# Problème aux limites pour l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dans la théorie du mouvement d'un liquide visqueux

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

**I. Introduction.** Les équations du mouvement d'un liquide visqueux incompressible ont la forme:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{W}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{F} - \nu \operatorname{rot}\boldsymbol{W} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{W} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$ désigne la vitesse du fluide, $\nu$ le coefficient de viscosité cinématique, $\boldsymbol{F}$ le vecteur des forces extérieures.

D'après la transformation

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{v}] = -\operatorname{rot}\boldsymbol{F} - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{W} \tag{2}$$

et l'équation de continuité

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

nous obtenons les équations (1) sous la forme

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = (\boldsymbol{W}\nabla)\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{W} + \operatorname{rot}\boldsymbol{F} \tag{4}$$

ou sous la forme

$$\tag{4'} \begin{cases} \dfrac{\partial W_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial W_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial W_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial W_x}{\partial z} = W_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + W_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + W_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \nu\Delta W_x, \\ \dfrac{\partial W_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial W_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial W_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial W_y}{\partial z} = W_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + W_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + W_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \nu\Delta W_y, \\ \dfrac{\partial W_z}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial W_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial W_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial W_z}{\partial z} = W_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + W_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + W_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \nu\Delta W_z. \end{cases}$$

Les équations (4) deviennent plus simples, quand il s'agit du mouvement plan, puisque dans ce cas $v_z = 0$, $v_x$ et $v_y$ ne dépendent pas de la



coordonnée $z$, ce qui permet d'introduire la fonction du courant $\psi(x, y, t)$ définie par les égalités:

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \qquad v_y = -\partial\psi/\partial x \tag{5}$$

et de remplacer les équations (4) par une seule équation

$$\nu\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \operatorname{rot}_z\boldsymbol{F} \tag{6}$$

avec une seule fonction inconnue $\psi(x, y, t)$. D'autre part, si le mouvement du fluide est permanent, la fonction $\psi$ ne dépend que des coordonnées $x$ et $y$ et l'équation (6) aura la forme

$$\nu\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \varphi(x, y) \tag{7}$$

où $\varphi(x, y) = \operatorname{rot}_z\boldsymbol{F}$.

Dans ce travail nous nous proposons de trouver la fonction $\psi(x, y)$ qui satisfait à l'équation (7) à l'intérieur du domaine borné, simplement ou multiplement connexe $D$, limité par l'ensemble des courbes $C(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ et satisfait, sur le contour $C$ du domaine $D$, aux conditions limites suivantes:

$$\psi(A) \to 0 \quad \text{si} \quad A \to P, \tag{8}$$

$$d\psi(A)/dn \to 0 \quad \text{si} \quad A \to P \tag{9}$$

où $P$ est un point sur le contour $C$, $A$ un point à l'intérieur du domaine $D$. En outre nous admettons pour le contour $C(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ et pour la fonction donnée $\varphi = \operatorname{rot}_z\boldsymbol{F}$ les propriétés suivantes:

A. Les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ possèdent une courbure vérifiant la condition de Hölder, c'est-à-dire les coordonnées $x$ et $y$ comme fonctions de l'arc $s$ possèdent des dérivées secondes vérifiant la condition de Hölder.

B. La fonction $\varphi(x, y)$ est bornée et continue dans le domaine $D+C$ et vérifie la condition de Hölder par rapport à $x$ et $y$ dans ce domaine.

