$f(t) \geqslant 2N \quad \text{pour} \quad t \geqslant T.$$

Supposons maintenant que $t > T$ et écrivons la fonction $g(t)$ sous la forme (25). En appliquant un raisonnement pareil à celui qui nous a conduit à l'inégalité (26), nous obtenons l'évaluation suivante:

$$g(t) \geqslant \frac{2N}{\Gamma(a+1)} \int_0^{t-T} e^{-u} u^a du - \frac{M}{\Gamma(a+1)} \int_{t-T}^{t} e^{-u} u^a du, \tag{31}$$

où M désigne le maximum de la fonction $f(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$.

L'inégalité (31) nous donne

$$g(t) \geqslant \frac{2N}{\Gamma(a+1)} \int_0^{t-T} e^{-u} u^a du - \frac{M}{\Gamma(a+1)} e^{-t} e^T \max(1, t^a). \tag{32}$$

L'évaluation (32) entraîne $g(t) \geqslant N$ pour t grand, ce qui établit la thèse dans le cas examiné. De cette façon le lemme 1 se trouve entièrement démontré.

Remarque 4. Pour $a, b > -1$ on aura la formule suivante:

$$e^{ct} \frac{t^a}{\Gamma(a+1)} * e^{ct} \frac{t^b}{\Gamma(b+1)} = e^{ct} \frac{t^{a+b+1}}{\Gamma(a+b+2)}. \tag{33}$$

Nous obtiendrons cette formule en profitant de la définition du produit de composition et ensuite de la relation bien connue entre les fonctions β et Γ d'Euler

$$\beta[p, q] = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$$

(voir par exemple [7], p. 398). La formule (33) est aussi connue dans le calcul des opérateurs (voir par exemple [6], p. 105, formules (55.3) et (55.4)).

Remarque 5. Chaque méthode continue (et même fonctionnelle) a les propriétés 1° et 2° données dans l'introduction.

Ceci résulte directement de la définition 1.

Remarque 6. Chaque méthode continue et permanente a la propriété 3° donnée dans l'introduction. Ceci résulte de la condition de permanence I° (voir page 143).

Définition 7. Nous dirons que la méthode continue A est *translative à droite* si la limitabilité d'une suite arbitraire $x = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$ par la méthode A avec le nombre ξ (fini ou infini) comme limite entraîne la limitabilité de la suite $x_{-1}^* = \{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$ par la méthode A avec la même limite ξ.

Théorème 2. *Les méthodes* B_k *définies par les formules* (6) *sont translatives à droite.*

Démonstration. Nous avons à démontrer que

$$B_k(x_{-1}^*) = B_k(x), \tag{34}$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{t\to\infty} B_k(t, x_{-1}^*) = \lim_{t\to\infty} B_k(t, x) \tag{35}$$

(voir définition 2) ou, plus exactement, que l'existence de la limite du membre droit (35) entraîne celle de la limite du membre gauche et aussi l'égalité de ces limites.

Remarquons qu'on a

$$B_k(t, x) = 2^k e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)} \xi_n; \tag{36}$$

la série figurant au membre droit est uniformément convergente dans chaque intervalle fini $\langle 0, T \rangle$. En posant

$$g(t) = B_k(t, x) * e^{-t} \frac{t^{2^k-1}}{\Gamma(2^k)} \tag{37}$$

nous obtenons, en vertu des remarques 2 et 3 et de la convergence uniforme de la série (36) l'égalité

$$g(t) = 2^k \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left[e^{-t} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)} * e^{-t} \frac{t^{2^k-1}}{\Gamma(2^k)} \right];$$

et tenant compte de la formule (33) nous avons

$$g(t) = 2^k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{n2^k+2^k}}{\Gamma(n2^k+2^k+1)} \xi_n$$

d'où

$$g(t) = 2^k e^{-t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n2^k}}{\Gamma(n2^k+1)} \xi_{n-1} - \xi_{-1} \right]$$

c'est-à-dire $g(t) = B_k(t, x_{-1}^*) - 2^k \xi_{-1} e^{-t}$. En vertu de (37) nous avons donc

$$B_k(t, x) * e^{-t} \frac{t^{2^k-1}}{\Gamma(2^k)} = B_k(t, x_{-1}^*) - 2^k \xi_{-1} e^{-t}. \tag{38}$$

En vertu de l'hypothèse on a $\lim\limits_{t\to\infty} B_k(t, x) = m$ donc en vertu du lemme 1, le membre gauche de (38) a aussi la limite m, lorsque $t \to \infty$; alors que la seconde expression du membre droit (38) tend évidemment vers zéro, lorsque $t \to \infty$; on aura donc $\lim\limits_{t\to\infty} B_k(t, x_{-1}^*) = m$ ce qui démontre le théorème.

Remarque 7. Les méthodes B_k ont les propriétés 1°-4° données dans l'introduction.

Ceci résulte des remarques 5 et 6 ainsi que des théorèmes I et II.

DÉFINITION 8. Nous dirons que la méthode continue A est *translative à gauche*, si la limitabilité d'une suite arbitraire $x = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$ par la méthode A avec le nombre ξ (fini ou infini), comme limite entraîne la limitabilité de la suite $x_1^* = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$ par la méthode A avec la même limite ξ.

