

(où  $a^{\alpha\beta}$  sont des constantes) étendue à la sphère  $K$  de rayon unité et de centre à l'origine des coordonnées rectangulaires  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . On démontre (voir notre travail [3]) la propriété limite suivante de l'intégrale (a):

$$(\beta) \quad \lim_{t \rightarrow 0} I(t) = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}|}}.$$

Calculons la limite de l'intégrale (a) d'une autre façon, en écrivant

$$I(t) = \int_0^1 t^{-n/2} \left[ \int_A \exp \left[ -\frac{\varrho^2}{4t} \sum_{\alpha, \beta=1}^n a^{\alpha\beta} \xi'_\alpha \xi'_\beta \right] d\omega \right] \varrho^{n-1} d\varrho$$

où  $\xi'_\alpha = \varrho \xi_\alpha$  sont les coordonnées des points de la surface  $A$  de la sphère  $K$ . Nous aurons

$$I(t) = 2^{n-1} \int_A \int_0^{\varrho \sqrt{4t}} \vartheta^{-n/2} \left[ \int_0^{\vartheta \sqrt{4t}} q^{n/2-1} e^{-q^2} dq \right] d\omega(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$$

en posant  $\vartheta = \sum_{\alpha, \beta=1}^n a^{\alpha\beta} \xi'_\alpha \xi'_\beta$ . Il résulte

$$(\gamma) \quad \lim_{t \rightarrow 0} I(t) = 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_A \vartheta^{-n/2} d\omega.$$

Nous en déduisons, par comparaison avec la valeur (β), l'égalité

$$(\delta) \quad \int_A \left[ \sum_{\alpha, \beta=1}^n a^{\alpha\beta} \xi'_\alpha \xi'_\beta \right]^{-n/2} d\omega(\xi'_1, \dots, \xi'_n) = \frac{\omega_n}{\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}|}}.$$

#### Travaux cités

[1] G. Giraud, *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique*, C. R. 195, Paris 1932, p. 98-100.

[2] F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Mathematical Journal 13, Durham, U. S. A. 1946, p. 61-70.

[3] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5, Napoli 1956.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
 INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1956

## Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné

par M. KRZYŻAŃSKI (Kraków)

1. Dans la présente note je vais établir certaines évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1) \quad \mathcal{F}[u] \equiv \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(X, t) u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^m b_k(X, t) u'_{x_k} + c(X, t) u - u'_t = f(X, t),$$

en appliquant les résultats de mes recherches antérieures relatives aux solutions de l'équation (1) déterminées dans un domaine non borné (voir [5] et [6]). Ces évaluations constituent un perfectionnement de celles que j'ai effectuées dans les travaux cités<sup>(1)</sup>.

Soit  $X(x_1, x_2, \dots, x_m)$  un point variable de l'espace  $\mathcal{E}_m$  à  $m$  dimensions et  $t$  le temps. Nous désignons par  $(X, t)$  ou  $P(X, t)$  le point  $P(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$  de l'espace-temps  $\mathcal{E}_{m+1}$  à  $m+1$  dimensions. Ceci étant convenu, soit  $D$  un domaine non borné de l'espace  $\mathcal{E}_{m+1}$ , situé dans le demi-espace  $t \geq 0$  et dont la frontière  $FD$  se compose des domaines non bornés  $S_0$  et  $S_T$  à  $m$  dimensions des hyperplans  $t = 0$  et  $t = T$ , et d'une surface  $\sigma$  qui n'est tangente à aucune caractéristique  $t = \text{const}$  de (1). Aux points de  $S_0$  la normale intérieure à  $FD$  a la direction de l'axe des  $t$ ; elle a la direction opposée aux points de  $S_T$ . Désignons par  $\Sigma$  l'ensemble  $S_0 + \sigma$ .

Nous supposons que les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_k$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ ) sont continus et bornés dans le domaine  $D$ . La forme  $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(X, t) \lambda_i \lambda_j$  y est supposée définie positive, le coefficient  $c(X, t)$  borné supérieurement et la fonction  $f(X, t)$  continue.

<sup>(1)</sup> Pour les autres méthodes d'évaluation des solutions des équations paraboliques du second ordre et des ordres supérieurs voir [1], [9], [10].

2. Rappelons certaines notions concernant la croissance d'une fonction à l'infini. Nous disons que la fonction  $F(X, t)$  est de classe  $E_a(K)$  dans le domaine  $D$  s'il existe un nombre positif  $M$  tel que

$$|F(X, t)| \leq M e^{K r^a} \quad \text{pour } (X, t) \in D,$$

où l'on a posé  $r = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$ .