**II. Étude préliminaire.** Considérons d'abord l'équation du type

$$\Delta\Delta\psi = \Phi(x, y) \tag{10}$$

étudiée par Lauricella [2]. La solution unique du problème aux limites (8) et (9) pour l'équation (10) a la forme

$$\psi(x, y) = \frac{1}{8\pi}\iint_D G(x, y, \xi, \eta)\Phi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{11}$$

en supposant que la fonction $\Phi$ vérifie la condition de Hölder. La fonction de Green $G(x, y, \xi, \eta)$ pour l'équation (10) est la somme suivante d'une fonction irrégulière et d'une fonction régulière pour $A = B$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = r_{AB}^2 \log(1/r_{AB}) + g(x, y, \xi, \eta) \tag{12}$$

$$\left(r_{AB} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \quad A(x,y), \quad B(\xi,\eta)\right)$$

et elle satisfait aux conditions limites

$$G(A,B) \to 0, \quad dG(A,B)/dn_p \to 0 \quad \text{si} \quad A \to P \in C \tag{13}$$

$B$ étant un point intérieur du domaine $D$.

Il en résulte que la fonction $g(x, y, \xi, \eta)$ est une fonction biharmonique uniforme des coordonnées $x$ et $y$, régulière dans le domaine $D$, satisfaisant aux conditions limites suivantes:

$$g(A,B) \to -r_{PB}^2 \log\frac{1}{r_{PB}}, \qquad \frac{dg(A,B)}{dn_p} \to -\frac{d[r_{PB}^2\log(1/r_{PB})]}{dn} \tag{14}$$

si $A \to P \in C$.

Pour démontrer que la fonction (11) vérifie l'équation (10), remarquons que la fonction $g(x, y, \xi, \eta)$ satisfait à l'équation $\Delta\Delta g = 0$ et que les dérivées partielles du second ordre de la fonction $\psi$ dans l'équation (11) peuvent être obtenues en différentiant la fonction $G(x, y, \xi, \eta)$ sous le signe de l'intégrale [7], p. 643, nous tirons de la formule (11) l'équation suivante

$$\Delta\Delta\psi = \frac{1}{8\pi}\Delta\iint_D 4\left(\log\frac{1}{r_{AB}}-1\right)\Phi(B)\,d\sigma_B = \frac{1}{2\pi}\Delta\iint_D \Phi(B)\log\frac{1}{r_{AB}}\,d\sigma_B. \tag{15}$$

Ensuite, en tenant compte de l'équation de Poisson relative au laplacien, nous pouvons déduire que la dernière intégrale dans l'expression (15) est égale à la fonction $\Phi(A)$, la fonction $\Phi$ satisfaisant à la condition de Hölder. Nous en concluons que l'expression (11) est une solution de l'équation (10).

La fonction (11) satisfait aux conditions limites (8) et (9), puisque les fonctions $G(A,B)$, $dG(A,B)/dn_p$ satisfont aux conditions (8) et (9) et restent bornées même quand les deux points $A$ et $B$ tendent vers le point $P$ de la courbe $C$. D'après les équations intégrales de Lauricella (loc. cit.) pour la fonction $g(A, B)$, il en résulte que la fonction $g(A, B)$ et ses dérivées partielles du premier et du second ordre ont des valeurs limites définies et qu'elles sont bornées dans l'ensemble de tous les couples de points $A$, $B$ du domaine $D$. Il en résulte, de même, l'existence des valeurs limites pour les dérivées du troisième ordre de la fonction $G(A, B)$, si le point $A$ tend vers le point $P$ de la courbe $C$, le point $B$ restant à l'intérieur du domaine $D$. On peut démontrer de même façon que l'a fait W. Pogorzelski [6], que ces dérivées admettent la limitation:

$$|G_A'''(A,B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^a} \quad \text{où} \quad a < 2 \tag{16}$$

pour tout couple de points $A$, $B$ du domaine $D$. Enfin par une méthode analogue à celle de la théorie du potentiel, on peut démontrer que les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction $\psi$ dans l'équation (11) peuvent être obtenues en différentiant la fonction $G(x, y, \xi, \eta)$ sous le signe de l'intégrale, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} &= \frac{1}{8\pi}\iint_D \frac{\partial\Delta G}{\partial x}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\\ \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} &= \frac{1}{8\pi}\iint_D \frac{\partial\Delta G}{\partial y}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.\end{aligned} \tag{17}$$

