Travaux cités

[1] P. Hartman and A. Wintner, *On hyperbolic partial differential equations*, American Journal of Mathematics 74 (4) (1952), p. 834-864.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[3] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

[4] Z. Szmydt, *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III. Vol. 4 (2) (1956), p. 67-72.

Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1956

Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1)\qquad \hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}(A,t)$, $b_\alpha(A,t)$, $c(A,t)$ sont des fonctions déterminées dans la région fermée

$$(2)\qquad A(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega+S,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

Ω étant un domaine borné dans l'espace euclidien à n ($n\geqslant 2$) dimensions, limité par la surface fermée S. On suppose que la forme quadratique

$$(3)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)X_\alpha X_\beta$$

est *définie positive* dans la région (2).

La première idée de la recherche de la solution fondamentale de l'équation (1) est due à G. Giraud [1]. Ensuite F. Dressel [2] a étudié d'une façon complète la solution fondamentale de l'équation (1), mais sous l'hypothèse restrictive que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ soient des fonctions admettant des dérivées secondes. Récemment W. Pogorzelski [3], l'auteur de cet article, a étudié la solution fondamentale de l'équation (1) sous l'hypothèse plus générale suivante:

1. *Les coefficients* $a_{\alpha\beta}(A,t)$ *vérifient dans la région* (2) *la condition de Hölder*

$$(4)\qquad |a_{\alpha\beta}(A,t)-a_{\alpha\beta}(A_1,t_1)| < k(r_{AA_1}^{h}+|t-t_1|^{h'})$$

k étant une constante positive et h, h' deux constantes positives qui ne sont pas supérieures à l'unité, r_{AA_1} désignant la distance des points A, A_1.

2. *Les coefficients $b_\alpha(A,t)$, $c(A,t)$ sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables $(x_1,\dots,x_n,t)$ dans la région (2) et elles vérifient par rapport aux variables spatiales la condition de Hölder*

$$(5)\qquad |b_\alpha(A,t)-b_\alpha(A_1,t)|<k'r_{AA_1}^h,\qquad |c(A,t)-c(A_1,t)|<k''r_{AA_1}^h$$

k', k'' étant des constantes positives.

Par analogie avec l'équation elliptique et conformément à l'idée de G. Giraud, l'auteur obtient la solution fondamentale de l'équation (1) sous la forme [1]

$$(6)\qquad \Gamma(A,t;B,\tau)=w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)+\int_\tau^t\iiint_{\Omega'(M)}w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta.$$

La fonction $u^{M,\tau}$ est déterminée par la formule

$$(7)\qquad u^{M,\tau}(A,t;B,\tau)=(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right].$$

où l'on a posé

$$(8)\qquad \vartheta^{M,\tau}(A,B)=\sum_{\alpha,\beta=1}^n a^{\alpha\beta}(M,\tau)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)$$

$a^{\alpha\beta}(M,\tau)$ désignant les éléments de la matrice *inverse* de la matrice $\|a_{\alpha\beta}(M,\tau)\|$, Ω' désigne un domaine arbitraire mesurable, contenant l'ensemble $\Omega+S$ dans son intérieur, et les coefficients $a_{\alpha\beta}$, b_α, c sont prolongés au domaine Ω' d'une façon arbitraire, mais sous la condition de satisfaire aux inégalités (4), (5) et de conserver la propriété de la forme quadratique (3).

La fonction (7) est déterminée et continue pour tout couple de points $A(x_1,\dots,x_n)$ et $B(\xi_1,\dots,\xi_n)$ du domaine Ω' et pour tout couple (τ,t) dans l'intervalle $\langle 0,T\rangle$, si $\tau<t$. On a désigné par M le point arbitrairement fixé dans le domaine Ω'.

D'après l'hypothèse sur la forme quadratique (3), il existe deux constantes positives g et G, telles que la fonction (8) vérifie les inégalités

$$(9)\qquad gr_{AB}^2<\vartheta^{M,\tau}(A,B)<Gr_{AB}^2$$

dans la région considérée. Si les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont constants, la fonction (7) est une solution, dite fondamentale, de l'équation

$$(10)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

(1) dM désigne l'élément de volume au point M.

Si les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont variables, la fonction (7) ne vérifie pas, en général, l'équation (10) — elle sera dite *quasi-solution* de cette équation.

La fonction Φ dans l'expression (6) est une solution de l'équation de Volterra singulière

$$(11)\qquad \Phi(A,t;B,\tau)=f(A,t;B,\tau)+\lambda\int_\tau^t\iiint_{\Omega'(M)}N(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta$$

où le noyau N et la fonction f sont donnés par les formules

$$(12)\qquad \begin{aligned}N(A,t;M,\zeta)&=\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}\,\hat{\Psi}_{A,t}[w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)],\\ f(A,t;B,\tau)&=\lambda N(A,t;B,\tau),\qquad \lambda=(2\sqrt{\pi})^{-n}\end{aligned}$$

nous rappelons que l'opérateur différentiel $\hat{\Psi}$ est défini par la formule (1). Nous avons montré dans le travail [3], en admettant l'hypothèse (4), que le noyau (12) de l'équation intégrale (11) vérifie l'inégalité à singularités séparées

$$(13)\qquad |N(A,t;M,\zeta)|<\frac{C}{(t-\zeta)^{\mu_1}}\cdot\frac{1}{r_{AM}^{n+2-2\mu_1-h_1}}$$

où h_1 désigne le plus petit des deux nombres h, $2h'$ et μ_1 est choisi à l'intérieur de l'intervalle $(1-h_1/2,1)$, C est une constante positive. Dans la limitation (13) les singularités sont faibles relativement à l'intégrale simple et à l'intégrale de volume, puisque $n+2-2\mu_1-h_1<n$.

La solution unique de l'équation (11) aura la forme

$$(14)\qquad \Phi(A,t;B,\tau)=f(A,t;B,\tau)+\lambda\int_\tau^t\iiint_{\Omega'(M)}\mathfrak{N}(A,t;M,\zeta)f(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta$$

où le noyau résolvant du noyau N est la somme d'une série

$$(15)\qquad \mathfrak{N}(A,t;M,\zeta)=N(A,t;M,\zeta)+\sum_{\nu=1}^\infty\lambda^\nu N_\nu(A,t;M,\zeta).$$

Les noyaux itérés N_ν sont déterminés par la relation de récurrence

$$(16)\qquad N_{\nu+1}(A,t;M,\zeta)=\int_\zeta^t\iiint_{\Omega'(\Pi)}N(A,t;\Pi,\gamma)N(\Pi,\gamma;M,\zeta)\,d\Pi\,d\gamma$$

($N_0=N$). Chaque itération abaisse le degré des singularités de la limitation et, d'après l'inégalité (13), les noyaux itérés seront bornés à partir d'un indice ν_0 tout au plus égal à la plus grande des deux valeurs

$$(17)\qquad E\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right),\quad E\left(\frac{n}{h_1-2(1-\mu_1)}\right).$$

En s'appuyant sur la limitation (13), on trouve que tous les noyaux bornés vérifient l'inégalité

$$(18)\qquad |N_{\nu_0+m}(A,t;M,\zeta)| < \frac{g_1}{m(1-\mu_1)}\cdot\frac{[g_2\Gamma(1-\mu_1)(t-\zeta)^{1-\mu_1}]^m}{\Gamma[m(1-\mu_1)]},$$

g_1 et g_2 étant les bornes supérieures des fonctions

$$|N_{\nu_0}| \leqslant g_1,\qquad \iiint\limits_{\Omega'}\frac{CdM}{r_{AM}^{n+2-2\mu_1-h_1}} \leqslant g_2.$$

Le dénominateur $\Gamma[m(1-\mu_1)]$ dans la limitation (18) assure la convergence absolue et uniforme de la série (15) pour toute valeur λ et $t-\zeta$, abstraction faite de quelques termes non bornés.

La solution unique (14) de l'équation (11) est donc déterminée et continue en tout point $A\neq B$ du domaine Ω' et pour t dans l'intervalle (τ, T). Il est facile de montrer que le terme intégral dans la somme (14) admet une limitation à singularités plus faibles que (13), la solution Φ de l'équation (11) vérifie donc l'inégalité

$$(19)\qquad |\Phi(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_1}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu_1-h_1}}\qquad (A\neq B,\ \tau<t).$$

Écrivons la fonction (7) sous la forme d'un produit

$$(20)\qquad w^{M,\tau}(A,t;B,\tau)$$
$$=\left[\frac{\vartheta^{M,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right]^{n/2-\mu}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right]\frac{2^{n-2\mu}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{[\vartheta^{M,\tau}(A,B)]^{n/2-\mu}}$$

où μ est un nombre arbitrairement choisi à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$. En remarquant que le produit $q^{n/2-\mu}e^{-q}$ est borné dans l'intervalle $(0,\infty)$, notamment

$$q^{n/2-\mu}e^{-q} \leqslant \left(\frac{n}{2}-\mu\right)^{n/2-\mu}e^{-n/2+\mu}$$

et en utilisant l'inégalité (9), on voit que la fonction (20) vérifie l'inégalité

$$(21)\qquad |w^{M,\tau}(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}}$$

si $A\neq B$, $t>\tau$. Des inégalités (19) et (21), nous concluons que le second terme de la somme (6), que nous désignons par

$$(22)\qquad \overline{w}(A,t;B,\tau) = \int_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dB\,d\zeta,$$

vérifie l'inégalité

$$(23)\qquad |\overline{w}(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu+\mu_1-1}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2(\mu+\mu_1-1)-h_1}}.$$

Les singularités de cette limitation sont plus faibles que pour la fonction (21). La fonction $w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)$ est donc la *partie principale* de la solution fondamentale

$$(24)\qquad \Gamma(A,t;B,\tau) = w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)+\overline{w}(A,t;B,\tau)$$

de l'équation parabolique (1).

À l'aide de la solution fondamentale (24) on peut définir les solutions de l'équation parabolique (1), qu'on appelle potentiels généralisés relativement à l'équation (1) et qui sont analogues aux potentiels relatifs à l'équation du type elliptique. Ces potentiels permettent de résoudre les problèmes aux limites pour l'équation (1). Dans ce travail, nous démontrerons quelques propriétés des potentiels généralisés de simple couche, de charge spatiale et de l'intégrale de Poisson-Weierstrass généralisée.