Remarque 8. Les méthodes B_k ne sont pas translatives à gauche.

G. Hardy ([3], p. 183) a donné l'exemple d'une suite $\{\xi_n\}$ qui est limitable par la méthode B_0 et qui cesse cependant de l'être si l'on retranche son premier terme. Cette suite est déterminée par la formule

$$\xi_n = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+2)^q}{(2p+1)!}.$$

§ 2. Dans ce paragraphe nous allons introduire des théorèmes sur la concordance de ces méthodes entre elles et avec la méthode d'Abel. Afin de démontrer ces théorèmes, nous allons étudier la transformation

$$F = W\{f\} \tag{39}$$

définie par la formule (4). Cette transformation est additive et homogène, c'est-à-dire on a

$$W\{\alpha f_1 + \beta f_2\} = \alpha W\{f_1\} + \beta W\{f_2\}, \tag{40}$$

où $f_1(u), f_2(u)$ sont des fonctions pour lesquelles les intégrales (4) existent, α et β étant des nombres. Il sera commode d'introduire ici de nouvelles notations

$$G(t, u) = \exp(-u^2/4t + u); \tag{41}$$

la transformation (4) peut alors s'écrire sous la forme

$$F(t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty G(t, u) f(u)\, du. \tag{42}$$

LEMME 2. *Soit $f(u)$ une fonction complexe de la variable réelle, définie et continue pour $u \geqslant 0$. Si*

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = m \quad (\textit{fini ou infini}) \tag{43}$$

alors pour la fonction $F(t)$ définie par la formule (42), c'est-à-dire pour laquelle $F = W\{f\}$ on a aussi

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = m. \tag{44}$$

Démonstration. En vertu de (40), il suffit de démontrer le théorème dans le cas où la fonction est réelle. Au cours de la démonstration, nous allons distinguer successivement plusieurs cas.

A. $f(u) \equiv m$. Nous avons alors

$$F(t) = \frac{e^{-t} m}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty G(t, u)\, du$$

et, en faisant la substitution $u = 2\sqrt{t}(v + \sqrt{t})$, nous aurons

$$F(t) = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2} dv,$$

d'où, en vertu de la formule de Poisson, nous obtenons (44).

B. $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$. En vertu des hypothèses données il s'ensuit que la fonction $f(u)$ est bornée, c'est-à-dire que

$$|f(u)| \leqslant M < \infty \quad \text{pour tout } u, \tag{45}$$

et en vertu de l'hypothèse B pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un U tel que

$$|f(u)| < \varepsilon/3 \quad \text{pour} \quad u \geqslant U. \tag{46}$$

Nous allons maintenant considérer la fonction transformée (42). Pour l'évaluer nous décomposons l'intégrale figurant au membre droit de (42) en une somme d'intégrales prises de zéro à U, et de U à l'infini. En vertu de (45) et (46) et en vertu de l'inégalité évidente

$$0 < G(t, u) \leqslant e^u \quad \text{pour} \quad t > 0 \tag{47}$$

nous obtenons l'évaluation suivante:

$$|F(t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} M \int_0^U e^u du + \frac{\varepsilon}{3} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_U^\infty G(t, u)\, du$$

d'où

$$|F(t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} M e^U + \frac{\varepsilon}{3} H(t) \tag{48}$$

où

$$H(t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty G(t, u)\, du. \tag{49}$$

Vu le théorème démontré dans le cas A, nous avons

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = 1, \tag{50}$$

car on obtient $H(t)$ en mettant $f(u)\equiv 1$ dans la formule (42).

En vertu de (48) et (50) on aura $|F(t)|\leqslant\varepsilon$ pour t suffisamment grand, donc $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$ ce qui démontre notre théorème dans le cas examiné.

C. $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = m$ (m — fini). Afin de démontrer le théorème dans ce cas, écrivons la fonction $f(u)$ sous la forme

$$f(u) = m+g(u); \tag{51}$$

il est alors évident qu'on aura

$$\lim_{u\to\infty} g(u) = 0. \tag{52}$$

En tenant compte de (51) et (40) et en appliquant la thèse du théorème à la fonction identiquement égale à m (cas A) et à la fonction $g(t)$ (cas B), nous obtenons (44).

D. $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = \infty$. Soit N un nombre arbitraire >0. Il s'ensuit, en vertu de l'hypothèse, qu'il existe un nombre U tel que

$$f(u)\geqslant 2N \quad \text{pour} \quad u\geqslant U. \tag{53}$$

En décomposant l'intégrale (42), de même que dans le cas B, nous obtenons l'évaluation

$$F(t)\geqslant \frac{2Ne^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_U^\infty G(t,u)\,du - \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^U G(t,u)f(u)\,du.$$

Dans la première intégrale nous faisons la substitution $u=2\sqrt{t}(v+\sqrt{t})$. Nous évaluons la seconde intégrale en tenant compte de (47) et du fait que la fonction $f(u)$, étant continue, est bornée dans l'intervalle $(0, U)$ par un certain nombre M. Nous avons alors

$$F(t)\geqslant \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_{U/2\sqrt{t}-\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2}dv - \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}e^U M,$$

d'où $F(t)\geqslant N$ pour t grand, donc $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\infty$ ce qui démontre la proposition dans le cas examiné.