**III. Solution du problème.** Nous allons résoudre l'équation (7) avec les conditions limites (8) et (9). D'après la solution (11) pour l'équation (10), nous constatons que la fonction inconnue $\psi$, satisfaisant aux conditions proposées, doit satisfaire à l'équation intégro-différentielle suivante:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{8\pi\nu}\iint_D G(x,y,\xi,\eta)\left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta} + \varphi(\xi,\eta)\right]d\xi\,d\eta \tag{18}$$

où la fonction de Green $G(x, y, \xi, \eta)$ est de la forme (12) et satisfait aux conditions limites (13). En posant

$$f(x,y) = \frac{1}{8\pi\nu}\iint_D G(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{19}$$

nous écrivons l'équation (18) sous la forme:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{8\pi\nu}\iint_D G(x,y,\xi,\eta)\left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta + f(x,y) \tag{20}$$

où la fonction $f(x, y)$ est donnée.

Les raisonnements du paragraphe précédent permettent de constater que si la fonction $\psi$ satisfait à l'équation (20) elle satisfera de même au système de 5 équations intégro-différentielles:

$$
(21)\quad \begin{cases}
\psi(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D G(x,y,\xi,\eta)\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta+f(x,y),\\[2ex]
\dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x},\\[2ex]
\dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial y}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y},\\[2ex]
\dfrac{\partial\Delta\psi(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f(x,y)}{\partial x},\\[2ex]
\dfrac{\partial\Delta\psi(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G(x,y,\xi,\eta)}{\partial y}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f(x,y)}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Nous allons résoudre maintenant le système auxiliaire de la forme

$$
(22)\quad \begin{cases}
\psi(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D G(x,y,\xi,\eta)[v(\xi,\eta)w(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta+f(x,y),\\[2ex]
u(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x}[v(\xi,\eta)w(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x},\\[2ex]
v(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial y}[v(\xi,\eta)w(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y},\\[2ex]
w(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x}[v(\xi,\eta)w(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f(x,y)}{\partial x},\\[2ex]
z(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G(x,y,\xi,\eta)}{\partial y}[v(\xi,\eta)w(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f(x,y)}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Appliquons la méthode des approximations successives au système (22). Formons, dans ce but, cinq suites infinies de fonctions

$$
(23)\quad \begin{matrix}
\psi_0, & \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, & \ldots,\\
u_0, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots,\\
v_0, & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots,\\
w_0, & w_1, & w_2, & \ldots, & w_n, & \ldots,\\
z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_n, & \ldots
\end{matrix}
$$



définies par les relations de récurrence

$$
(24)\quad \begin{cases}
\psi_n = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D G[v_{n-1}w_{n-1}-u_{n-1}z_{n-1}]d\xi\,d\eta+f,\\[2ex]
u_n = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G}{\partial x}[v_{n-1}w_{n-1}-u_{n-1}z_{n-1}]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f}{\partial x},\\[2ex]
v_n = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial G}{\partial y}[v_{n-1}w_{n-1}-u_{n-1}z_{n-1}]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial f}{\partial y},\\[2ex]
w_n = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G}{\partial x}[v_{n-1}w_{n-1}-u_{n-1}z_{n-1}]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f}{\partial x},\\[2ex]
z_n = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \dfrac{\partial\Delta G}{\partial y}[v_{n-1}w_{n-1}-u_{n-1}z_{n-1}]d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial\Delta f}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Nous allons d'abord montrer que l'on peut former les suites (23) à condition que le diamètre du domaine $D$ soit suffisamment petit.

Supposons que les fonctions $\psi_n, u_n, v_n, w_n, z_n$ satisfassent aux conditions ($R$ étant une constante positive arbitraire):

$$
(25)\qquad |\psi_n|<R,\qquad |u_n|<R,\qquad |v_n|<R,\qquad |w_n|<R,\qquad |z_n|<R
$$

et cherchons pour le diamètre $d$ du domaine $D$ une condition telle que les fonctions $\psi_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, z_{n+1}$ satisfassent aux inégalités (25).