2. Propriétés du potentiel généralisé de simple couche. Admettons que la surface fermée S, qui limite le domaine borné Ω, vérifie les conditions suivantes, dites conditions de Liapounoff:

1. Il existe un plan tangent en tout point de la surface S.

2. L'angle $\Delta(P,Q)$ entre les plans tangents en deux points quelconques P,Q de la surface S vérifie l'inégalité

$$(25)\qquad \Delta(P,Q) < Cr_{PQ}^{\varkappa}$$

où l'exposant constant $\varkappa$ satisfait à la condition $0<\varkappa\leqslant 1$ et C désigne une constante positive.

3. Il existe un nombre positif δ assez petit, tel que la sphère K de centre au point arbitraire P de la surface S et de rayon δ découpe sur cette surface une portion S_K, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection sur le plan tangent en P est un ensemble de points que cette

projection fait correspondre d'une façon biunivoque aux points de l'ensemble S_K.

Définition 1. On appelle *potentiel généralisé* de simple couche, relativement à l'équation parabolique (1), l'intégrale de surface suivante(²)

$$U(A,t)=\int_0^t\iint_S \Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau. \tag{26}$$

Si la fonction $\varphi(Q,\tau)$ — dite densité de la couche — est déterminée, bornée et intégrable dans la région fermée $[Q\in S,\ 0\leqslant\tau\leqslant T]$, la formule (26) détermine la fonction $U(A,t)$, qui vérifie l'équation parabolique (1), en tout point non situé sur la surface S.

On peut aussi définir la valeur de la fonction (26) en tout point P de la surface S, comme l'intégrale généralisée

$$U(P,t)=\lim_{t_1\to t}\int_0^{t_1}\iint_S \Gamma(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau \qquad (t_1<t). \tag{27}$$

L'existence de cette intégrale résulte immédiatement des inégalités (21) et (23), d'après lesquelles nous avons une limitation à singularités faibles

$$|\Gamma(A,t;Q,\tau)|<\frac{C'}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{AQ}^{n-2\mu}} \tag{28}$$

μ étant un nombre quelconque à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2},1)$, C' une constante positive.

La singularité de la limitation (28) étant faible, on peut démontrer par la méthode classique de la théorie du potentiel que le potentiel (26) tend vers la valeur (27), si le point A tend vers le point P de la surface S, t étant fixé.

D'après l'inégalité (28), le potentiel (26) admet la limitation

$$|U(A,t)|<\frac{C's_\mu}{1-\mu}\sup|\varphi|\,t^{1-\mu} \tag{29}$$

$\sup|\varphi|$ désignant la borne supérieure de la fonction $|\varphi|$ et s_μ — la borne supérieure positive de l'intégrale

$$\iint_S\frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-2\mu}}\leqslant s_\mu. \tag{30}$$

(²) Nous conservons le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface dans l'espace à n dimensions et celui d'intégrale triple pour l'intégrale de volume dans cet espace.

L'inégalité (29) nous apprend que le potentiel $U(A,t)$ tend uniformément vers zéro si $t\to 0$.

D'après les formules (6) et (14), il est facile de voir que la dérivée $\Gamma_{x_a}(A,t;Q,\tau)$ de la solution fondamentale par rapport aux coordonnées du point $A(x_1,\ldots,x_n)$ est une fonction uniformément continue de l'ensemble des variables $(A,t;Q,\tau)$ dans la région

$$A\in\Omega^*,\quad Q\in S,\quad 0<\tau<t\leqslant T,$$

où Ω^* est un domaine *fermé* arbitraire, situé à l'intérieur du domaine Ω. Il en résulte que le potentiel (26) admet des dérivées premières spatiales sous la forme d'une intégrale régulière

$$U_{x_a}(A,t)=\int_0^t\iint_S \Gamma_{x_a}(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau \tag{31}$$

en tout point non situé sur la surface S.

Écrivons le potentiel (26) sous la forme d'une somme

$$U(A,t)=U^{(1)}(A,t)+U^{(2)}(A,t) \tag{32}$$

en posant

$$U^{(1)}(A,t)=\int_0^t\iint_S w^{Q,\tau}(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau, \tag{33}$$

$$U^{(2)}(A,t)=\int_0^t\iint_S \overline{w}(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau. \tag{33'}$$

En utilisant le même procédé qui a donné l'inégalité (21), on trouve que les dérivées spatiales de la quasi-solution vérifient l'inégalité

$$|w_{x_a}^{B,\tau}(A,t;B,\tau)|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n+1-2\mu}} \tag{34}$$

donc, d'après la formule (22), les dérivées spatiales de la fonction $\overline{w}$ vérifient l'inégalité

$$|\overline{w}_{x_a}(A,t;B,\tau)|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu'}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n+1-2\mu'-h_1}} \tag{35}$$

μ' étant un nombre arbitraire à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}h_1,1)$.

Les singularités de la limitation (35) sont faibles relativement à l'intégrale de surface et à l'intégrale simple, puisque nous avons

$$n+1-2\mu'-h_1<n-1,\quad \text{si}\quad 1-\tfrac{1}{2}h_1<\mu'<1.$$

Il en résulte, par le raisonnement classique de la théorie du potentiel, que les dérivées spatiales de la fonction $U^{(2)}$ ont des valeurs limites bien déterminées

$$\lim_{A\to P} U^{(2)}_{x_a}(A,t) = \int_0^t \iint_S \overline{w}_{x_a}(P;t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)d\sigma_Q d\tau \tag{36}$$

si le point A tend vers le point P de la surface S, sous la seule supposition que la fonction $\varphi(Q,\tau)$ soit bornée et intégrable.

Les dérivées de la quasi-solution admettent une limitation (34) à singularité forte relativement à l'intégrale de surface, puisque $n+1-2\mu > n-1$ quel que soit μ dans l'intervalle $(0,1)$. Donc nous ne pouvons pas affirmer, même si la fonction $\varphi(Q,\tau)$ était continue, que les dérivées spatiales du premier terme de la somme (32) (et par conséquent aussi les dérivées du potentiel (26)) ont des valeurs limites, si le point intérieur A tend vers un point P de la surface S. Cependant une certaine combinaison linéaire de ces dérivées, dite dérivée transversale de la fonction $U(A,t)$ au point intérieur A relativement au point P de la surface S, donnée par la formule

$$\frac{dU(A,t)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\cos(N_P,x_\beta)\,U_{x_\alpha}(A,t), \tag{37}$$

a une limite déterminée, si $A\to P$; (N_P,x_β) désigne l'angle que fait la normale intérieure à la surface S au point P avec l'axe x_β. Nous avons notamment la propriété suivante:

Théorème 1. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est continue dans la région $Q\in S$, $0\leqslant\tau\leqslant T$, la dérivée transversale* (37) *du potentiel de simple couche au point intérieur A du domaine Ω tend uniformément vers la limite*

$$\lim_{A\to P}\frac{dU(A,t)}{dT_P} = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t) + \int_0^t\iint_S \frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P}\varphi(Q,\tau)d\sigma_Q d\tau \tag{38}$$

si le point A tend vers le point P de la surface S et $0<t\leqslant T$.

On admet que les coefficients $a_{\alpha\beta}$, b_α, c vérifient les conditions (4), (5) *et la surface S satisfait aux conditions de Liapounoff. D'accord avec la formule*

(37), *la dérivée transversale de la solution fondamentale au point P est donnée par l'égalité*

$$\frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P,t)\cos(N_P,x_\beta)\Gamma_{x_\alpha}(P,t;Q,\tau) \tag{39}$$

et présente des singularités faibles, si $Q\to P$, $\tau\to t$.

Démonstration. La démonstration exige une autre méthode que celle de la comparaison avec le potentiel de double couche, puisque ce potentiel n'existe pas dans le cas actuel.

Il suffit d'étudier la dérivée transversale du quasi-potentiel (33). Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT_P}[w^{Q,\tau}(A,t;Q,\tau)] &= -\frac{1}{2}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]\times\\ &\quad\times\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} a^{\alpha\gamma}(Q,\tau)a_{\alpha\beta}(A,t)(x_\gamma-\xi_\gamma)\cos(N_P,x_\beta)\\ &= -\frac{1}{2}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]r_{QA}\cos(N_P,\overline{QA}) -\\ &\quad-\frac{1}{2}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]\times\\ &\quad\times\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} a^{\alpha\gamma}(Q,\tau)[a_{\alpha\beta}(A,t)-a_{\alpha\beta}(Q,\tau)](x_\gamma-\xi_\gamma)\cos(N_P,x_\beta).\end{aligned} \tag{40}$$

En appliquant l'inégalité (4) de Hölder, que nous avons admise, nous voyons que le second membre de la dernière somme, que nous désignerons par $F(A,t;Q,\tau)$, vérifie l'inégalité

$$|F(A,t;Q,\tau)| < \frac{C_1}{(t-\tau)^{\mu_1}}\cdot\frac{1}{r_{AQ}^{n+1-2\mu_1-h}} + \frac{C_2}{(t-\tau)^{\mu_2-h'}}\cdot\frac{1}{r_{AQ}^{n+1-2\mu_2}} \tag{41}$$

μ_1 et μ_2 étant des constantes positives arbitraires, C_1 et C_2 — des constantes positives dépendant de μ_1 et μ_2. En choisissant μ_1 et μ_2 à l'intérieur des intervalles

$$1-\tfrac{1}{2}h<\mu_1<1,\qquad 1<\mu_2<1+h'$$

on voit que la fonction F vérifie l'inégalité à singularités *faibles*

$$|F(A,t;Q,\tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu^*}}\cdot\frac{1}{r_{AQ}^{n+1-2\mu^*-h_1}} \tag{42}$$

où $h_1=\inf(h,2h')$ et μ^* est choisi à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}h_1,1)$.

La dérivée transversale du quasi-potentiel $U^{(1)}$ aura pour expression

$$(43)\qquad \frac{d}{dT_P}[U^{(1)}(A,t)]$$

$$= -\int_0^t \iint_S \frac{r_{AQ}\cos(N_P, \overline{QA})}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \iint_S F(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau.$$

D'après la limitation (42), la seconde des intégrales (43) tend vers la limite

$$(44)\quad \lim_{A\to P}\int_0^t \iint_S F(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau = \int_0^t \iint_S F(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau$$

il reste donc à étudier la première des intégrales (43), que nous désignerons par $I(A,t)$.