La démonstration du lemme 2 est ainsi terminée.

Nous avons constaté précédemment que pour l'opération (39) on a la formule (40). Dans la suite nous aurons cependant besoin d'une autre formule, à savoir

$$W\Big\{\sum_{n=0}^\infty f_n\Big\} = \sum_{n=0}^\infty W\{f_n\} \tag{54}$$

dans un certain cas particulier. Le lemme que nous donnons ci-dessous rendra possible l'application de la formule (54).

Lemme 3. *Si pour* $n=0,1,2,\dots$

1° *les fonctions* $f_n(u)$ *sont définies et continues pour* $u\geqslant 0$,

2° *les intégrales* $\int_0^\infty |f_n(u)|\,du$ *sont convergentes,*

3° *la série* $\sum_{n=0}^\infty f_n(u)$ *est uniformément convergente dans chaque intervalle fini,*

4° *la série* $\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty |f_n(u)|\,du$ *est convergente, alors l'intégrale* $\int_0^\infty\Big[\sum_{n=0}^\infty f_n(u)\Big]du$ *existe et est égale à* $\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty f_n(u)\,du$.

La démonstration de ce lemme résulte facilement de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 3. *Si la suite* $x=\{\xi_n\}$ *est limitable* (définition 1) *par la méthode* B_k *avec le nombre* ξ (*fini ou infini*) *comme limite, et sa transformée* (définition 2) *existe relativement à la méthode* B_{k-1}, *alors la suite* x *est limitable, par la méthode* B_{k-1}, *avec le même nombre* ξ *comme limite.*

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer que pour la fonction (7) on a la formule

$$W\{B_k\} = B_{k-1} \tag{58}$$

(voir la fomule (39)) et ensuite nous ferons usage du lemme 2. Pour démontrer (58) on va d'abord prouver que pour la fonction (6) on a

$$W\{b_{nk}\} = b_{n,k-1} \tag{59}$$

et ensuite nous ferons usage de la formule (54) (en nous appuyant sur le lemme 3) ainsi que de l'homogénité de l'opération W, car nous savons que

$$B_k(t,x) = \sum_{n=0}^\infty b_{nk}(t)\,\xi_n. \tag{60}$$

Pour démontrer la formule (59) substituons dans la formule (4) au lieu de $f(u)$ la fonction $b_{nk}(u)$ définie par la formule (6). On aura alors

$$W\{b_{nk}\} = \frac{2^k e^{-t}}{2\Gamma(n2^k+1)\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}u^{n2^k}du.$$

Dans notre intégrale substituons $u = 2\sqrt{tv}$; en profitant de la définition de la fonction Γ et en rangeant les termes, on aura

$$W\{b_{nk}\} = 2^{k-1}e^{-t}t^{n2^{k-1}}\frac{2^{n2^k}\Gamma(n2^{k-1}+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n2^k+1)}.$$

En appliquant maintenant la formule de Legendre (voir par exemple [7], p. 396)

$$\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2s}\Gamma(2s)$$

donc $2^{2s-1}\Gamma(s)/\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s) = 1/\Gamma(s+\frac{1}{2})$ et en posant $s = n2^{k-1}+\frac{1}{2}$ nous aurons

$$W\{b_{nk}\} = 2^{k-1}e^{-t}\frac{t^{n2^{k-1}}}{\Gamma(n2^{k-1}+1)} = b_{n,k-1}(t),$$

ce qui prouve bien que la formule (59) est vérifiée.

Nous allons démontrer ensuite que la formule (58) résulte des formules (59) et (60). A cet effet il suffit de remarquer que si dans la formule (4) nous substituons la fonction (60) $B_k(u, x)$ au lieu de la fonction $f(u)$, alors dans l'expression obtenue on aura le droit d'intervertir les signes $\int_0^\infty$ et $\sum_{n=0}^\infty$. Cela résulte du lemme 3. Les conditions 1° et 2° du lemme 3 sont évidemment satisfaites vu la formule (6) définissant les fonctions $b_{nk}(u)$. La condition 3° l'est aussi, car la série (36) définissant $B_k(t, x)$ est uniformément convergente dans chaque intervalle fini. Cela résulte directement des propriétés connues des séries de puissances car en vertu de l'hypothèse la série (36) est convergente pour $t \geqslant 0$.

Les fonctions $b_{nk}(t)$ étant positives, nous voyons en vertu de la formule (59), que la condition 4° sera aussi satisfaite si la série

$$B_{k-1}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k-1}(t)\,\xi_n$$

est absolument convergente pour tout t. Cela résulte cependant (vu les propriétés connues des séries de puissances) de l'hypothèse que la transformée de la suite x exsite relativement à la méthode B_{k-1}. De cette manière la formule (58) se trouve entièrement démontrée.

En vertu de l'hypothèse la limite

$$\lim_{t\to\infty} B_k(t, x) = \xi \tag{61}$$

existe. La formule (58) et (61) entraînent, en vertu du lemme 2, l'existence de la limite $\lim_{t\to\infty} B_{k-1}(t, x) = \xi$, ce qui démontre notre théorème.