En supposant que $|\varphi|<M$ et en tenant compte du fait que les fonctions $G$ et $G'_A$ sont bornées $[|G|<k,\ |G'_A|<k]$ (remarque du paragraphe précédent) et que la fonction $G'''_A$ vérifie l'inégalité (16), nous obtenons

$$
(26)\quad \begin{gathered}
|f(x,y)| < \frac{Mk}{8\pi\nu}\iint_D d\sigma_B < \frac{Mkd^2}{8\nu},\\[1ex]
\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < \frac{Mk}{8\pi\nu}\iint_D d\sigma_B < \frac{Mkd^2}{8\nu},\\[1ex]
\left|\frac{\partial\Delta f}{\partial x}\right| < \frac{M}{8\pi\nu}\iint_D \frac{c}{r^a}\,d\sigma_D < \frac{Mc}{8\pi\nu}\,2\pi\int_0^d \frac{dr}{r^{a-1}} = \frac{Mcd^{2-a}}{4\nu(2-a)}
\end{gathered}
$$

et des inégalités analogues pour $\partial f/\partial y$ et $\partial\Delta f/\partial y$, $d$ désignant le diamètre du domaine $D$.

Du système (24) et des conditions (25) nous obtenons par un calcul pareil

$$(27)\qquad \begin{gathered} |\psi_{n+1}| < \frac{(2R^2+M)kd^2}{8\nu}, \qquad |u_{n+1}| < \frac{(2R^2+M)kd^2}{8\nu}, \\ |v_{n+1}| < \frac{(2R^2+M)kd^2}{8\nu}, \qquad |w_{n+1}| < \frac{(2R^2+M)cd^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}, \\ |z_{n+1}| < \frac{(2R^2+M)cd^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}. \end{gathered}$$

Il en résulte que, si le diamètre $d$ vérifie les inégalités

$$(28)\qquad d < \begin{cases} \sqrt{\dfrac{8\nu R}{(2R^2+M)k}}, \\ \sqrt[2-\alpha]{\dfrac{4R\nu(2-\alpha)}{(2R^2+M)c}}, \end{cases}$$

les fonctions $\psi_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, z_{n+1}$ satisfont aux conditions (25) et alors les suites de fonctions successives sont définies.

Maintenant nous allons montrer que les suites (23) sont convergentes et que les fonctions limites donnent la solution du problème. D'après (24) nous avons, après des transformations évidentes,

$$(29)\qquad \begin{cases} \psi_{n+1}-\psi_n \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D G\,[v_n(w_n-w_{n-1})+w_{n-1}(v_n-v_{n-1})-u_n(z_n-z_{n-1})-z_{n-1}(u_n-u_{n-1})]\,d\xi\,d\eta, \\ u_{n+1}-u_n \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \frac{\partial G}{\partial x}[v_n(w_n-w_{n-1})+w_{n-1}(v_n-v_{n-1})-u_n(z_n-z_{n-1})-z_{n-1}(u_n-u_{n-1})]\,d\xi\,d\eta, \\ v_{n+1}-v_n \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \frac{\partial G}{\partial y}[v_n(w_n-w_{n-1})+w_{n-1}(v_n-v_{n-1})-u_n(z_n-z_{n-1})-z_{n-1}(u_n-u_{n-1})]\,d\xi\,d\eta, \\ w_{n+1}-w_n \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \frac{\partial \Delta G}{\partial x}[v_n(w_n-w_{n-1})+w_{n-1}(v_n-v_{n-1})-u_n(z_n-z_{n-1})-z_{n-1}(u_n-u_{n-1})]\,d\xi\,d\eta, \\ z_{n+1}-z_n \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi\nu}\displaystyle\iint_D \frac{\partial \Delta G}{\partial y}[v_n(w_n-w_{n-1})+w_{n-1}(v_n-v_{n-1})-u_n(z_n-z_{n-1})-z_{n-1}(u_n-u_{n-1})]\,d\xi\,d\eta. \end{cases}$$