Nous disons que  $F(X, t)$  est de classe  $E_a$  s'il existe un nombre  $K > 0$  tel que  $F(X, t)$  soit de classe  $E_a(K)$ .

On a le théorème suivant:

THÉORÈME I. La seule solution de l'équation homogène

$$(2) \quad \mathcal{F}[u] = 0,$$

régulière<sup>(2)</sup> et de classe  $E_2$  dans la fermeture  $\bar{D}$  du domaine  $D$ , s'annulant sur  $\Sigma$ , est  $u(X, t) \equiv 0$ .

Pour la démonstration on reprend le procédé appliqué dans la démonstration du théorème I de [5]; ceci permet de démontrer que  $u(X, t)$  s'annule dans la partie  $\bar{D}^h$  de  $\bar{D}$  située dans une couche  $0 \leq t \leq h$ , où  $h$  est un nombre défini dans [5]. On démontre ensuite de proche en proche que  $u(X, t)$  s'annule dans les parties de  $\bar{D}$  situées dans les couches

$$p h \leq t \leq (p+1)h \quad (p = 1, 2, \dots).$$

On déduit du théorème I l'unicité dans la classe  $E_2$  de la solution de l'équation (1) régulière dans  $\bar{D}$  et prenant des valeurs données sur  $\Sigma$ <sup>(3)</sup>.

Soit  $\Gamma_R$  la surface cylindrique  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = R^2$  et  $D_R$  l'ensemble ouvert séparé de  $D$  par la surface  $\Gamma_R$ . Désignons par  $S_R^{(0)}$ ,  $S_R^T$  et  $\sigma_R$  les parties des surfaces  $S_0$ ,  $S_T$  et  $\sigma$  situées à l'intérieur de  $\Gamma_R$  et sur  $\Gamma_R$ , et par  $C_R$  la partie de  $\Gamma_R$  située dans  $D$ . Soit  $\Sigma_R = S_R^{(0)} + \sigma_R$ ,  $\Omega_R = \Sigma_R + C_R$ . Soit  $R_0$  un nombre positif, tel que les ensembles  $S_R^{(0)}$  et  $S_R^T$  ne soient pas vides pour  $R > R_0$ ,  $D_R$  étant la somme de domaines de hauteur  $T$ .

Le théorème qui va suivre est analogue à celui de la note [6].

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire admettant des dérivées du second ordre continues dans  $D$  et continue elle-même dans  $\bar{D}$ .

<sup>(3)</sup> L'unicité dans la classe  $E_2$  de la solution de l'équation de la chaleur  $u_{xx}'' = u_t'$ , déterminée par les conditions initiales, a été démontrée par A. Tychonoff [12]. E. Holmgren [4] a démontré antérieurement l'unicité de la solution du même problème dans la classe de fonctions satisfaisant aux inégalités de la forme

$$|u(x, t)| \leq M \exp [K x^2 \log |x|],$$

mais en supposant que cette solution admet la dérivée  $u_t'$  continue pour  $t \geq 0$ , tandis que Tychonoff n'avait supposé que la régularité de la solution elle-même. La condition nécessaire et suffisante pour l'unicité d'une solution régulière de ce problème a été donnée par S. Täcklind [11].

THÉORÈME II. Supposons que 1° la fonction  $f(X, t)$  soit de classe  $E_2$  dans le domaine  $D$ ; 2° étant donnée une fonction  $\Phi(X, t)$  continue dans la fermeture  $\bar{D}$  du domaine  $D$ , et  $R$  étant un nombre positif supérieur à  $R_0$ , il existe une solution de (1) régulière dans  $\bar{D}_R$  et identique à  $\Phi(X, t)$  sur  $\Omega_R$ .

Ceci supposé, soit  $\Phi_0(X, t)$  une fonction continue et de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}$ ,  $\{R_n\}$  une suite croissante de nombres positifs tendant vers l'infini et  $\{u_n(X, t)\}$  une suite de solutions de (1) régulières dans les ensembles  $\bar{D}_{R_n}$  et identiques à  $\Phi_0(X, t)$  sur  $\Omega_{R_n}$ .

Dans la partie  $\bar{D}^h$  de la fermeture  $\bar{D}$  du domaine  $D$  située dans une couche  $0 \leq t \leq h$ , dont la hauteur  $h$  dépend des bornes supérieures des coefficients de l'équation (1) et des fonctions  $f(X, t)$  et  $\Phi_0(X, t)$  (voir [5]), la suite  $\{u_n(X, t)\}$  converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers une fonction  $u(X, t)$ , constituant une solution de (1), régulière et de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}^h$  et identique à  $\Phi_0(X, t)$  sur  $\Sigma \cdot \bar{D}^h$ .