Remarque 8. L'existence de la transformée de la suite x relativement à la méthode B_k, entraîne celle de la transformée de la suite x relativement à chaque méthode B_{k_1} d'indice k_1 plus grand que k.

Pour le prouver, observons que l'existence de la transformé (7) équivaut au fait que la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi_n}{\Gamma(n2^k+1)}u^n \tag{62}$$

a un rayon de convergence égal à ∞. Si dans la formule (62) nous faisons croître k, les valeurs absolues des coefficients de la série (62) vont diminuer et par conséquent le rayon de convergence de la série (62) ne diminuera pas; notre remarque était donc bien juste.

THÉORÈME 4. *Si la suite $x = \{\xi_n\}$ est limitable par la méthode B_p avec le nombre ξ (fini ou infini) comme limite et la transformée de la suite x existe relativement à la méthode B_q où $q < p$, alors la suite x est limitable par la méthode B_q avec la limite ξ.*

Démonstration. En vertu de l'hypothèse et de la remarque 8 la transformée de la suite x existe, en particulier, relativement à la méthode B_k d'indices $k = p-1, p-2, \ldots, q+1$. En appliquant successivement le théorème 3 aux méthodes B_k, pour les indices k donnés plus haut, nous obtiendrons la thèse de notre théorème.

DÉFINITION 9. Nous appelons les méthodes A et B *concordantes* si chaque suite $x = \{\xi_n\}$ qui est limitable aussi bien par la méthode A que par la méthode B est limitable par les deux méthodes avec le même nombre comme limite.

Remarque 9. Les méthodes B_k sont concordantes pour tous les indices k.

Ceci résulte directement de la définition 9 et du théorème 4.

DÉFINITION 10. Nous appelons *transformée* $A(t, x)$ de la suite $x = \{\xi_n\}$ relativement à la méthode d'Abel l'expression

$$A(t, x) = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n\xi_n.$$

Nous dirons que la transformée existe si la série donnée ci-dessus est convergente pour $0 \leqslant t < 1$.

La suite x est dite *limitable par la méthode d'Abel* avec le nombre ξ comme limite, si sa transformée existe et si

$$\lim_{t\to 1-} A(t, x) = \xi.$$

THÉORÈME 5. *Si la suite $x = \{\xi_n\}$ est limitable par l'une des méthodes B_k avec le nombre ξ comme limite et sa transformée existe relativement à la méthode d'Abel, alors la suite x est limitable par la méthode d'Abel avec la même limite ξ* [2].

Démonstration. Nous ferons usage ici de la transformation de Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du, \tag{63}$$

que nous écrirons pour abréger $F = L\{f\}$.

Dans la suite nous allons profiter du cas particulier suivant du théorème d'Abel sur la transformation de Laplace (pour la démonstration voir par exemple [2], p. 188, Satz 1):

(64) *Si la fonction $f(u)$ est une fonction complexe d'une variable réelle u définie et continue pour $u \geqslant 0$ et $\lim_{u\to\infty} f(u) = m$, et si $F(s)$ est une fonction définie par la formule (63), alors on a*

$$\lim_{s\to 0+} sF(s) = m.$$

Calculons maintenant la transformée de Laplace pour la fonction (6)

$$L\{b_{nk}\} = \frac{2^k}{\Gamma(n2^k+1)} \int_0^\infty e^{-(s+1)u} u^{n2^k} du$$

d'où en faisant la substitution $(s+1)u = v$ et quelques simples transformations, nous obtiendrons

$$L\{b_{nk}\} = 2^k/(s+1)^{n2^k+1}.$$

Nous allons trouver maintenant la transformée de Laplace pour la fonction (36). Appliquant le lemme 3 comme dans le théorème 3, nous aurons

$$L\{B_k\} = \frac{2^k}{s+1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(s+1)^{n2^k}} \xi_n. \tag{65}$$

En vertu de l'hypothèse nous avons

$$\lim_{u\to\infty} B_k(u, x) = \xi \tag{66}$$

[2] Un théorème analogue sur la concordance de la méthode B_0 avec la méthode d'Abel a été donné par G. Doetsch [2], p. 191. Notre démonstration suit celle de Doetsch.

donc en appliquant le théorème (64) nous aurons, en vertu de (65) et (66),

$$\lim_{s\to 0+} \frac{2^k s}{s+1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(s+1)^{n2^k}} \xi_n = \xi.$$

En posant

$$1/(s+1)^{2^k} = t \quad \text{d'où} \quad s = (1-t^{2^{-k}})/t^{2^{-k}}$$

nous aurons

$$\lim_{t\to 1-} \frac{2^k(1-t^{2^{-k}})}{1-t} \lim_{t\to 1-} (1-t) \sum_{n=0}^\infty t^n \xi_n = \xi.$$

La première limite du membre gauche est égale à 1; donc la seconde limite est égale à ξ. Cela indique précisément que la suite $x = \{\xi_n\}$ est limitable par la méthode d'Abel avec la limite ξ ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 10. Les méthodes B_k sont concordantes avec les méthodes d'Abel.

Cette remarque est une conséquence du théorème 5.

Remarque 11. Si une suite bornée est limitable par l'une des méthodes B_k, elle est de même limitable par la méthode d'Abel.