D'après les conditions (25) et l'inégalité (16), il en résulte

$$(30)\qquad \begin{cases} |\psi_{n+1}-\psi_n| < \dfrac{d^2Rk}{8\gamma}\sup[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|], \\ |u_{n+1}-u_n| < \dfrac{d^2Rk}{8\gamma}\sup[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|], \\ |v_{n+1}-v_n| < \dfrac{d^2Rk}{8\gamma}\sup[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|], \\ |w_{n+1}-w_n| < \dfrac{Rcd^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}\sup[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|], \\ |z_{n+1}-z_n| < \dfrac{Rcd^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}\sup[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|]. \end{cases}$$

En posant

$$\delta_n = \max[|u_n-u_{n-1}|+|v_n-v_{n-1}|+|w_n-w_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|]$$

nous obtenons d'après (30)

$$(31)\qquad \begin{gathered} |\psi_{n+1}-\psi_n| < \frac{d^2Rk}{8\nu}\delta_n, \qquad |u_{n+1}-u_n| < \frac{d^2Rk}{8\nu}\delta_n, \\ |v_{n+1}-v_n| < \frac{d^2Rk}{8\nu}\delta_n, \qquad |w_{n+1}-w_n| < \frac{Rcd^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}\delta_n, \\ |z_{n+1}-z_n| < \frac{Rca^{2-\alpha}}{4\nu(2-\alpha)}\delta_n. \end{gathered}$$

Il en résulte que les suites des approximations successives sont convergentes si

$$(32)\qquad \frac{R}{\nu}\left(\frac{3kd^2}{8}+\frac{d^{2-\alpha}c}{2(2-\alpha)}\right) < 1.$$

Les fonctions limites

$$(33)\qquad \begin{gathered} \psi(x,y) = \lim\psi_n(x,y), \qquad u(x,y) = \lim u_n(x,y), \\ v(x,y) = \lim v_n(x,y), \qquad w(x,y) = \lim w_n(x,y), \\ z(x,y) = \lim z_n(x,y) \end{gathered}$$

donnent la solution du système (22) sous les conditions (32) et (28). Les fonctions (33) donnent de même la solution du système (21), puisque nous obtenons par un calcul simple

$$(34)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = u(x,y), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = v(x,y), \qquad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = w(x,y), \qquad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = z(x,y).$$

La preuve que la solution précédente du système (22) et (21) est unique sera la même que dans la méthode des approximations successives en général.

Le système (21) résulte de l'équation (7) avec les conditions limites (8) et (9), et la solution $\psi$ de l'équation (7) satisfait au système (21) — mais le fait inverse, à savoir que cette fonction est la solution demandée de l'équation (7), n'est pas évident. Pour obtenir ce résultat nous allons démontrer que les dérivées partielles $\partial\Delta\psi/\partial x$ et $\partial\Delta\psi/\partial y$ satisfont à la condition de Hölder par rapport à $x$ et $y$.

Théorème auxiliaire. *Si la fonction $\Phi(A)$ est continue et bornée dans le domaine $D$, alors l'intégrale*

$$I(A) = \iint_D \frac{x-\xi}{r_{AB}^2}\Phi(B)\,d\sigma_B \tag{35}$$

*satisfait par rapport au point $A(x,y)$ à la condition de Hölder de la forme*

$$|I(A)-I(A_1)| < \mathrm{const}\, M_\Phi r_{AA_1}^{1-\varepsilon} \tag{36}$$

*$M_\Phi$ désignant la borne supérieure de la fonction $|\Phi|$ et $\varepsilon$ étant une constante positive arbitrairement inférieure à l'unité.*

