L'ensemble complémentaire de E_f est aussi une somme de domaines $D_{1f}, D_{2f}, \ldots$ On sait [2] que la fonction

$$\int_E \frac{d\mu^*(Q)}{PQ} - \gamma$$

est la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_{if}, $i = 1, 2, 3, \ldots$ avec la valeur $f(P)$ sur sa frontière (et 0 à l'infini dans le cas $i = 1$).

Lorsque $E_f = E$ on a (voir (13))

$$\gamma = \frac{1}{d(E)} - \int_E f(Q)\,d\mu(Q) = \frac{1}{d(E)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(Q_j).$$

Nous avons donc obtenu le

THÉORÈME 2. *Lorsque $E_f = E$ la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_i, $i = 1, 2, \ldots$ avec la valeur $f(P)$ sur sa frontière et 0 à l'infini (dans le cas $i = 1$) est la limite de la suite*

$$u_n^*(P) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{PQ_j^*} + f(Q_j)\right] - \frac{1}{d(E)}, \qquad P \bar{\epsilon} E,$$

quand $n \to \infty$, où les points $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*$ appartiennent à la suite de points extrémaux (8) *et les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ à la suite* (1).

Travaux cités

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.

[2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Pol. Math. 1 (2) (1955), p. 418-429.

[3] F. Leja, *Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, ce volume, p. 8-13.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1956

Certains théorèmes concernant la répartition des points extrémaux dans les ensembles plans

par J. Górski et J. Siciak (Kraków)

Introduction. Soit E un ensemble borné et fermé,

$$E = \sum_{j=1}^{p} E_j, \quad E_j E_k = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k,$$

où E_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, est un continu non dégénéré et $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue sur E. Nous supposons que E est la frontière d'un domaine $D(E)$ contenant le point $z = \infty$. Soit

$$\omega = |z - \zeta| \exp[-f(z) - f(\zeta)]$$

et $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un système de $n+1$ points de l'ensemble E. Désignons par $V(x^{(n)}, \omega)$ le produit

$$V(x^{(n)}, \omega) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(x_i, x_k).$$

Un système de $n+1$ points

(1) $$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$$

appartenant à E est appelé n-ième système de points extrémaux de l'ensemble E par rapport à la fonction ω lorsque

$$V(\eta^{(n)}, \omega) \geqslant V(x^{(n)}, \omega)$$

pour chaque autre système $x^{(n)}$ de points de l'ensemble E.

On sait [3] que, si $a_n(E_k)$ désigne le nombre des points extrémaux du n-ième système qui appartiennent à E_k, les limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(E_k)}{n} = a_k(f), \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

existent. On a

(2) $$a_k(f) \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{p} a_k(f) = 1.$$

Dans l'application de la théorie des points extrémaux au problème de la construction d'une fonction réalisant la représentation conforme d'un domaine multiplement connexe [3] il est important de savoir si (I) les fonctionnelles $a_k(f)$, $k=1,2,\ldots,p$ sont continues par rapport à $f(z)$, (II) étant donnés p nombres a_k, $k=1,2,\ldots,p$, remplissant les conditions (2) il existe une fonction $f(z)$, définie et continue sur E, telle qu'on ait

$$a_k(f)=a_k,\quad k=1,2,\ldots,p.$$

Ces questions sont particulièrement intéressantes dans le cas où $f(z)=\lambda_k=\text{const}$, lorsque $z\in E_k$, $k=1,2,\ldots,p$.

Désignons par E_f l'ensemble des points d'accumulation de tous les systèmes extrémaux (1) et soit $\Phi(z,E,\omega)$ la fonction extrémale liée à l'ensemble E et la fonction ω. On sait [3] que

1° $\log\Phi(z,E,\omega)$ est une fonction continue sur le plan ouvert harmonique en dehors de l'ensemble E_f. À l'infini $\Phi(z,E,\omega)$ a un pôle du premier ordre,

2° $$\log\Phi(z,E,\omega)\begin{cases}=f(z) & \text{lorsque}\quad z\in E_f,\\ \leqslant f(z) & \text{pour}\quad z\in E.\end{cases}$$

La continuité des fonctionnelles $a_k(f)$ dans un cas particulier. Soit C_k, $k=1,2,\ldots,p$, une courbe régulière de Jordan contenant le continu E_k dans son intérieur et les autres continus E_j, $j\neq k$ dans son extérieur. Il suit de 1° et 2°

(3) $$\log\Phi(z,E,\omega)=G(z,E_f)+u(z,E_f,f),$$

où $G(z,E_f)$ est la fonction de Green du domaine $D(E_f)$ (dont la frontière est l'ensemble E_f) avec un pôle à l'infini et $u(z,E_f,f)$ est la solution du problème de Dirichlet pour le domaine $D(E_f)$ et la fonction $f(z)$.