Ceci résulte du théorème 5 et du fait que la transformée $A(t, x)$ (définition 10) de la suite bornée $x = \{\xi_n\}$ relativement à la méthode d'Abel existe toujours.

§ 3. Dans ce paragraphe nous allons étudier le domaine de la méthode B_k c'est-à-dire l'ensemble des suites limitables par cette méthode. En particulier nous examinerons la limitabilité de la suite géométrique $\{a^n\}$ par les méthodes de ce type. On verra qu'à cet égard les plus utiles seront les méthodes B_k d'indices négatifs; par contre les méthodes d'indices positifs limitent les suites promptement divergentes. Pour tout couple de méthodes les domaines se croisent, c'est-à-dire il existe des suites limitables par l'une d'elles et non limitables par l'autre et inversement.

Nous donnerons à présent deux lemmes dont nous aurons besoin dans l'étude de la limitabilité de la suite géométrique.

LEMME 4. *Si b est un nombre complexe dont la partie réelle $R(b)$ est positive, alors on a l'égalité*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{bt} u^a e^{-u} du = \Gamma(a+1), \tag{67}$$

où t et a sont réels et $t > 0$, $a > -1$.

Démonstration. Soit $b = r_0(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0)$, $bt = r(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0)$, $OA = OB = r$ (voir fig. 1). On aura évidement $\int\limits_{OB} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{\widehat{AB}}$.

Vu la définition de la fonction Γ il suffira, pour démontrer (67), de prouver que

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{\widehat{AB}} u^a e^{-u} du = 0. \tag{68}$$

Introduisons les coordonnées polaires $u = re^{i\varphi}$. Alors la formule (68) s'écrira alors sous la forme

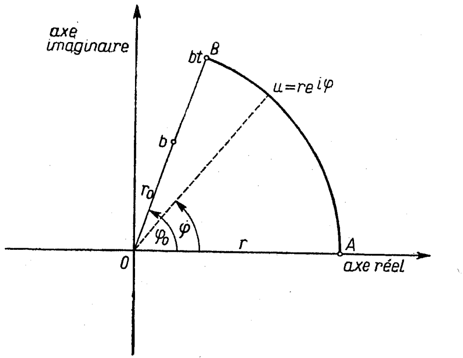

Fig. 1

$$\lim_{r\to\infty} I(r) = 0 \tag{69}$$

où

$$I(r) = ir^{a+1} \int\limits_0^{\varphi_0} \exp[-re^{i\varphi} + i\varphi(a+1)]\,d\varphi.$$

Nous avons évidemment

$$|I(r)| \leqslant r^{a+1} \int\limits_0^{\varphi_0} e^{-r\cos\varphi} d\varphi = |\varphi_0| r^{a+1} e^{-r\cos\varphi_0}$$

d'où l'on obtient (69) et par suite (68), ce qui démontre notre lemme.

LEMME 5. *Si b est un nombre complexe tel que $R(b) < 1$, alors on a la formule suivante:*

$$\lim_{t\to\infty} e^{(b-1)t} \int\limits_0^{bt} u^a e^{-u} du = 0, \tag{70}$$

où a et t sont réels et $a > -1$, $t > 0$.

Démonstration. Désignons l'intégrale qui figure dans la formule (68) par $J(t)$

$$J(t) = \int\limits_0^{bt} u^a e^{-u} du.$$

Faisons-y la substitution $u = bv$

$$J(t) = b^{a+1} \int\limits_0^{t} v^a e^{-bv} dv.$$

En désignant $R(b) = \beta$ nous obtenons l'évaluation suivante pour $J(t)$

$$|J(t)| \leqslant |b|^{a+1} t^{a+1} \max(1, e^{-\beta t}).$$

Vu la définition $J(t)$, nous aurons

$$\left| e^{(b-1)} \int\limits_0^{bt} u^a e^{-u} du \right| \leqslant |b|^{a+1} t^{a+1} \max(e^{(\beta-1)t}, e^{-t})$$

d'où résulte directement la formule (70).

THÉORÈME 6. *La méthode B_{-1} limite la suite géométrique $x_a = \{a^n\}$ avec la limite zéro pour a complexe, satisfaisant à l'une des inégalités suivantes:*

I° $R(a) < 1$, II° $R(a^2) < 1$.

($R(a)$ *désigne la partie réelle de a*). *L'ensemble des a correspond à la partie hachurée du plan complexe* (fig. 2).

Pour $a = 1$ la suite $\{a^n\}$ est limitable par la méthode B_{-1} avec 1 comme limite. Pour $a > 1$ réel la suite $\{a^n\}$ est limitable par la méthode B_{-1} avec $+\infty$ comme limite.