Nous allons démontrer ce théorème en suivant la méthode appliquée par W. Pogorzelski (loc. cit.) à l'intégrale

$$I(A) = \iiint_\Omega \frac{x-\xi}{r_{AB}^3}\Phi(B)\,d\tau_B.$$

Considérons donc dans le domaine $D+C$ les deux points $A$ et $A_1$ et le cercle $K$ de rayon $2AA_1$ de centre $A$. Nous écrivons

$$I(A) = I^{K'}(A)+I^{D-K'}(A), \qquad I(A_1) = I^{K'}(A_1)+I^{D-K'}(A_1) \tag{37}$$

où $I^{K'}$ est la partie de l'intégrale $I$ étendue au domaine $K'$, commun aux domaines $(D, K)$ et $I^{D-K'}$ la partie de l'intégrale $I$ étendue au domaine extérieur $D-K'$. Nous avons évidemment la limitation suivante

$$|I^{K'}(A)| \leqslant M_\Phi \iint_{K'} \frac{d\sigma_B}{r_{AB}} \leqslant 2\pi M_\Phi \int_0^{2r_{AA'}} dr = 4\pi M_\Phi r_{AA_1} \tag{39}$$

et de même

$$|I^{K'}(A_1)| \leqslant 2\pi M_\Phi \int_0^{3r_{AA_1}/2} dr = 3\pi M_\Phi r_{AA_1}. \tag{40}$$



Étudions maintenant la différence

$$|I^{D-K'}(A)-I^{D-K'}(A_1)| = \left|\iint_{D-K'}\left[\frac{x-\xi}{r_{AB}^2}-\frac{x_1-\xi}{r_{A_1B}^2}\right]\Phi(B)\,d\sigma_B\right| \tag{41}$$

$$\leqslant \left|\iint_{D-K'}\frac{(x-\xi)-(x_1-\xi)}{r_{AB}^2}\Phi(B)\,d\sigma_B\right| + \iint_{D-K'}\left|\frac{1}{r_{AB}^2}-\frac{1}{r_{A_1B}^2}\right|\cdot|x_1-\xi|\Phi(B)\,d\sigma_B.$$

Remarquons que le premier terme $I_1$ de cette somme vérifie l'inégalité

$$I_1 = \left|\iint_{D-K'}\frac{(x-\xi)-(x_1-\xi)}{r_{AB}^2}\Phi(B)\,d\sigma_B\right| < r_{AA_1}M_\Phi\iint_{D-K'}\frac{d\sigma_B}{r_{AB}^2}$$

$$< r_{AA_1}M_\Phi\int_{2r_{AA_1}}^{d}\frac{r\,dr}{r^2} < M_\Phi r_{AA_1}\log\frac{d}{2r_{AA_1}} < M_\Phi r_{AA_1}^{1-\varepsilon}\left(r_{AA_1}^{\varepsilon}\log\frac{d}{2r_{AA_1}}\right)$$

$d$ désignant le diamètre du domaine $D$. Il en résulte

$$I_1 < \mathrm{const}\, M_\Phi r_{AA_1}^{1-\varepsilon}. \tag{42}$$

Ensuite, pour le second terme $I_2$ de la somme (41), en aura

$$I_2 = \iint_{D-K'}\left|\frac{1}{r_{AB}^2}-\frac{1}{r_{A_1B}^2}\right||x_1-\xi|\Phi(B)\,d\sigma_B \tag{43}$$

$$\leqslant M_\Phi\iint_{D-K'}\frac{|r_{AB}^2-r_{A_1B}^2|}{r_{AB}^2 r_{A_1B}}d\sigma_B \leqslant M_\Phi r_{AA_1}\iint_{D-K'}\frac{r_{AB}+r_{A_1B}}{r_{AB}^2\, r_{A_1B}}d\sigma_B$$

puisque $|r_{AB}-r_{A_1B}| \leqslant r_{AA_1}$.