Supposons d'abord que le point A est situé sur la normale au point arbitraire P de la surface S et décomposons l'intégrale I en deux parties

$$(45)\qquad I(A,t) = I_{S_K}(A,t) + I_{S-S_K}(A,t)$$

où

$$(46)\quad I_{S_K}(A,t) = -\int_0^t \iint_{S_K} \frac{r_{AQ}\cos(N_P, \overline{QA})}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau;$$

S_K désigne la portion de la surface S située à l'intérieur de la sphère K de rayon δ et de centre P, dont il a été question dans les conditions de Liapounoff. Étudions la différence

$$(47)\qquad R(A,t) = I_{S_K}(A,t) - I^*_{S'_K}(A,t)$$

entre l'intégrale (46) et l'intégrale de la même forme

$$(48)\quad I^*_{S'_K}(A,t) = -\int_0^t \iint_{S'_K} \frac{r_{AQ'}\cos(N_P, \overline{Q'A})}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{P,t}(A,Q')}{4(t-\tau)}\right]\varphi(P,\tau)\, d\sigma_{Q'}\, d\tau$$

relative à la projection S'_K de la surface S_K sur le plan tangent en P à la surface S, Q' désignant la projection du point Q. Démontrons d'abord que l'intégrale (48) tend vers la limite

$$(49)\qquad \lim_{A\to P} I^*_{S_K}(A,t) = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)$$

si $0 < t \leqslant T$. Dans ce but écrivons l'intégrale (48) sous la forme

$$(50)\qquad I^*_{S'_K}(A,t) = -2^{n-1}\iint_{S'_K} \frac{r_{AQ'}\cos(N_P, \overline{Q'A})}{[\vartheta^{P,t}(A,Q')]^{n/2}}\psi(A,Q';t)\, d\sigma_{Q'},$$

en posant

$$(51)\qquad \psi(A,Q',t) = \int_{\frac{\vartheta^{P,t}(A,Q')}{4t}}^{\infty} q^{n/2-1}e^{-q}\varphi\left(P,\, t-\frac{\vartheta^{P,t}(A,Q')}{4q}\right)dq.$$

Soit maintenant $\tilde{S}'_K$ un domaine partiel arbitraire du domaine S'_K contenant le point P dans son intérieur. Considérons dans l'hyperplan $t = \text{const}$ une surface sphérique Λ de centre A, de rayon unité et désignons par $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées du point de cette surface Λ qui correspond au point Q' par projection centrale du point A. Nous pouvons alors écrire l'intégrale (50) sous la forme d'une somme d'intégrales

$$(52)\qquad I^*_{S'_K}(A,t) = -2^{n-1}\psi(P,P,t)\iint_{E(\tilde{S}'_K)} \frac{d\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(P,t)\,\xi_\alpha\xi_\beta\right]^{n/2}} -$$

$$-2^{n-1}\iint_{E(\tilde{S}'_K)} \frac{[\psi(A,Q',t)-\psi(P,P,t)]\, d\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(P,t)\,\xi_\alpha\xi_\beta\right]^{n/2}} -$$

$$-2^{n-1}\iint_{S'_K-\tilde{S}'_K} \frac{r_{AQ'}\cos(N_P, \overline{Q'A})}{[\vartheta^{P,t}(A,Q')]^{n/2}}\psi(A,Q',t)\, d\sigma_{Q'}.$$

On a désigné par $E(\tilde{S}'_K)$ l'ensemble des points de la surface sphérique Λ qui correspond aux points Q' du domaine $\tilde{S}'_K$ et par $d\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — l'élément d'aire de la surface Λ.

Remarquons que, d'après la formule (51), la fonction $\psi(A,Q',t)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables A, Q', si $t > 0$ est fixé. À tout nombre positif ε on peut donc faire correspondre un domaine $\tilde{S}'_K$ et un nombre positif $\eta_1(\varepsilon)$ tels que la deuxième des intégrales (52) soit inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{3}\varepsilon$, si $|AP| < \eta_1(\varepsilon)$.

Remarquons ensuite que, dans le domaine $S'_K - \tilde{S}'_K$, le facteur $\cos(N_P, \overline{Q'A})$ et par conséquent toute la fonction figurant dans la troisième des intégrales (52) tend uniformément vers zéro, si le point A tend vers le point P. Donc, le domaine $\tilde{S}'_K$ étant fixé, nous pouvons faire correspondre au nombre ε un nombre positif $\eta_2(\varepsilon)$ tel que la deuxième des intégrales (52) soit inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{3}\varepsilon$, si $|AP| < \eta_2(\varepsilon)$.

Enfin remarquons que l'ensemble $E(\tilde{S}'_K)$ tend vers un hémisphère, si $|AP|$ tend vers zéro, donc au nombre ε on peut faire correspondre un nombre $\eta_3(\varepsilon)$ tel que la première des intégrales (52) diffère de l'intégrale (voir le supplément à la fin du travail)

$$-2^{n-2}\varphi(P,P,t)\iint\limits_{\Lambda}\frac{d\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\left[\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n}a^{\alpha\beta}(P,t)\,\xi_\alpha\xi_\beta\right]^{n/2}}$$

$$=-2^{n-2}\varphi(P,t)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{\omega_n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}=-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)$$

d'un nombre inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{3}\varepsilon$, si $|AP|<\eta_3(\varepsilon)$. En somme nous aurons

$$(53)\qquad \left|I^*_{S'_K}(A,t)+\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)\right|<\varepsilon$$

si $|AP|<\inf(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, ce qui établit la proposition (49).

Nous démontrerons maintenant que la différence (47) est continue au point P de la surface S, c'est-à-dire que l'on a

$$(54)\qquad \lim_{A\to P}R(A,t)=R(P,t)=I_{S_K}(P,t).$$

Observons que l'intégrale (48) s'annule si A coïncide avec le point P et que l'intégrale généralisée

$$(55)\qquad I_{S_K}(P,t)=-\int\limits_0^t\iint\limits_{S_K}\frac{r_{PQ}\cos(N_P,\overline{QP})}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(P,Q)}{4(t-\tau)}\right]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau$$

est absolument convergente, puisque la fonction sous le signe intégral vérifie l'inégalité

$$(56)\qquad \frac{r_{PQ}|\cos(N_P,\overline{QP})|}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{P,\tau}(P,Q)}{4(t-\tau)}\right]<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-\varkappa}}$$

(d'après la propriété (25)) et les singularités de la limitation (56) sont faibles relativement aux intégrales (55), μ étant choisi à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\varkappa, 1)$.

Étudions donc la différence

$$(57)\qquad R(A,t)-R(P,t)=I_{S_K}(A,t)-I_{S_K}(P,t)-I^*_{S'_K}(A,t)$$

si $A\to P$. Soit K_1 une sphère de centre P et de rayon $\delta_1<\delta$. Nous décomposons les intégrales (57) en deux parties

$$(58)\qquad \begin{aligned} I_{S_K}(A,t)&=I_{S_{K_1}}(A,t)+I_{S_K-S_{K_1}}(A,t),\\ I_{S_K}(P,t)&=I_{S_{K_1}}(P,t)+I_{S_K-S_{K_1}}(P,t),\\ I^*_{S'_K}(A,t)&=I^*_{S'_{K_1}}(A,t)+I^*_{S'_K-S'_{K_1}}(A,t)\end{aligned}$$

étendues aux domaines S_{K_1}, $S_K-S_{K_1}$ situés à l'intérieur de la sphère K_1 et aux domaines extérieurs. Nous démontrerons d'abord qu'au nombre positif arbitraire ε on peut faire correspondre un rayon $\varrho(\varepsilon)$ de la sphère K_1 suffisamment petit pour que l'on ait

$$(59)\qquad |I_{S_{K_1}}(A,t)-I^*_{S'_{K_1}}(A,t)|<\tfrac{1}{4}\varepsilon$$

quelle que soit la position du point A.

On peut prouver par un calcul élémentaire les inégalités suivantes

$$\frac{\sqrt{4r_{PQ'}^2/r_{QQ'}^2+1}-1}{\sqrt{4r_{PQ'}^2/r_{QQ'}^2+1}+1}\leqslant\frac{r_{AQ}^2}{r_{AQ'}^2}\leqslant\frac{\sqrt{4r_{PQ'}^2/r_{QQ'}^2+1}+1}{\sqrt{4r_{PQ'}^2/r_{QQ'}^2+1}-1},$$

il en résulte, d'après l'inégalité

$$(60)\qquad r_{QQ'}\leqslant\text{const}\,r_{PQ'}^{\varkappa+1}$$

qui est une conséquence de la condition (25) de Liapounoff, qu'il existe une constante positive $\chi<1$ telle que

$$(61)\qquad \chi\leqslant r_{AQ}/r_{AQ'}\leqslant 1/\chi$$

pour tout point Q de la portion S_{K_1} et quel que soit le point A sur la normale en P. Ensuite, en appliquant les inégalités (4), (9), (25), (61), on arrive aux inégalités

$$(62)\qquad |r_{AQ}\cos(N_P,\overline{QA})-r_{AQ'}\cos(N_P,\overline{Q'A})|=r_{QQ'}<\text{const}\cdot r_{PQ'}^{\varkappa+1},$$

$$(63)\qquad \left|\exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)}{4(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{\vartheta^{P,t}(A,Q')}{4(t-\tau)}\right]\right|$$
$$<\exp\left[-\frac{g\chi^2r_{AQ}^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{|\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)-\vartheta^{P,t}(A,Q')|}{4(t-\tau)}$$

$$(64)\qquad |\vartheta^{Q,\tau}(A,Q)-\vartheta^{P,t}(A,Q')|$$
$$<k_1(r_{PQ}^h+|t-\tau|^{h'})n^2r_{AQ}^2+nM_a r_{QQ'}(r_{AQ}+r_{AQ'})$$

où M_a désigne la borne supérieure de l'ensemble des fonctions $|a^{\alpha\beta}(A,t)|$ et k_1 — leur coefficient de Hölder. En s'appuyant sur les inégalités (62), (63), (64) et en utilisant le procédé qui a fourni l'inégalité (21), on constate que la différence des intégrales (59) vérifie l'inégalité

$$(65)\qquad |I_{S_{K_1}}(A,t)-I^*_{S'_{K_1}}(A,t)| < \int_0^t\iint\limits_{S_{K_1}} \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{d\sigma_Q\,d\tau}{r_{AQ}^{n+1-2\mu-\varkappa}}+$$

$$+\sup\left|\frac{1}{\gamma(Q)}\varphi(Q,\tau)-\varphi(P,\tau)\right|\left|\int_0^t\iint\limits_{S'_{K_1}}\frac{r_{AQ'}\cos(N_P,\overline{Q'A})}{2(t-\tau)^{n/2+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{\vartheta^{P,\tau}(A,Q')}{4(t-\tau)}\right]d\sigma_{Q'}\,d\tau\right|$$

où $\gamma(Q)$ désigne le cosinus de l'angle que font les normales aux points Q et P. Or la première des intégrales (65) est relative à une fonction à singularités *faibles*, si nous choisissons la constante μ à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\varkappa, 1)$. Ensuite, la seconde intégrale est *bornée* quelle que soit la position du point A, en vertu de la transformation (52).