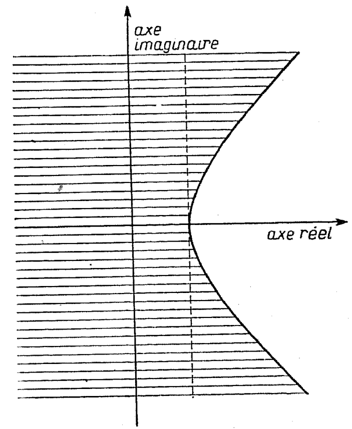

Fig. 2

Démonstration. Notons que la transformée (définition 2) $B_{-1}(t, x_a)$ de la suite géométrique $x_a = \{a^n\}$ par rapport à la méthode B_{-1} est de la forme suivante:

$$B_{-1}(t, x_a) = \frac{1}{2} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n/2} a^n}{\Gamma(n/2+1)} \tag{71}$$

(comparer la formule (7)). Désignons la somme de la série figurant au membre droit de (71) par $f(t)$; cette fonction satisfait à l'égalité différentielle

$$f'(t) - a^2 f(t) = \frac{t^{-1/2} a}{\Gamma(\frac{1}{2})} \tag{72}$$

où $f(0) = 1$. On peut donc exprimer la fonction $f(t)$ par la formule

$$(73) \qquad f(t) = \exp(a^2 t)\left[1+\frac{a}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t \exp(-a^2 u)u^{-1/2}du\right].$$

Dans l'intégrale figurant au membre droit de (73) nous faisons la substitution $a^2 u = v$; en considérant $v^{1/2}$ comme celle des racines qui est située dans le demi-plan complexe droit (ouvert), respectivement sur la partie positive de l'axe imaginaire, nous aurons

$$f(t) = \exp(a^2 t)\left[1+\frac{(a^2)^{1/2}}{a\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{a^2 t} e^{-v}v^{-1/2}dv\right].$$

Vu la définition de la fonction $f(t)$ nous avons donc

$$(74) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n/2}a^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} = \exp(a^2 t)\left[1+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{a^2 t} e^{-v}v^{-1/2}dv\right]$$

où $\varepsilon = +1$ pour tous les a tels que $R(a) > 0$, resp. $R(a) = 0$, $I(a) > 0$; $\varepsilon = -1$ pour les a restants.

La fonction (71) peut donc être écrite sous la forme

$$(75) \qquad B_{-1}(t, x_a) = \frac{1}{2}\exp[(a^2-1)t]\times \left[1+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{a^2 t} e^{-v}v^{-1/2}dv\right]$$

où ε est défini comme ci-dessus.

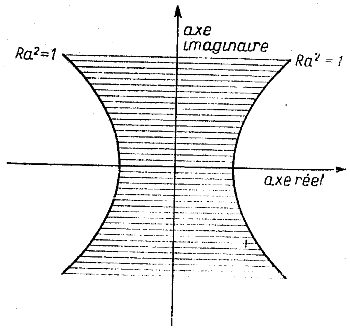

Fig. 3

La racine $v^{-1/2}$ doit être entendue dans le sens établi précédemment.

Supposons que l'hypothèse II° soit satisfaite c'est-à-dire que $R(a^2)<1$, alors en vertu du lemme 5 nous aurons $\lim_{t\to\infty} B_{-1}(t, x_a) = 0$, ce qui démontre que la suite $\{a^n\}$ est limitable avec zéro comme limite dans le cas II°. Sur la fig. 3 on a couvert de hachures la partie du plan complexe pour laquelle $R(a^2) < 1$.

Supposons maintenant qu'on ait

III° $\frac{3}{4}\pi < \arg a < \frac{5}{4}\pi$, $R(a^2) > 1$.

La transformée (75) peut alors être mise sous la forme suivante

$$B_{-1}(t, x_a) = \frac{1-\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{a^2 t} e^{-v}v^{-1/2}dv}{2\exp[(1-a^2)t]}.$$

Puisque, dans le cas examiné, nous avons $R(a^2) > 1$, donc, en vertu du lemme 4, la fonction $B_{-1}(t, x_a)$ est indéfinie du type $0/0$ lorsque $t \to \infty$. En appliquant le théorème de l'Hospital, nous voyons que dans le cas III° la suite géométrique est limitable par la méthode B_{-1} avec zéro comme limite. Sur la fig. 4 on a couvert de hachures la partie du plan complexe qui correspond à la condition III°.

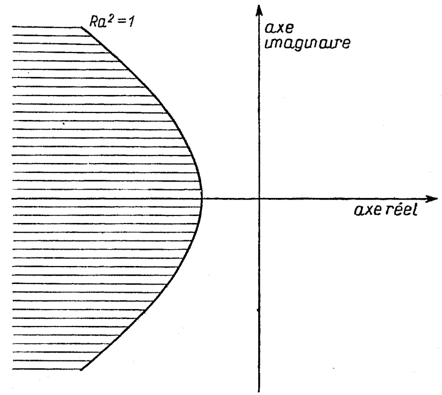

Fig. 4

IV° $\frac{3}{4}\pi < \arg(a) < \frac{5}{4}\pi$,

$R(a^2) = 1$.

Dans ce cas nous profitons de la formule (75) où $\varepsilon = -1$. Alors l'expression qui est placée devant les crochets est bornée en module par le nombre $\frac{1}{2}$, par contre, en vertu du lemme 4, l'expression entre crochets tend vers zéro si $t\to\infty$. Il s'ensuit que dans ce cas la suite $\{a^n\}$ est encore limitable avec zéro comme limite.

On voit que la limitabilité de la suite $\{a^n\}$, avec zéro comme limite dans les cas II°, III° et IV°, entraîne sa limitabilité dans les cas I° et II°, ce qui établit la première partie de notre thèse.