Pour démontrer ce théorème il suffit de reprendre la démonstration du théorème III du travail [5].

3. Passons aux évaluations que nous avons à établir dans la présente note. Nous admettons l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE (A). Le nombre  $R > R_0$  étant choisi d'une manière arbitraire, soit  $\varphi_R(X, t)$  une fonction continue sur  $\Omega_R$ . L'équation homogène (2) admet une solution  $u(X, t)$ , régulière dans la fermeture  $\bar{D}_R$  de  $D_R$  et se réduisant à  $\varphi_R(X, t)$  sur  $\Omega_R$ <sup>(4)</sup>.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME III. Supposons que l'on ait  $c(X, t) \leq 0$  et  $f(X, t) \geq 0$  (ou  $f(X, t) \leq 0$ ) dans  $D$ , la fonction  $f(X, t)$  y étant de classe  $E_2$ . L'hypothèse (A) est supposée vérifiée. Soit  $u(X, t)$  une solution de l'équation (1), régulière et de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}$ . Si l'on a  $u(X, t) \leq M$  (resp.  $u(X, t) \geq -M$ ) sur  $\Sigma$ ,  $M$  étant un nombre positif, cette inégalité subsiste partout dans  $\bar{D}$ .

Démonstration. Il existe une fonction  $\Phi_0(X, t)$ , continue et de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}$  et telle que  $\Phi_0(X, t) = u(X, t)$  sur  $\Sigma$  et  $\Phi_0(X, t) \leq M$  dans  $\bar{D}$  (voir [7], p. 98-99). Choisissons un nombre  $R > R_0$ . D'après l'hypothèse (A) il existe une solution  $u_0(X, t)$  de l'équation (2) régulière dans  $\bar{D}_R$  et telle que l'on ait  $u_0(X, t) = \Phi_0(X, t) - u(X, t)$  sur  $\Omega_R$ . La fonction  $\bar{u}(X, t) = u_0(X, t) + u(X, t)$  constitue une solution de (1), telle que

$$\bar{u}(X, t) = \Phi_0(X, t) \leq M \quad \text{sur } \Omega_R.$$

<sup>(4)</sup> Pour ce qui concerne les conditions suffisantes pour que cette hypothèse soit vérifiée voir [3].

Comme on a  $c(X, t) \leq 0$  et  $f(X, t) \geq 0$  dans  $D$ , il résulte des théorèmes sur les extrema des solutions des équations paraboliques (voir [2], p. 372 et [8], p. 273) que  $\bar{u}(X, t) \leq M$  dans  $D_R$ .

Soit  $\{P_n\}$  une suite de nombres positifs, supérieurs à  $R_0$  et tendant vers l'infini pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $\{\bar{u}_n(X, t)\}$  la suite de solutions de (1), se réduisant à  $\Phi_0(X, t)$  sur  $\Omega_{R_n}$ . Soit  $\bar{D}^h$  la partie de la fermeture  $\bar{D}$  du domaine  $D$ , située dans la couche  $0 \leq t \leq h$  (voir théorème II). Il résulte des théorèmes I et II que l'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n(X, t) = u(X, t)$  dans  $\bar{D}^h$ . Comme  $\bar{u}_n(X, t) \leq M$  dans  $\bar{D}_{R_n}$ , on a  $u(X, t) \leq M$  dans  $\bar{D}^h$ .

On démontre ensuite de proche en proche que l'inégalité  $u(X, t) \leq M$  subsiste dans les parties de  $\bar{D}$  situées dans les couches  $ph \leq t \leq (p+1)h$  ( $p = 1, 2, \dots$ ). On a donc  $u(X, t) \leq M$  partout dans  $\bar{D}$ .

**COROLLAIRE 1.** *Supposons que l'on ait  $|f(X, t)| \leq M_0$  dans  $D$  et que l'hypothèse (A) soit vérifiée. Soit  $u(X, t)$  une solution de (1) régulière, de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}$  et telle que  $|u(X, t)| \leq M$  sur  $\Sigma$ . On a*

$$|u(X, t)| \leq (M + M_0 t) e^{Ct} \quad \text{pour } (X, t) \in D,$$

$C$  étant la borne supérieure de  $c(X, t)$  dans  $D$  (voir n° 1).