Nous en concluons donc, en tenant compte de la continuité de la fonction $\varphi(Q,\tau)/\gamma(Q)$, que la différence (65) tend vers zéro avec le rayon ϱ de la sphère K_1, ce qui justifie l'inégalité (59).

Les autres différences des intégrales (58) sont plus faciles à étudier. On voit que l'intégrale (55) d'une fonction à singularité faible tend vers zéro avec le rayon de la sphère K, donc on aura

$$(66)\qquad |I_{S_{K_1}}(P,t)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon$$

si l'on prend une valeur $\varrho_1(\varepsilon)$ suffisamment petite du rayon de la sphère K_1. La sphère K_1 étant fixée avec un rayon égal au plus petit des nombres $\varrho(\varepsilon)$, $\varrho_1(\varepsilon)$, on rapproche maintenant le point A du point P, c'est-à-dire on fait correspondre au nombre ε un nombre $\eta(\varepsilon)$ tel que l'on ait à la fois

$$(67)\qquad |I_{S_K-S_{K_1}}(A,t)-I_{S_K-S_{K_1}}(P,t)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon,\qquad |I^*_{S'_K}(A,t)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon$$

si $|AP| < \eta(\varepsilon)$; ceci est possible en vertu de la continuité de l'intégrale $I_{S_K-S_{K_1}}(A,t)$ au point P et du fait que le facteur $\cos(N_P,\overline{Q'A})$ tend uniformément vers zéro si $Q'\in S'_K-S'_{K_1}$ et $A\to P$. En réunissant les résultats (59), (66), (67), nous voyons que

$$(68)\qquad |R(A,t)-R(P,t)| < \varepsilon,\quad \text{si}\quad |AP| < \eta(\varepsilon).$$

Il en résulte, d'après (49), que

$$(69)\qquad \lim_{A\to P} I_{S_K}(A,t) = I_{S_K}(P,t)-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t).$$

Il suffit maintenant de s'appuyer sur la continuité de l'intégrale $I_{S-S_K}(A,t)$ et sur les intégrales (44) et (36) pour établir la thèse (38) du théorème 1. Remarquons que, d'après les égalités (32), (40) et les inégalités (35), (42), (56), la dérivée transversale de la solution fondamentale sous l'intégrale (38) vérifie l'inégalité à singularités *faibles*

$$(70)\qquad \left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\right| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu_*-\varkappa_1}}$$

où μ_* désigne un nombre choisi à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\varkappa_1, 1)$, $\varkappa_1$ désigne le plus petit des deux nombres h_1, $\varkappa$.

Nous avons supposé dans les considérations antérieures que le point A tend vers le point P de la surface S le long de la normale en ce point. Supposons maintenant que le point A tende vers le point P de la surface S le long d'un arc arbitraire situé à l'intérieur du domaine Ω. Soit P_1 le point de la surface S le plus rapproché du point A. La dérivée transversale du potentiel $U(A,t)$ relativement au point P_1 s'exprime par la formule

$$(70')\qquad \frac{dU(A,t)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\cos(N_{P_1},x_\beta)\,U_{x_\alpha}(A,t)$$

donc la différence entre les dérivées transversales relativement aux points P et P_1 a la valeur suivante

$$(70'')\qquad dU(A,t)/dT_{P_1}-dU(A,t)/dT_P$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)[\cos(N_{P_1},x_\beta)-\cos(N_P,x_\beta)]\,U_{x_\alpha}(A,t).$$

Remarquons maintenant que, d'après les conditions de Liapounoff, la différence des cosinus vérifie l'inégalité

$$|\cos(N_{P_1},x_\beta)-\cos(N_P,x_\beta)| < \text{const}\cdot r_{PP_1}^{\varkappa}.$$

D'autre part on peut montrer sans peine que les dérivées spatiales du potentiel de simple couche vérifient l'inégalité

$$(70''')\qquad |U_{x_\alpha}(A,t)| < \text{const}\iint\limits_S \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}}.$$

D'après un raisonnement développé dans la démonstration du théorème suivant, l'intégrale (70''') est comparable avec $|\log r_{AP_1}|$ si $A\to P_1$. Il en résulte que la différence (70'') tend vers zéro avec la distance $|PP_1|$, sous la condition que

$$(70^{\mathrm{IV}})\qquad r_{PP_1}^{\varkappa}\log r_{AP_1}\to 0$$

si $|PP_1|\to 0$. Or le point A est situé sur la normale au point P_1 et la valeur (70') tend uniformément vers la limite étudiée, si $A\to P_1$, nous en concluons que la dérivée transversale au point A relativement au point P tend vers la même limite (38), si le point A tend vers ce point P le long d'un arc vérifiant la condition (70^{IV}).

Si la densité $\varphi(P,t)$ de la couche vérifiait la condition de Hölder par rapport au point P, alors on peut montrer que la limite (38) est indépendante de la façon dont le point A tend vers le point P de la surface S.

THÉORÈME 2. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable dans le domaine fermé $\langle Q\epsilon S;\ 0\leqslant\tau\leqslant T\rangle$, le potentiel généralisé (26) de simple couche vérifie, par rapport aux variables spatiales dans la région fermée $\langle A\epsilon\Omega+S;\ 0\leqslant t\leqslant T\rangle$, la condition de Hölder*

$$|U(A,t)-U(A_1,t)|<\mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,r^{\theta}_{AA_1}, \tag{71}$$

où l'exposant θ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité.

Démonstration. Soient deux points arbitraires A, A_1 dans l'ensemble $\Omega+S$ et la sphère Π de centre A et de rayon $2r_{AA_1}$. Décomposons les intégrales (26) relatives aux points A et A_1 en deux intégrales

$$\begin{aligned} U(A,t) &= U^{S_\Pi}(A,t)+U^{S-S_\Pi}(A,t),\\ U(A_1,t) &= U^{S_\Pi}(A_1,t)+U^{S-S_\Pi}(A_1,t)\end{aligned} \tag{72}$$

étendues à l'ensemble S_Π des points de la surface S situés à l'intérieur de la sphère Π et à la partie extérieure $S-S_\Pi$ (l'ensemble S_Π peut être vide). Il suffit d'étudier le cas où la distance r_{AA_1} est suffisamment petite pour que l'ensemble S_Π soit situé à l'intérieur de la sphère K, intervenant dans les conditions de Liapounoff, dont le centre est le point P de la surface S le plus rapproché du point A. D'après l'inégalité (28), nous aurons

$$|U^{S_\Pi}(A,t)|\leqslant\frac{C'}{1-\mu}t^{1-\mu}\sup|\varphi|\iint\limits_{S_\Pi}\frac{d\sigma_Q}{r^{n-2\mu}_{AQ}}. \tag{73}$$

Supposons que le nombre δ dans les conditions de Liapounoff soit suffisamment petit pour que le cosinus de l'angle entre les deux normales aux points P et Q de la portion S_K soit supérieur à $\frac{1}{2}$. Nous aurons alors

$$|U^{S_\Pi}(A,t)|\leqslant\frac{2C'}{1-\mu}t^{1-\mu}\sup|\varphi|\iint\limits_{S'_\Pi}\frac{d\sigma_Q}{r^{n-2\mu}_{PQ'}} \tag{74}$$

$$<\frac{2C'}{1-\mu}t^{1-\mu}\sup|\varphi|\int\limits_0^{2r_{AA_1}}\frac{\omega_{n-1}r^{n-2}dr}{r^{n-2\mu}}=\frac{2^{2\mu}C't^{1-\mu}\omega_{n-1}}{(1-\mu)(2\mu-1)}\sup|\varphi|\cdot r^{2\mu-1}_{AA_1}$$

$$(\tfrac{1}{2}<\mu<1).$$

S'_Π désignant l'ensemble des projections Q' des points Q de l'ensemble S_Π sur le plan tangent en P, ω_{n-1} désigne l'aire de la surface sphérique

$$\omega_{n-1}=\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

à $n-2$ dimensions. D'une façon analogue nous obtenons

$$|U^{S_\Pi}(A_1,t)|<\frac{2C'}{1-\mu}t^{1-\mu}\sup|\varphi|\int\limits_0^{3r_{AA_1}}\omega_{n-1}r^{2\mu-2}dr \tag{75}$$

$$=\frac{2\cdot 3^{2\mu-1}C'\omega_{n-1}}{(1-\mu)(2\mu-1)}t^{1-\mu}\sup|\varphi|\,r^{2\mu-1}_{AA_1}.$$

Pour étudier la différence des seconds termes des sommes (72), nous nous appuierons sur la décomposition (32). Remarquons que, d'après la limitation (35), la dérivée de la partie $U^{(2)}(A,t)$ est *bornée* dans le domaine Ω, donc cette fonction vérifie la condition de Lipschitz

$$|U^{(2)}(A,t)-U^{(2)}(A_1,t)|<\mathrm{const}\cdot r_{AA_1} \tag{76}$$

dans l'ensemble $\Omega+S$. Il suffit par conséquent d'étudier la différence

$$U^{(1)S-S_\Pi}(A,t)-U^{(1)S-S_\Pi}(A_1,t) \tag{77}$$

relative à la première partie (33) du potentiel. En appliquant le théorème des accroissements finis, nous aurons

$$w^{Q,\tau}(A,t;Q,\tau)-w^{Q,\tau}(A_1,t;Q,\tau) \tag{78}$$

$$=-\frac{1}{2}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{\vartheta^{B,\tau}(A^*,Q)}{4(t-\tau)}\right]\times$$

$$\times\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a^{\alpha\beta}(B,\tau)(x^*_\beta-\xi_\beta)\cos(x_\alpha,\overline{r}_{AA_1})r_{AA_1}$$

où A^* désigne un point intérieur de segment AA_1.