La limitabilité de la suite $\{a^n\}$ avec 1 comme limite pour $a = 1$, ainsi que sa limitabilité avec la limite ∞ pour a réel > 1 résultent directement de la formule (75) (où $\varepsilon = +1$).

Remarque 12. La transformée de la suite géométrique $\{a^n\}$ relativement à la méthode B_k

$$(76) \qquad B_k(t, x_a) = 2^k e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n2^k}a^n}{\Gamma(n2^k+1)}$$

existe pour chaque a et chaque k.

Ceci résulte des critères ordinaire de convergence des séries, si l'on tient compte de la formule de Stirling (voir par example [7], p. 402)

$$(77) \qquad \Gamma(s)\sim\sqrt{2\pi}e^{-s}s^{s-1/2}.$$

Remarque 13. Si la suite géométrique $\{a^n\}$ est limitable par la méthode B_p vers le nombre β (fini ou infini) comme limite, alors elle l'est aussi avec la limite β par chaque méthode B_k pour $k < p$.

Ceci résulte du théorème 4 (p. 155), en tenant compte de la remarque 12.

Théorème 7. *La méthode* B_{-k} ($k \geqslant 0$) *limite la suite géométrique* $\{a^n\}$:

A. *avec zéro comme limite pour tout* a (*complexe*) *satisfaisant à l'une des inégalités* (78)

$$(78) \qquad R(a^{2^i}) < 1 \quad pour \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

B. *avec la limite* 1 *pour* $a = 1$,

C. *avec la limite* ∞ *pour* $a > 1$ *et réel.*

Démonstration. Nous démontrons ce théorème par récurrence. Pour $k = 0$ la thèse résulte de la propriété connue de la méthode classique de Borel. Pour $k = 1$ elle a été démontrée dans le théorème 6.

Supposons maintenant que la thèse soit vraie pour la méthode B_{-k} et que nous voulions la démontrer pour la méthode B_{-k-1}. D'après l'hypothèse de récurrence et en vertu de la remarque 13 il suffira ici de démontrer la limitabilité de la suite géométrique $\{a^n\}$ avec zéro comme limite par la méthode B_{-k-1} si $R(a^{2^{k+1}}) < 1$. Mais ceci résulte du lemme 5, si nous procédons de même que dans la démonstration du théorème 6.

Remarque 14. Pour a arbitraire complexe la suite géomètrique $\{a^n\}$ est limitable par l'une des méthodes B_{-k} ($k \geqslant 0$) avec un nombre fini ou infini comme limite. Si $a = 1$, alors la suite est limitable avec la limite 1 si a est réel > 1 elle est limitable avec ∞ comme limite et pour les a restants elle est limitable avec la limite zéro.

Cette remarque résulte du théorème 7 si l'on tient compte du fait que chaque nombre complexe a, à l'exception des nombres réels $\geqslant 1$, satisfait à l'une des inégalités (78) pour k suffisamment grand.

Remarque 15. Si la transformée de la suite x par rapport à la méthode B_k n'existe pas (c'est-à-dire si dans la formule (7) la série n'est pas convergente pour tout t) la transformée de la suite x n'existe pas non plus par rapport à aucune méthode B_{k_1} dont l'indice $k_1 < k$.

Cette remarque résulte de la remarque 8 par un raisonnement indirect.

Théorème 8. *La suite* $x_1 = \{(\frac{3}{4}+i)^n\}$ *est limitable par la méthode* B_0 *et elle n'est limitable par aucune méthode* B_k *d'indice* k *positif. La suite* $x_2 = \{(-1)^n n!/\Gamma(\frac{1}{2}n+1)\}$ *est limitable par la méthode* B_0 *et elle n'est limitable par aucune méthode* B_k *d'indice* k *négatif.*

Démonstration. La suite x_1 est limitable par la méthode B_0, car $R(\frac{3}{4}+i) < 1$. Nous allons calculer maintenant la transformée de cette suite relativement à la méthode B_1.

$$B_1(t, x_1) = 2e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}(\frac{3}{4}+i)^n}{(2n)!} = 2e^{-t}\frac{e^{(1+i/2)t}+e^{-(1+i/2)t}}{2} = e^{it/2}+e^{(-2-i/2)t}$$

d'où l'on voit que $\lim_{t\to\infty} B_1(t, x_1)$ n'existe pas, c'est-à-dire que la suite x_1 n'est pas limitable par la méthode B_1. D'après la remarque 13 il en résulte donc qu'elle n'est limitable par aucune méthode d'indice plus grand, ce qui démontre première partie de notre théorème.

Nous allons démontrer ensuite que la suite x_2 est limitable par la méthode B_0. Calculons sa transformée

$$B_0(t, x_2) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}.$$

En vertu de la formule (74) nous obtenons

$$B_0(t, x_2) = \frac{1-\int_0^{t^2} e^{-v}v^{-1/2}dv/\Gamma(\frac{1}{2})}{\exp(t-t^2)}.$$

Appliquant la formule de l'Hospital nous aurons $\lim_{t\to\infty} B_0(t, x_2) = 0$ ce qui démontre que la suite x_2 est limitable par la méthode B_0 avec zéro comme limite. La transformée de la suite x_2 relativement à la méthode B_{-1} est

$$B_{-1}(t, x_2) = \tfrac{1}{2}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\, t^{n/2}}{[\Gamma(\frac{1}{2}n+1)]^2}.$$

La formule (77) de Stirling montre que le terme général de la série figurant au nombre droit ne tend pas vers zéro pour $t \geqslant 1$, donc la transformée de la suite x_2 relativement à la méthode B_{-1} n'existe pas; de même, en vertu de la remarque 15, la transformée de la suite x_2 n'existe pas non plus par rapport à aucune des méthodes B_k d'indice négatif, ce qui démontre la seconde partie de notre thèse.