Pour la démonstration on pose

$$v_k(X, t) = u(X, t) e^{-Ct} + (-1)^k M_0 t \quad (k = 1, 2)$$

et on applique le théorème III aux fonctions  $v_k(X, t)$ .

**COROLLAIRE 2.** *Supposons que la fonction  $f(X, t)$  soit de classe  $E_1$  dans  $D$ , c'est-à-dire*

$$|f(X, t)| \leq M_0 e^{Kt}$$

(voir n° 2),  $M_0$  et  $K$  étant deux nombres constants non négatifs. L'hypothèse (A) reste valable. Soit  $u(X, t)$  une solution de (1) régulière et de classe  $E_2$  dans  $\bar{D}$ , satisfaisant à la condition  $|u(X, t)| \leq M e^{Kt}$  aux points de  $\Sigma$ . On a

$$|u(X, t)| \leq (M + M_0 t) \exp[Kt + \nu(K)t],$$

où l'on a posé

$$\rho = \left( \sum_{j=1}^m a_j^2 + 1 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \nu(K) = K^2 \mathfrak{A} + K m(A + B) + C,$$

avec

$$A = \max_{i, j < m} \sup_D |a_{ij}(X, t)|, \quad B = \max_{k < m} \sup_D |b_k(X, t)|, \quad C = \sup_D c(X, t),$$

$\mathfrak{A}$  étant le plus petit nombre positif tel que l'on ait

$$\sum_{i, j=1}^m a_{ij}(X, t) \lambda_i \lambda_j \leq \mathfrak{A} \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$$

pour  $(X, t) \in D$  et pour tout système de nombres réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

Pour la démonstration du corollaire 2 on fait un changement de la fonction inconnue en posant  $u(X, t) = v(X, t) \exp(Kt + \nu t)$  et on applique le corollaire 1.

**Remarque.** Si la fonction  $f(X, t)$  et la fonction à laquelle se réduit l'inconnue sur  $\Sigma$  sont de classe  $E_2$ , c'est-à-dire si l'on a  $|f(X, t)| \leq M_0 e^{Kt}$  dans  $D$  et  $|u(X, t)| \leq M e^{Kt}$  sur  $\Sigma$  et si l'hypothèse (A) est vérifiée, on établit la limitation

$$|u(X, t)| \leq [M_0 h(K) + M] \exp \left[ \frac{Kt^2}{1 - 4\mu(K)t} + \nu(K)t \right]$$

pour  $(X, t) \in D$ ,  $0 \leq t \leq h(K)$ , les nombres  $\mu(K)$ ,  $\nu(K)$  et  $h(K)$  étant les mêmes que dans [5].

#### Travaux cités

[1] S. D. Ejdelman, *Théorèmes du type du théorème de Liouville pour les systèmes paraboliques et elliptiques* (en russe: С. Д. Эйдельман, Теоремы типа Лиувилля для параболических и эллиптических систем), Доклады Академии Наук СССР 99 (1954) N5, p. 681-684.

[2] M. Gevrey, *Sur l'équation aux dérivées partielles du type parabolique*, Journal de Math. pures et appl., ser. VI, vol. 9 (1913), p. 305-471.

[3] — *Systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences 195 (1932), p. 690-692.

[4] — E. Holmgren, *Sur les solutions quasi-analytiques de l'équation de la chaleur*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 18 (1924), p. 1-5.

[5] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique, déterminées par les conditions initiales*, Ann. Soc. Polon. Math. 18 (1945), p. 145-156.

[6] — — *Note complémentaire*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), p. 7-9.

[7] — *Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence*, Studia Math. 11 (1949), p. 95-125.

[8] I. Pietrowski, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Warszawa 1955 (traduction polonaise de l'original russe).

[9] L. N. Slobodeckij, *Théorie du potentiel pour les équations paraboliques* (en russe: Л. Н. Слободецкий, Теория потенциала для параболических уравнений) Доклады Академии Наук СССР 103 (1955) N1, p. 19-22.

[10] — *Les solutions généralisées des systèmes paraboliques et elliptiques des équations différentielles* (en russe: Л. Н. Слободецкий, Обобщенные решения параболических и эллиптических систем дифференциальных уравнений), Доклады Академии Наук СССР 101 (1955) N6, p. 997-1000.

[11] S. Täcklind, *Sur les classes quasi-analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Nova Acta Regiae Soc. Sc. Upsaliensis, Ser. IV, vol. 10 (3) (1936).

[12] A. N. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Recueil Math. de Moscou 42 (1935), p. 199-215.

Reçu par la Rédaction le 13. 6. 1956