Or, si le point Q est extérieur à la sphère Π, nous avons pour tout point A^* du segment AA_1 les inégalités

$$\tfrac{1}{2}r_{AQ}\leqslant r_{A^*Q}\leqslant\tfrac{3}{2}r_{AQ} \tag{79}$$

donc la différence (78) vérifie, d'après (9), l'inégalité

$$|w^{Q,\tau}(A,t;Q,\tau)-w^{Q,\tau}(A_1,t;Q,\tau)| \tag{80}$$

$$<\frac{3n^2M_a}{4}(t-\tau)^{-n/2-1}\exp\left[-\frac{gr^2_{AQ}}{16(t-\tau)}\right]r_{AQ}r_{AA_1}$$

pour tout point $Q \in S - S_\Pi$. Il en résulte

$$
\begin{aligned}
(81)\qquad & |U^{(1)S-S_\Pi}(A,t) - U^{(1)S-S_\Pi}(A_1,t)| \\
& < \tfrac{3}{4} n^2 M_a \sup|\varphi| r_{AA_1} \int_0^t \iint_{S-S_\Pi} (t-\tau)^{-n/2-1} \exp\left[-\frac{g r_{AQ}^2}{16(t-\tau)}\right] r_{AQ}\, d\sigma_Q\, d\tau \\
& < 4^n g^{-n/2-1} n^2 M_a \sup|\varphi| r_{AA_1} \iint_{S-S_\Pi} \frac{1}{r_{AQ}^{n-1}} \left[\int_{g r_{AQ}^2/16t}^{\infty} q^{n/2-1} e^{-q} dq\right] d\sigma_Q \\
& < 4^n g^{-n/2-1} n^2 M_a \sup|\varphi| \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) r_{AA_1} \iint_{S-S_\Pi} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Nous démontrerons que l'intégrale obtenue est comparable à $|\log r_{AA_1}|$ si $A_1 \to A$. Supposons d'abord que l'ensemble S_Π soit *vide* et écrivons

$$\iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} = \iint_{S_K} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} + \iint_{S-S_K} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}}$$

S_K étant la portion de la surface S située à l'intérieur de la sphère K de centre P et de rayon δ, dont il est question dans les conditions de Liapounoff. On peut toujours admettre que les inégalités (61) sont verifiées pour $Q \in S_K$ et on voit que $r_{AQ} \geqslant \frac{1}{2} r_{PQ}$ quel que soit $Q \in S$. Nous aurons alors

$$\iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} \leqslant \frac{1}{\chi^{n-1}} \iint_{S_K} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ'}^{n-1}} + 2^{n-1} \iint_{S-S_K} \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1}}$$

d'où

$$(82)\qquad \iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} < \frac{2\omega_{n-1}}{\chi^{n-1}} \int_0^\delta \frac{\varrho^{n-2} d\varrho}{(\sqrt{\nu^2+\varrho^2})^{n-1}} + \frac{2^{n-1}|S|}{\delta^{n-1}}$$

ν désignant la distance $|AP|$ et $|S|$ — l'aire de la surface S, de plus on a supposé que le cosinus de l'angle entre les normales aux points P et $Q \in S_K$ est supérieur à $\frac{1}{2}$. De l'inégalité (82) il résulte que l'intégrale étudiée vérifie dans le cas $2r_{AA_1} < \nu$ l'inégalité

$$(83)\qquad \iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} < c' |\log r_{AP}| + c''$$

c' et c'' étant des constantes positives.

Si l'ensemble S_Π n'est pas vide ($2r_{AA_1} \geqslant \nu$), nous écrivons

$$\iint_{S-S_\Pi} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} = \iint_{S_K-S_\Pi} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} + \iint_{S-S_K} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}}$$

sous l'hypothèse que $2r_{AA_1} \leqslant \delta$, auquel cas il suffit de se borner. Nous obtenons alors

$$
\begin{aligned}
(84)\qquad \iint_{S-S_\Pi} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} & \leqslant \frac{2\omega_{n-1}}{\chi^{n-1}} \int_{c\sqrt{4r_{AA_1}^2 - \nu^2}}^{\delta} \frac{\varrho^{n-2} d\varrho}{(\sqrt{r^2+\varrho^2})^{n-1}} + \frac{2^{n-1}|S|}{\delta^{n-1}} \\
& \leqslant \frac{2\omega_{n-1}}{\chi^{n-1}} \int_{2cr_{AA_1}}^{\sqrt{\delta_c^2+\nu^2}} \frac{d\zeta}{\xi} + \frac{2^{n-1}|S|}{\delta^{n-1}}
\end{aligned}
$$

où $c < 1$ est un nombre positif égal à la borne inférieure du rapport des distances $r_{PQ'}/r_{PQ}$ dans S_K. Des inégalités (83) et (84) nous concluons que, pour tout couple de points A, A_1 dans l'ensemble $\Omega + S$, on a l'inégalité

$$(85)\qquad \iint_{S-S_\Pi} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} < C_1' |\log r_{AA_1}| + C_2''$$

C_1', C_2'' étant des constantes positives. En nous appuyant sur l'inégalité démontrée (85) et sur les inégalités (74), (75), (76), (81), nous arrivons à la thèse (71) du théorème 2.

Théorème 3. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable dans la région fermée*

$$Q \in S, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T$$

le potentiel généralisé (26) de simple couche vérifie, par rapport à la variable t dans l'ensemble fermé

$$A \in \Omega + S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

la condition de Hölder

$$(86)\qquad |U(A,t) - U(A,t_1)| < \text{const} \cdot \sup|\varphi|\, |t-t_1|^{\theta/2} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Démonstration. Supposons que

$$A \in \Omega + S, \quad 0 \leqslant t_1 < t \leqslant T$$

et décomposons la différence des potentiels aux deux points (A,t) et (A,t_1) de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
(87)\qquad U(A,t) - U(A,t_1) = & \int_{t_1}^{t} \iint_S \Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau + \\
& + \int_0^{t} \iint_S [\Gamma(A,t;Q,\tau) - \Gamma(A,t_1;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité (28), la première des intégrales (87), soit I_1, admet la limitation

$$|I_1| < \frac{C' s_\mu}{1-\mu'} \sup|\varphi|\, |t-t_1|^{1-\mu'} \tag{88}$$

où $\frac{1}{2} < \mu' < 1$. Pour étudier I_2, la seconde des intégrales (87), considérons la sphère Δ de centre A et de rayon r_Δ, que nous ne fixons pas pour le moment. Décomposons l'intégrale I_2 en deux parties

$$I_2 = I_2^{S_\Delta} + I_2^{S-S_\Delta} \tag{89}$$

étendues à la portion S_Δ de la surface S située à l'intérieur de la sphère Δ et à la portion extérieure $S-S_\Delta$ (l'ensemble S_Δ peut être vide). Il suffit d'étudier le cas où r_Δ est suffisamment petit pour que l'ensemble S_Δ se trouve à l'intérieur de la sphère K, intervenant dans les conditions de Liapounoff, dont le centre est le point P de la surface S le plus rapproché du point A. Par analogie avec les limitations (73) et (74), nous aurons

$$|I_2^{S_\Delta}| < \text{const}\cdot t^{1-\mu} \sup|\varphi|\, r_\Delta^{2\mu-1}. \tag{90}$$

Remarquons maintenant que, d'après l'équation parabolique (1), la dérivée de la solution fondamentale $\Gamma_t(A,t;B,\tau)$, admet une limitation du même ordre de singularité que les dérivées secondes spatiales $\Gamma_{x_\alpha x_\beta}(A,t;B,\tau)$, donc du même ordre que les dérivées secondes $u^{B,\tau}_{x_\alpha x_\beta}(A,t;B,\tau)$ de la quasi-solution. Cette limitation sera donc la suivante

$$|\Gamma_t(A,t;B,\tau)| < \frac{C_1}{(t-\tau)^\mu} \cdot \frac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu}} \tag{91}$$

où $\frac{1}{2} < \mu < 1$. Il en résulte que la seconde des intégrales (89) vérifie l'inégalité

$$|I_2^{S-S_\Delta}| < \sup|\varphi| \int_0^{t_1} \iint_{S-S_\Delta} \frac{C_1 |t-t_1|\, d\sigma_Q\, d\tau}{r_{AQ}^{n+2-2\mu}(t_1-\tau)^\mu} \tag{92}$$

$$< \text{const}\cdot \sup|\varphi|\, |t-t_1| \iint_{S-S_\Delta} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n+2-2\mu}}.$$

Nous traiterons l'intégrale obtenue de la même façon que l'intégrale (84) et nous obtiendrons dans le cas $r_\Delta \geqslant \nu$:

$$\iint_{S-S_\Delta} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n+2-2\mu}} < \frac{2\omega_{n-1}}{\chi^{n-1}} \int_{c\sqrt{r_\Delta^2-\nu^2}}^{\delta} \frac{\varrho^{n-2}\, d\varrho}{\left(\sqrt{\nu^2+\varrho^2}\right)^{n+2-2\mu}} + \frac{2^{n-1}|S|}{\delta^{n+2-2\mu}} \tag{93}$$

$$\leqslant \frac{2\omega_{n-1}}{\chi^{n-1}} \int_{cr_\Delta}^{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}} \frac{d\zeta}{\zeta^{4-2\mu}} + \frac{2^{n-1}|S|}{\delta^{n+2-2\mu}}.$$

Le cas $r_\Delta < \nu$ peut être étudié d'une façon analogue.

Il en résulte la limitation suivante de l'intégrale (92):

$$|I_2^{S-S_\Delta}| < \frac{C_2 \sup|\varphi|}{r_\Delta^{3-2\mu}} |t_1-t| \tag{94}$$

où la constante C_2 ne dépend pas de r_Δ.

Choisissons maintenant

$$r_\Delta = c_2 |t_1-t|^\alpha$$

où l'exposant α est un nombre positif inférieur à l'unité (tel que $\alpha(3-2\mu) < 1$) et c_2 est une constante positive suffisamment petite pour que l'ensemble S_Δ, dans le cas de la sphère de rayon $r_\Delta = c_2 T^{1/2}$, soit situé à l'intérieur de la sphère K de centre P. Le plus avantageux est de choisir α de façon que l'on ait $1-\alpha(3-2\mu) = \alpha(2\mu-1)$ d'où $\alpha = \frac{1}{2}$. Donc, d'après les inégalités (90), (94), l'intégrale I_2 vérifie l'inégalité

$$|I_2(A,t)| < \text{const}\cdot \sup|\varphi|\, |t-t_1|^{\mu-1/2}. \tag{95}$$

Les nombres μ, μ' étant arbitraires à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$, il en résulte la thèse (86) du théorème 3.