Théorème 9. *Pour chaque méthode* B_k *il existe une suite qui est limitable par cette méthode et n'est limitable par aucune des méthodes* B_p *d'indice plus grand* ($p > k$), *et il existe une suite qui est limitable par la méthode* B_k *et n'est limitable par aucune des méthodes* B_q *d'indice plus petit* ($q < k$).

Démonstration. Supposons pour le moment que $k < 0$. Posons

$$a = 2^{2^k}\exp(i2^{k-1}\pi); \text{ alors } a^{2^{-k}} = 2i.$$

Donc en vertu du théorème 7 la suite $\bar{x} = \{a^n\}$ est limitable par la méthode B_k. Nous démontrerons qu'elle n'est pas limitable par la méthode B_{k+1}, et par conséquent, en vertu de la remarque 13, qu'elle n'est limitable par aucune méthode B_p où $p > k$.

Remarquons à cet effet que

$$(79) \qquad B_{k+1}(t, \bar{x}) = 2^{k+1}e^{-t}\sum \frac{t^{n2^{k+1}}a^n}{\Gamma(n2^{k+1}+1)}$$

$$= \begin{cases} 2^{k+1}e^{it}\left[1+\sum_{r=1}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{\Gamma(r2^{k+1})}\int_0^{1+i} e^{-u}u^{r2^{k+1}-1}du\right] & \text{pour} \quad k < -1, \\ e^{it} \quad \text{pour} \quad k = -1. \end{cases}$$

Nous omettons les détails du calcul qui a mené à la formule (79).

De la formule (79) il résulte que $\lim\limits_{t\to\infty} B_{k+1}(t, \bar{x})$ n'existe pas, donc la suite $\bar{x} = \{a^n\}$ n'est, en effet, pas limitable par la méthode B_{k+1}.

On pourrait démontrer, comme dans la démonstration du théorème 8, que la suite $\{(-1)^n\Gamma(n2^k+1)/\Gamma(n2^{k-1}+1)\}$ est limitable par la méthode B_k et que sa transformée n'existe pourtant pas par rapport à la méthode B_{k-1}, donc, en vertu de la remarque 15, elle n'existe par rapport à aucune méthode B_q d'indice $q < k$.

Travaux cités

[1] G. Doetsch, *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Inaug.-Diss., Göttingen 1920.

[2] — *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, New-York 1943.

[3] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

[4] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen*, Berlin 1922.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), p. 129-160.

[6] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[7] S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938.

[8] G. Sannia, *Nuovo metodo di sommazione delle serie: estensione del metodo di Borel*, Rend. del circ. mat. di Palermo 42 (1917), p. 303-322.

[9] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace mat.-fiz. 22 (1911), p. 113-119.

[10] L. Włodarski, *Sur les méthodes continues de limitation (I)*, Studia Math. 14 (1954), p. 161-187.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1956

Sur l'existence d'une solution unique de certains problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes

par Z. Szmydt (Kraków)

§ 1. Considérons le système de n équations différentielles

$$u_{xy}^{(i)}(x, y) = f^{(i)}(x, y, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}, u_y^{(1)}, \ldots, u_y^{(n)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont les seconds membres sont continus; nous l'écrirons dans la suite sous la forme vectorielle

$$(1.1) \qquad U_{xy}(x, y) = F(x, y, U, U_x, U_y).$$

Désignons par D le rectangle défini par les inégalités

$$(1.2) \qquad -a \leqslant x \leqslant a, \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta \quad \text{où} \quad 0 < a < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \infty.$$

Considérons deux courbes continues Γ et Λ situées dans le rectangle D et définies respectivement par les équations

$$(1.3) \qquad y = \gamma(x) \quad \text{lorsque} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

$$(1.4) \qquad x = \lambda(y) \quad \text{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Définition 1. Dans cet article la fonction $U(x, y)$ sera dite *régulière dans un domaine* si elle est continue et admet des dérivées U_x, U_y, U_{xy} continues dans ce domaine.

Soit

$$P = (p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}), \qquad Q = (q^{(1)}, \ldots, q^{(n)})$$

et envisageons les problèmes suivants R et S.

Problème R. *Existe-t-il une solution régulière $U(x, y)$ du système (1.1) dans le rectangle D, satisfaisant aux conditions*

$$U_x(x, y) = G[x, U(x, y), U_y(x, y)] \quad \textit{lorsque} \quad y = \gamma(x) \quad \textit{et} \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

$$U(\lambda(y), y) = U^* + \int_{y_0}^{y} B[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)]\,dt \quad \textit{lorsque} \quad -\beta \leqslant y \leqslant \beta$$