D'après la propriété évidente

$$r_{AB}/r_{A_1B} \leqslant 2 \tag{44}$$

nous aurons

$$I_2 \leqslant M_\Phi r_{AA_1}\cdot 3\iint_{D-K'}\frac{d\sigma_B}{r_{AB}^2} < \mathrm{const}\, M_\Phi r_{AA_1}^{1-\varepsilon} \tag{45}$$

Enfin, de (45), (42), (40) nous pouvons déduire que l'inégalité (36) est vraie dans le domaine $D+C$.

Le théorème précédent permet de conclure que les dérivées $\partial\Delta\psi/\partial x$ et $\partial\Delta\psi/\partial y$ satisfont à la condition de Hölder par rapport à $x$ et $y$ dans un voisinage suffisamment petit du point $A$. En effet la partie principale de ces dérivées a la même singularité que l'intégrale (35) — la partie régulière a des dérivées partielles, donc elle satisfait à la condition de Lipschitz. Cette propriété des fonctions $\partial\Delta\psi/\partial x$ et $\partial\Delta\psi/\partial y$ permet de montrer que la fonction $\Delta\psi$ satisfait à l'équation de Poisson citée à la p. **101** et que la solution du système (21) satisfait à l'équation proposée (7) avec les conditions limites (8) et (9).

**IV. Remarques.** Dans le cas où les forces extérieures $\boldsymbol{F}$ dans les équations (1) sont conservatives l'expression $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \varphi = 0$ et l'équation (7) a la forme

$$\nu\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}. \tag{46}$$

Les conditions limites (8) et (9) pour l'équation (46) ne peuvent donner que la solution $\psi = 0$ à l'intérieur du domaine $D$. Dans ce cas nous pouvons proposer le problème aux limites suivant:

$$\psi(A) \to f_1(P) \quad \text{si} \quad A \to P\epsilon C, \tag{47}$$

$$\frac{d\psi(A)}{dn_p} \to f_2(P) \quad \text{si} \quad A \to P\epsilon C \tag{48}$$

ce qui se rapporte au cas d'un liquide englobé dans un autre, dont la vitesse au bord est donnée. Dans ce cas nous devrons chercher la solution sous la forme

$$\psi(A) = \frac{1}{8\pi\nu}\iint\limits_D G(A,B)\Phi^*(B)\,d\sigma_B + \frac{1}{8\pi\nu}\int\limits_C \left[f_1(P)\frac{d\Delta G}{dn} - f_2(P)\Delta G\right]dl_P$$

où

$$\Phi^*(A) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}$$

et appliquer la méthode de notre travail.

Par une méthode pareille nous pouvons résoudre le problème plus général de l'équation (7) avec les conditions limites (47) et (48).

### Travaux cités


[1] G. Hamel, *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahr. d. Deutschen Math. Ver. 25 (1916), p. 34-60.

[2] Lauricella, *Sulla integrazione dell'equazione* $\Delta^4 = 0$, Rend. d. R. Acc. d. Lincei 16 Sem. 373 (1907), p. 373-383.

[3] T. Leray, *Études de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, Journal de Math. pures et appliquées 9 (1933), p. 1-82.

[4] F. Odquist, *Über Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*, Math. Zeit. 32 (1930), p. 329-375.





[5] C. W. Oseen, *Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen*, Arkiv f. Math. 20 (1) (1927), p. 1-24.

[6] W. Pogorzelski, *Propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques*, Ann. Pol. Math. 3 (1) (1956), p. 46-75.

[7] Riemann-Weber, *Differentialgleichungen der Physik*, Braunschweig 1925.

[8] A. Rosenblatt, *Sur l'équation biharmonique non linéaire à deux variables indépendantes dans un domaine général*, Comptes rendus 198 (1934), p. 1110-1112.

[9] — *Solution exacte des équations du mouvement des liquides visqueux*, Mém. d. Sc. Math. 72 (1935), p. 1-66.

[10] J. Wolska, *Sur une solution de l'équation du mouvement permanent du fluide visqueux*, Ann. Pol. Math. 3 (1) (1956), p. 13-18.


*Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1956*