THÉORÈME 4. *Si la densité $\varphi(Q,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable dans la région*

$$Q \in S, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T,$$

l'intégrale

$$H(P,t) = \int_0^t \iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau, \tag{96}$$

dans l'expression de la dérivée transversale (38), *est une fonction déterminée dans la région* $[Q \in S,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$ *qui vérifie la condition de Hölder*

$$|H(P,t) - H(P_1,t_1)| < \text{const}\cdot \sup|\varphi|\, [r_{PP_1}^{\theta\varkappa_1} + |t-t_1|^{\theta'\varkappa_1/3}] \tag{97}$$

où $\varkappa_1 = \inf(h_1, \varkappa)$, θ *et* θ' *sont des nombres positifs arbitraires inférieurs à l'unité.*

Démonstration. Nous rappelons que la dérivée transversale de la solution fondamentale sous le signe de l'intégrale (96) vérifie la limitation à singularités faibles (70), ce qui assure l'existence et la continuité de l'intégrale généralisée (96) dans la région $[P \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$. D'après les formules (24) et (40), nous étudierons d'abord la composante suivante de la fonction (96):

$$H^*(P,t) = \int_0^t \iint_S \frac{r_{PQ}\cos(N_P, \overline{QP})}{2(t-\tau)^{n/2+1}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(P,Q)}{4(t-\tau)}\right] p(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau. \tag{98}$$

Considérons donc deux points quelconques P, P_1 de la surface S et une sphère Π de centre P et de rayon $2r_{PP_1}$. Il suffit d'étudier le cas $2r_{PP_1} \leqslant \delta$. Nous décomposons les intégrales (98) relatives aux points P, P_1 en trois parties

$$(99)\qquad \begin{aligned} H^*(P,t) &= H^*_{S_\Pi}(P,t) + H^*_{S_K - S_\Pi}(P,t) + H^*_{S-S_K}(P,t), \\ H^*(P_1,t) &= H^*_{S_\Pi}(P_1,t) + H^*_{S_K - S_\Pi}(P_1,t) + H^*_{S-S_K}(P_1,t) \end{aligned}$$

étendues à la portion S_Π de la surface S_K située à l'intérieur de la sphère Π, à la portion $S_K - S_\Pi$ de la surface S_K extérieure à la sphère Π et à la partie $S - S_K$ de la surface S extérieure à la sphère K. D'après la limitation (56), nous avons évidemment

$$|H^*_{S_\Pi}(P,t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi| \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu} \iint\limits_{S'_\Pi} \frac{d\sigma_{Q'}}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-\varkappa}}$$

S'_Π étant la projection de la surface S_Π sur le plan tangent en P et $1-\frac{1}{2}\varkappa < \mu < 1$. Nous aurons donc

$$(100)\qquad |H^*_{S_\Pi}(P,t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} \int_0^{2r_{PP_1}} \frac{\omega_{n-1} r^{n-2}\,dr}{r^{n+1-2\mu-\varkappa}} = \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} r_{PP_1}^{2\mu-2+\varkappa}$$

où $0 < 2\mu - 2 + \varkappa < \varkappa$.

D'une façon analogue on aura

$$(100')\qquad |H^*_{S_\Pi}(P_1,t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} \int_0^{3r_{PP_1}} \frac{\omega_{n-1} r^{n-2}\,dr}{r^{n+1-2\mu-\varkappa}} = \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} r_{PP_1}^{2\mu-2+\varkappa}.$$

Pour étudier la différence des seconds termes des sommes (99), nous nous appuierons sur l'inégalité

$$(101)\qquad |r_{PQ}\cos(N_P, \overline{QP}) - r_{P_1Q}\cos(N_{P_1}, \overline{QP_1})| \leqslant \mathrm{const}(r_{PQ} r_{PP_1}^{\varkappa} + r_{PQ}^{\varkappa} r_{PP_1})$$

facile à déduire des conditions de Liapounoff et de l'inégalité

$$(102)\qquad |a^\varkappa - b^\varkappa| \leqslant |a-b|^\varkappa,$$

vraie pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0 < \varkappa \leqslant 1$. Ensuite nous nous appuierons sur l'inégalité

$$(103)\qquad \begin{aligned} &\left| \exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(P,Q)}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{\vartheta^{Q,\tau}(P_1,Q)}{4(t-\tau)}\right] \right| \\ &\quad < \exp\left[-\frac{g r_{PQ}^2}{16(t-\tau)}\right] \frac{|\vartheta^{Q,\tau}(P,Q) - \vartheta^{Q,\tau}(P_1,Q)|}{4(t-\tau)} \\ &\quad < \exp\left[-\frac{g r_{PQ}^2}{16(t-\tau)}\right] \frac{3M_a n^2 r_{PQ} r_{PP_1}}{4(t-\tau)} \end{aligned}$$

si $Q \in S - S_\Pi$. Nous en concluons la limitation suivante:

$$(104)\qquad \begin{aligned} &|H^*_{S_K - S_\Pi}(P,t) - H^*_{S_K - S_\Pi}(P_1,t)| \\ &\quad < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi| \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu} \int_{2cr_{PP_1}}^{\delta} \frac{r r_{PP_1}^{\varkappa} + r^{\varkappa} r_{PP_1}}{r^{n+2-2\mu}} r^{n-2}\,dr \\ &\quad < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} r_{PP_1}^{2\mu-2+\varkappa} \end{aligned}$$

où $1-\frac{1}{2}\varkappa < \mu < 1$. Les mêmes inégalités (101), (103) sont vraies si $Q \in S - S_K$ et nous obtenons évidemment ($r_{PQ} \geqslant \delta$):

$$(105)\qquad \begin{aligned} &|H^*_{S-S_K}(P,t) - H^*_{S-S_K}(P_1,t)| \\ &\quad < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} \iint\limits_{S-S_K} \frac{r_{PQ} r_{PP_1}^{\varkappa} + r_{PQ}^{\varkappa} r_{PP_1}}{r_{PQ}^{n+2-2\mu}}\, d\sigma_Q \\ &\quad < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} \frac{|S|}{\delta^{n+2-2\mu-\varkappa}} r_{PP_1}^{\varkappa}. \end{aligned}$$

D'après les résultats (100), (100'), (104), (105), l'intégrale (98) vérifie la condition de Hölder

$$(106)\qquad |H^*(P,t) - H^*(P_1,t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\, t^{1-\mu} r_{PP_1}^{\theta\varkappa}$$

où θ est un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité. Pour prouver que l'intégrale (98) vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable t, écrivons ($t_1 < t$)

$$(107)\qquad \begin{aligned} H^*(P,t) - H^*(P,t_1) &= \int_{t_1}^{t} \iint\limits_{S} E(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau + \\ &\quad + \int_0^{t_1} \iint\limits_{S} [E(P,t;Q,\tau) - E(P,t_1;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau \end{aligned}$$

où $E(P,t;Q,\tau)$ désigne la fonction sous le signe de l'intégrale (98).

D'après la limitation (56), nous avons

$$(108)\qquad \left|\int_{t_1}^{t}\iint_S E(P,t;Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau\right| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|^{1-\mu'}$$

où $1-\frac{1}{2}\varkappa<\mu'<1$. Soit maintenant une sphère Δ de centre P et de rayon r_Δ, que nous ne fixons pas pour le moment, située à l'intérieur de la sphère K. Par analogie avec la limitation (100), nous aurons

$$(109)\qquad \left|\int_0^{t_1}\iint_S [E(P,t;Q,\tau)-E(P,t_1;Q,\tau)]\,\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau\right| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,t^{1-\mu}r_\Delta^{\varkappa+2\mu-2}.$$

Un calcul connu donne pour la dérivée de la fonction E la limitation suivante:

$$(110)\qquad |E_t(P,t;Q,\tau)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+3-2\mu-\varkappa}}\qquad (0<\mu<1).$$

Donc, en répétant le raisonnement relatif à l'intégrale (92) et (93), nous aurons

$$(111)\qquad \left|\int_0^{t_1}\iint_{S-S_\Delta}[E(P,t;Q,\tau)-E(P,t_1;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau\right| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|\iint_{S-S_\Delta}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n+3-2\mu-\varkappa}} < \frac{C_3\sup|\varphi|}{r_\Delta^{4-2\mu-\varkappa}}\,|t-t_1|$$

où la constante positive C_3 ne dépend pas de r_Δ.

Choisissons maintenant

$$r_\Delta = c_3|t_1-t|^\beta$$

où l'exposant positif β est un nombre inférieur à l'unité, tel que $\beta(4-2\mu-\varkappa)<1$ et c_3 est une constante positive suffisamment petite pour que l'ensemble S_Δ, dans le cas de rayon $r_\Delta=c_3T^{1/2}$, soit situé à l'intérieur de la sphère K. Le plus avantageux est de choisir β de façon que l'on ait

$$1-\beta(4-2\mu-\varkappa)=\beta(\varkappa+2\mu-2),$$

d'où $\beta=\frac{1}{2}$.

Nous en concluons, d'après les inégalités (108), (109), (111) que la différence (107) vérifie l'inégalité

$$(112)\qquad |H^*(P,t)-H^*(P,t_1)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|^{\theta\varkappa/2}.$$

On étudiera d'une façon analogue la seconde composante de l'intégrale (96)

$$(113)\qquad H^{**}(P,t)=\int_0^t\iint_S F(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau,$$

où F désigne le second terme de la somme (40), dans lequel on pose $A=P$. Ce terme vérifie l'inégalité (42).

On obtient

$$(114)\qquad |H^{**}(P,t)-H^{**}(P_1,t)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,r_{PP_1}^{\theta h_1}$$

où $0<\theta<1$ et $h_1=\inf(h,2h')$. Pour démontrer l'inégalité de Hölder par rapport à la variable t, on fera un décomposition analogue à (107) et on s'appuiera sur l'inégalité

$$(115)\qquad |F(P,t;Q,\tau)-F(P,t_1;Q,\tau)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{|t-t_1|}{r_{PQ}^{n+3-2\mu-h}} + \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu'}}\cdot\frac{|t-t_1|}{r_{PQ}^{n+3-2\mu'-2h'}} + \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu''}}\cdot\frac{|t-t_1|^{h'}}{r_{PQ}^{n+1-2\mu''}}.$$

En répétant le même raisonnement, que pour les intégrales (108) et (111), on arrive à l'inégalité suivante

$$(116)\qquad |H^{**}(P,t)-H^{**}(P,t_1)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|^{\theta h_1/2}\qquad (0<\theta<1).$$

Il reste à étudier la dernière composante

$$(117)\qquad \bar H(P,t)=\int_0^t\iint_S \frac{d}{dT_P}[\bar w(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau$$

de l'intégrale (96), où $\bar w$ est donnée par la formule (22). La fonction $\bar w$ a la forme d'un quasi-potentiel de charge spatiale de densité $\Phi(M,\zeta;B,\tau)$ donc, d'après les résultats de notre travail [3], les dérivées de la fonction $\bar w$ par rapport aux coordonnées du point A auront la forme

$$(118)\qquad \bar w_{x_a}(A,t;B,\tau)=\int_\tau^t\iiint_{\Omega'(M)} w_{x_a}^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\,\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta.$$

Soient deux points P et P_1 de la surface S tels que $2r_{PP_1}<\delta$ et soit la sphère Π de centre en P et de rayon $2r_{PP_1}$. Nous avons, d'après (35),

$$(119)\qquad |\bar H_{S_\Pi}(P,t)| < \sup|\varphi|\int_0^t\iint_{S_\Pi}\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-h_1}} < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,r_{PP_1}^{2\mu-2+h_1}.$$

Si $Q \epsilon S - S_{\Pi}$, $M \epsilon \Omega' - \Pi$, nous nous appuierons sur l'inégalité

$$(120)\qquad |w_{x_\alpha}^{M,\zeta}(P,t;M,\zeta) - w_{x_\alpha}^{M,\zeta}(P_1,t;M,\zeta)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\zeta)^{\mu}} \cdot \frac{r_{PP_1}}{r_{PM}^{n+2-2\mu}}$$

$(1-\frac{1}{2}h_1 < \mu < 1,\ r_{PM} \geqslant 2r_{PP_1})$ et nous aurons d'après (19) et (34),

$$(121)\qquad |\overline{w}_{x_\alpha}(P,t;Q,\tau) - \overline{w}_{x_\alpha}(P_1,t;Q,\tau)|$$
$$< \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{2\mu-1}} \Big[\iiint_{\Pi} \frac{dM}{r_{PM}^{n+1-2\mu} r_{MQ}^{n+2-2\mu-h_1}} + \iiint_{\Omega'-\Pi} \frac{r_{PP_1} dM}{r_{PM}^{n+2-2\mu} r_{QM}^{n+2-2\mu-h_1}} \Big]$$
$$< \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{2\mu-1}} \cdot \frac{r_{PP_1}^{2\mu-1}}{r_{PQ}^{n+2-2\mu-h_1}}.$$

Il en résulte, en tenant compte de la formule

$$(122)\qquad \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P,t)\cos(N_P,x_\beta)\overline{w}_{x_\alpha}(P,t;Q,\tau)$$

et en appliquant le raisonnement déja utilisé, l'inégalité suivante

$$(123)\qquad |\overline{H}_{S-S_{\Pi}}(P,t) - \overline{H}_{S-S_{\Pi}}(P_1,t)| < \mathrm{const} \cdot \sup|\varphi| r_{PP_1}^{\theta h_1}$$

$(0 < \theta < 1)$. Donc la fonction (117) vérifie une inégalité de la même forme

$$(124)\qquad |\overline{H}'(P,t) - \overline{H}(P_1,t)| < \mathrm{const} \cdot \sup|\varphi| r_{PP_1}^{\theta h_1}.$$

Enfin nous étudierons d'une façon analogue l'inégalité de Hölder par rapport à la variable t. Nous écrivons donc

$$(125)\qquad \overline{H}(P,t) - \overline{H}(P,t_1) = \int_{t_1}^{t} \iint_{S} \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \iint_{S} \Big\{ \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)] - \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t_1;Q,\tau)] \Big\} \varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau$$

et nous obtenons d'abord la limitation

$$(126)\qquad \Big| \int_{t_1}^{t} \iint_{S} \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau \Big|$$
$$< \sup|\varphi| \int_{t_1}^{t} \iint_{S} \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}} \cdot \frac{d\sigma_Q\,d\tau}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-h_1}} < \mathrm{const} \cdot \sup|\varphi| |t-t_1|^{1-\mu}.$$

Pour étudier la seconde des intégrales (125), soit I, on la décompose comme d'habitude en deux parties

$$I = I_{S_\Delta} + I_{S-S_\Delta}.$$

On a, de même que pour l'intégrale (126),

$$(127)\qquad |I_{S_\Delta}| < \mathrm{const} \cdot \sup|\varphi| r_{\Delta}^{2\mu-2+h_1} \qquad (1-\tfrac{1}{2}h_1 < \mu < 1).$$

Si $Q \epsilon S - S_\Delta$, nous écrirons

$$(128)\qquad \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)] - \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t_1;Q,\tau)]$$
$$= \int_{t_1}^{t} \iiint_{\Omega'(M)} \frac{d}{dT_P}[w^{M,\zeta}(P,t;M,\zeta)]\Phi(M,\zeta;Q,\tau)\,dM\,d\zeta +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} \iiint_{\Delta(M)} \Big\{ \frac{d}{dT_P}[w^{M,\zeta}(P,t;M;\zeta)] - \frac{d}{dT_P}[w^{M,\zeta}(P,t_1;M,\zeta)] \Big\} \times$$
$$\times \Phi(M,\zeta;Q,\tau)\,dM\,d\zeta +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} \iiint_{\Omega'-\Delta} \Big\{ \frac{d}{dT_P}[w^{M,\zeta}(P,t;M,\zeta)] - \frac{d}{dT_P}[w^{M,\zeta}(P,t_1;M,\zeta)] \Big\} \times$$
$$\times \Phi(M,\zeta;Q,\tau)\,dM\,d\zeta$$

et nous nous appuierons sur l'inégalité (70), (19), et, de plus sur l'inégalité

$$(129)\qquad |w_{x_\alpha}^{M,\zeta}(P,t;M,\zeta) - w_{x_\alpha}^{M,\zeta}(P,t_1,M,\zeta)| < \frac{|t-t_1|}{|t_1-\zeta|^{\mu_2}} \cdot \frac{1}{r_{PM}^{n+3-2\mu_2}}$$

$(0 < \mu_2 < 1)$ pour la troisième des intégrales (128), où $M \epsilon \Omega' - \Delta$. Nous obtenons

$$\Big| \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t;Q,\tau)] - \frac{d}{dT_P}[\overline{w}(P,t_1;Q,\tau)] \Big|$$
$$< \int_{t_1}^{t} \frac{d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu_*}(\zeta-\tau)^{\mu_1}} \cdot \frac{\mathrm{const}}{r_{PQ}^{n+3-(2\mu_*+2\mu_1+h_1+\varkappa_1)}} +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu_*}(\zeta-\tau)^{\mu_1}} \cdot \frac{\mathrm{const} \cdot r_{\Delta}^{2\mu^*+\varkappa_1-1}}{r_{PQ}^{n+2-2\mu_1-h_1}} +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\zeta}{(t_1-\zeta)^{\mu_2}(\zeta-\tau)^{\mu_1}} \cdot \frac{\mathrm{const}\,|t-t_1|\,r_{\Delta}^{2\mu_2-3}}{r_{PQ}^{n+5-2\mu_1-2\mu_2-h_1}} + \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu_3}(\zeta-\tau)^{\mu_1}} \cdot \frac{\mathrm{const}\,|t-t_1|^{h'}}{r_{PQ}^{n+3-(2\mu_1+h_1+2\mu_3)}},$$

où $1-\frac{1}{2}\varkappa_1 < \mu^* < 1$, $1-\frac{1}{2}h_1 < \mu_1 < 1$, $\frac{1}{2} < \mu_3 < 1$ donc

$$n+3-(2\mu^*+2\mu_1+h_1+\varkappa_1) < n-1$$

et la première singularité spatiale est faible relativement à l'intégrale de surface. Nous en déduirons que la seconde des intégrales (125), étendue à la surface $S - S_\Delta$, admet la limitation suivante:

$$(130)\qquad |I_{S-S_\Delta}| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,[|t-t_1|^{1-\mu_*}+r_\Delta^{(2\mu_*+\varkappa_1)+(2\mu_1+h_1)-4}+ \\ +|t-t_1|\,r_\Delta^{(2\mu_1+h_1)+4\mu_2-9}+|t-t_1|^{h'}r_\Delta^{(2\mu_1+h_1)+2\mu_3-4}].$$

Nous posons maintenant

$$r_\Delta = \mathrm{const}\cdot|t-t_1|^\gamma$$

et choisissons la constante positive γ de façon que

$$1-[9-4\mu_2-(2\mu_1+h_1)]\gamma = [(2\mu_*+\varkappa_1)+(2\mu_1+h_1)-4]\gamma.$$

Nous en concluons, en tenant compte des limitations (126), (127), (130), que la fonction (117), vérifie l'inégalité de Hölder

$$(130')\qquad |\overline{H}(P,t)-\overline{H}(P,t_1)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|^{\theta'\varkappa_1/3}$$

θ' étant un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité.

En réunissant les résultats (106), (112), (114), (116), (124), (130'), nous arriverons à la thèse (97) du théorème 4.

3. Propriétés du potentiel généralisé de charge spatiale. Définition 2. On appelle potentiel généralisé de charge spatiale, relativement à l'équation parabolique (1), l'intégrale

$$(131)\qquad V(A,t) = \int_0^t\iiint_\Omega \Gamma(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau.$$

La fonction donnée $\varrho(B,\tau)$ — dite densité de la charge — est bornée et intégrable dans la région fermée

$$(132)\qquad B\epsilon\Omega,\qquad 0\leqslant\tau\leqslant T.$$

Dans le travail cité [3] nous avons démontré, sous la condition que la densité ϱ satisfaisait à la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales, que le potentiel (131) admet des dérivées secondes spatiales et une dérivée par rapport à la variable t, qui vérifient l'équation généralisée de Poisson

$$(133)\qquad \hat{\Psi}[V(A,t)] = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}}\,\varrho(A,t)$$

en tout point intérieur (A,t) de la région (132). Si la densité $\varrho(B,\tau)$ n'est que bornée et intégrable dans (132), le potentiel (131), admet d'après les résultats du travail [3], des dérivées premières spatiales, mais nous ne pouvons affirmer l'existence ni des dérivées secondes spatiales, ni de la première dérivée par rapport à la variable t.

Cependant nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Si la densité $\varrho(B,\tau)$ est bornée et intégrable dans la région* (132), *le potentiel de charge spatiale* (131) *vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable t*

$$(134)\qquad |V(A,t)-V(A,t_1)| < \mathrm{const}\cdot|t-t_1|^\theta$$

et les premières dérivées spatiales du potentiel vérifient la condition de Hölder

$$(135)\qquad |V_{x_\alpha}(A,t)-V_{x_\alpha}(A_1,t_1)| < \mathrm{const}\cdot[r_{AA_1}^\theta+|t-t_1|^{\theta'/2}]$$

θ et θ' étant des nombres positifs arbitrairement inférieurs à l'unité.

Démonstration. En appliquant la formule (6) pour la solution fondamentale Γ et la transformation de Dirichlet, on peut exprimer le potentiel (131) de charge spatiale sous la forme d'une somme de deux quasi-potentiels

$$(136)\qquad V(A,t) = V^*(A,t)+V^{**}(A,t) = \int_0^t\iiint_{\Omega(B)} w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau \\ +\int_0^t\iiint_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\,\varrho_1(M,\zeta)\,dM\,d\zeta$$

où l'on a posé

$$(137)\qquad \varrho_1(M,\zeta) = \int_0^\zeta\iiint_{\Omega(B)} \Phi(M,\zeta;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau.$$

Or nous avons démontré dans le travail [3], sous la seule hypothèse de l'intégrabilité de la fonction ϱ, que l'intégrale (137) vérifie la condition de Hölder

$$|\varrho_1(M,\zeta)-\varrho_1(M_1,\zeta) < \mathrm{const}\cdot r_{MM_1}^{h^*}$$

où $h^* < h_1$. Par conséquent le second des deux quasi-potentiels (136) admet une dérivée bornée par rapport à la variable t et des dérivées secondes spatiales bornées dans Ω. Ce potentiel et ces dérivées premières spatiales vérifient donc la condition de Lipschitz

$$(138)\qquad \begin{aligned}|V^{**}(A,t)-V^{**}(A,t_1)| &< \mathrm{const}\cdot|t-t_1|,\\ |V^{**}_{x_\alpha}(A,t)-V^{**}_{x_\alpha}(A_1,t)| &< \mathrm{const}\cdot r_{AA_1}.\end{aligned}$$

Il suffit par conséquent d'étudier le premier quasi-potentiel (36). Nous écrivons donc

$$(139)\qquad V^*(A,t)-V^*(A,t_1) = \int_{t_1}^t\iiint_\Omega w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau+ \\ +\int_0^{t_1}\iiint_\Omega [w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)-w^{B,\tau}(A,t_1;B,\tau)]\,\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau$$

et nous aurons pour la première I_1 de ces intégrales la limitation

$$(140)\qquad |I_1| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varphi|\,|t-t_1|^{1-\mu'}\qquad (0<\mu'<1).$$

Pour étudier la seconde I_2 des intégrales (139), considérons une sphère Δ de centre A, de rayon r_Δ et nous décomposons l'intégrale I_2 en une somme $I_2 = I_2^{\Delta'} + I_2^{\Omega-\Delta'}$ d'intégrales étendues à l'ensemble Δ' à l'intérieur de la sphère Δ et à l'ensemble extérieur $\Omega - \Delta'$. En appliquant les inégalités (21) et (91), nous pouvons écrire

$$(141)\qquad |I_2^{\Delta'}| < \mathrm{const}\cdot r_\Delta^{2\mu} \quad (0 < \mu < 1), \qquad |I_2^{\Omega-\Delta'}| < \mathrm{const}\cdot r_\Delta^{2\mu-2}|t-t_1|.$$

Nous posons maintenant $r_\Delta = \mathrm{const}\cdot|t-t_1|^a$, où le plus avantageux est d'admettre $a = \frac{1}{2}$, et nous arriverons à la thèse (134) du théorème 5.

On démontrera la seconde partie (135) de cette thèse d'une façon connue, en utilisant les inégalités (34) et (120).

4. Intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass. Nous appelons intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass, relativement à l'équation (1), l'intégrale

$$(142)\qquad J(A,t,\tau) = \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)\,dB.$$

Si $\varrho(B,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable dans la région $[B\,\epsilon\,\Omega,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$, la fonction (142) est déterminée et vérifie l'équation (1) si $A\,\epsilon\,\Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

THÉORÈME 6. *Si la fonction $\varrho(B,\tau)$ est bornée et continue dans la région $[B\,\epsilon\,\Omega,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$, l'intégrale de Poisson-Weierstrass (142) tend vers la limite*

$$(143)\qquad \lim_{\tau\to t} J(A,t,\tau) = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}}\,\varrho(A,t)$$

uniformément dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω.

Démonstration. D'après la formule (6), nous pouvons écrire l'intégrale de Poisson-Weierstrass (142) sous la forme d'une somme des deux intégrales suivantes

$$(144)\qquad J_1(A,t,\tau) = \iiint\limits_{\Omega(B)} w^{B,\tau}(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)\,dB,$$

$$(145)\qquad J_2(A,t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \iiint\limits_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\bar{\varrho}(M,\zeta,\tau)\,dM\,d\zeta$$

où l'on a posé

$$(146)\qquad \bar{\varrho}(M,\zeta,\tau) = \iiint\limits_{\Omega(B)} \Phi(M,\zeta;B,\tau)\varrho(B,\tau)\,dB.$$

L'intégrale (144) a été étudiée dans notre travail [3], où nous avons démontré la propriété limite suivante:

$$(147)\qquad \lim_{\tau\to t} J_1(A,t,\tau) = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A,t)|}}\,\varrho(A,t),$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω. Pour étudier la seconde intégrale (145), appliquons les limitations (19) et (21). Nous aurons alors

$$|\bar{\varrho}(M,\zeta,\tau)| < \sup|\varrho| \iiint\limits_{\Omega(B)} \frac{\mathrm{const}}{(\zeta-\tau)^{\mu_1}}\cdot\frac{\partial B}{r_{MB}^{n+2-2\mu_1-h_1}} < \frac{\mathrm{const}\cdot\sup|\varrho|}{(\zeta-\tau)^{\mu_1}}$$

$(1-\frac{1}{2}h_1 < \mu_1 < 1)$ et

$$(148)\qquad |J_2(A,t,\tau)| < \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\mathrm{const}\cdot\sup|\varrho|\,d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu}(\zeta-\tau)^{\mu_1}} \iiint\limits_{\Omega(M)} \frac{\partial M}{r_{AM}^{n-2\mu}} < \mathrm{const}\cdot\sup|\varrho|\,(t-\tau)^{1-(\mu+\mu_1)}$$

μ étant arbitrairement choisi à l'intérieur de l'intervalle (0,1). Or, μ_1 étant fixé, nous pouvons toujours choisir μ suffisamment petit pour qu'on ait $1-(\mu+\mu_1) > 0$, donc

$$(149)\qquad \lim_{\tau\to t} J_2(A,t,\tau) = 0$$

uniformément par rapport à $A\,\epsilon\,\Omega^*$.

Les propriétés limites (147), (49) établissent la thèse (143) du théorème 6.

Si la fonction $\varrho(B,\tau)$ n'était que bornée et intégrable dans la région $[B\,\epsilon\,\Omega,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$, la propriété (149) resterait vraie, mais on ne pourrait pas affirmer la vérité de la propriété (147). Cependant, d'après la limitation (28), l'intégrale de Poisson-Weierstrass (142) vérifie l'inégalité

$$(150)\qquad |J(A,t,\tau)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\sup|\varrho| \iiint\limits_{\Omega} \frac{dB}{r_{AB}^{n-2\mu}}$$

(où $0 < \mu < 1$) à singularité faible, si $\tau \to t$.

Les propriétés démontrées des intégrales de l'équation parabolique générale (1) sont importantes dans l'étude de plusieurs problèmes aux limites relatifs à cette équation.

5. Supplément. Soit l'intégrale de Weierstrass

$$(a)\qquad I(t) = \iiint\limits_{K} t^{-n/2}\exp\left[-\frac{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta}{4t}\right] dv(\xi_1,\ldots,\xi_n)$$

(où $a^{\alpha\beta}$ sont des constantes) étendue à la sphère K de rayon unité et de centre à l'origine des coordonnées rectangulaires $\xi_1, \ldots, \xi_n$. On démontre (voir notre travail [3]) la propriété limite suivante de l'intégrale (α):

$$(\beta)\qquad \lim_{t\to 0} I(t) = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}|}}.$$

Calculons la limite de l'intégrale (α) d'une autre façon, en écrivant

$$I(t) = \int_0^1 t^{-n/2}\Big[\iint_A \exp\Big[-\frac{\varrho^2}{4t}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta\Big]\,d\alpha\Big]\,\varrho^{n-1}d\varrho$$

où $\xi'_\alpha = \varrho\xi_\alpha$ sont les coordonnées des points de la surface A de la sphère K. Nous aurons

$$I(t) = 2^{n-1}\iint_A \vartheta^{-n/2}\Big[\int_0^{\vartheta/4t} q^{n/2-1}e^{-q}dq\Big]\,d\omega(\xi'_1, \ldots, \xi'_n)$$

en posant $\vartheta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta$. Il résulte

$$(\gamma)\qquad \lim_{t\to 0} I(t) = 2^{n-1}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\iint_A \vartheta^{-n/2}d\omega.$$

Nous en déduirons, par comparaison avec la valeur (β), l'égalité

$$(\delta)\qquad \iint_A \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta\Big]^{-n/2} d\omega(\xi'_1, \ldots, \xi'_n) = \frac{\omega_n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}|}}.$$

Travaux cités

[1] G. Giraud, *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique*, C. R. 195, Paris 1932, p. 98-100.

[2] F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Mathematical Journal 13, Durham, U. S. A. 1946, p. 61-70.

[3] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5, Napoli 1956.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1956

Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné

par M. Krzyżański (Kraków)

1. Dans la présente note je vais établir certaines évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1)\qquad \mathcal{F}[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(X,t)u'_{x_k} + c(X,t)u - u'_t = f(X,t),$$

en appliquant les résultats de mes recherches antérieures relatives aux solutions de l'équation (1) déterminées dans un domaine non borné (voir [5] et [6]). Ces évaluations constituent un perfectionnement de celles que j'ai effectuées dans les travaux cités (¹).

Soit $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un point variable de l'espace $\mathcal{E}_m$ à m dimensions et t le temps. Nous désignons par (X, t) ou $P(X, t)$ le point $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ de l'espace-temps $\mathcal{E}_{m+1}$ à $m+1$ dimensions. Ceci étant convenu, soit D un domaine non borné de l'espace $\mathcal{E}_{m+1}$, situé dans le demi-espace $t \geqslant 0$ et dont la frontière FD se compose des domaines non bornés S_0 et S_T à m dimensions des hyperplans $t = 0$ et $t = T$, et d'une surface σ qui n'est tangente à aucune caractéristique $t = \mathrm{const}$ de (1). Aux points de S_0 la normale intérieure à FD a la direction de l'axe des t; elle a la direction opposée aux points de S_T. Désignons par Σ l'ensemble $S_0 + \sigma$.

Nous supposons que les coefficients a_{ij} et b_k $(i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ sont continus et bornés dans le domaine D. La forme $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)\lambda_i\lambda_j$ y est supposée définie positive, le coefficient $c(X, t)$ borné supérieurement et la fonction $f(X, t)$ continue.

(¹) Pour les autres méthodes d'évaluation des solutions des équations paraboliques du second ordre et des ordres supérieurs voir [1], [9], [10].