Désignons par $\omega_k(\log\Phi)$, $\omega_k(G)$ et $\omega_k(u)$ les accroissements de la fonction harmonique conjuguée de $\log\Phi(z,E,\omega)$, de $G(z,E_f)$ resp. de $u(z,E_f,f)$ quand z décrit la courbe C_k dans le sens positif par rapport à son extérieur. D'après (3) on a

(4) $$\omega_k(\log\Phi)=\omega_k(G)+\omega_k(u).$$

On sait [3] que

(5) $$\omega_k(\log\Phi)=-2\pi a_k(f),\quad k=1,2,\ldots,p.$$

Mais $\omega_k(G)=-2\pi a_k(0)$ où $a_k(0)$ désigne le nombre (2) quand $f(z)\equiv 0$, alors

(6) $$a_k(f)=a_k(0)+\beta_k(f),\quad k=1,2,\ldots,p,$$

où $\beta_k(f)=-\dfrac{1}{2\pi}\omega_k(u)$. Puisque $\sum_{k=1}^{p}a_k(f)=\sum_{k=1}^{p}a_k(0)=1$, on a $\sum_{k=1}^{p}\beta_k(f)=0$.

Pour prouver la continuité de $a_k(f)$ dans le cas où $E_f=E$ il suffit d'examiner la continuité de $\beta_k(f)$, $k=1,2,\ldots,p$.

Théorème. *Soit C la classe des fonctions $f(z)$ continues sur E telles que $E_f=E$. Les fonctionnelles $a_k(f)$, $k=1,2,\ldots,p$, sont continues dans C.*

Démonstration. Désignons par K la classe des fonctions définies et continues sur E et par $u(z,f)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine $D(E)$ et la fonction frontière $f(z)\in K$. L'opérateur $D[f]=u(z,f)$ possède les propriétés suivantes:

(a) $$D[af+\beta g]=aD[f]+\beta D[g]$$

où $f(z)$ et $g(z)\in K$, a et β sont des nombres réels arbitraires,

(b) $$D[f]=\text{const}\quad\text{lorsque}\quad f(z)\equiv\text{const},$$

(c) $D[f]$ est uniformément continu dans $\overline{D(E)}$, c'est-à-dire lorsque $f(z)$ et $g(z)\in K$, à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta>0$ tel que l'inégalité $\sup_{z\in E}|f(z)-g(z)|<\delta$ entraîne $|D[f]-D[g]|<\varepsilon$ pour $z\in\overline{D(E)}$.

Soit $v(z,f)$ la fonction harmonique conjuguée de $u(z,f)$. L'accroissement $\omega_k(u)$ de la fonction $v(z,f)$ quand z décrit la courbe C_k dans le sens positif par rapport à son extérieur sera aussi désigné par $\omega_k(f)$, puisque $\omega_k(u)$ est déterminé par la fonction $f(z)$. On a

(7) $$\omega_k(f)=\int_{C_k}dv(z,f),\quad k=1,2,\ldots,p.$$

La fonctionnelle $\omega_k(f)$ remplit les conditions suivantes:

(a′) $$\omega_k(af+\beta g)=a\omega_k(f)+\beta\omega_k(g),$$

où a et β sont des constantes,

(b′) $$\omega_k(f)\equiv 0\quad\text{lorsque}\quad f(z)\equiv\text{const},$$

(c′) $\omega_k(f)$ est continue pour $f(z)\in K$, c'est-à-dire à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta>0$ tel que l'inégalité $\sup_{z\in E}|f(z)-g(z)|<\delta$, où $f(z)$ et $g(z)\in K$, entraîne $|\omega_k(f)-\omega_k(g)|<\varepsilon$.

Les propriétés (a′) et (b′) résultent de (a), (b) et (7). La propriété (c′) résulte de la continuité uniforme des opérateurs $D_x[f]=\partial u(z,f)/\partial x$ et $D_y[f]=\partial u(z,f)/\partial y$, $f(z)\in K$, dans chaque domaine Δ, $\bar{\Delta}\subset D(E)$. En effet, lorsque $\varepsilon>0$ et $\sup_{z\in E}|f(z)-g(z)|<\delta$, on a d'après (7)

$$|\omega_k(f)-\omega_k(g)|=\Big|\int_{C_k}d[v(z,f)-v(z,g)]\Big|$$
$$=\Big|\int_{C_k}[u_y(z,g)-u_y(z,f)]dx+[u_x(z,f)-u_x(z,g)]dy\Big|<\varepsilon\cdot\text{longuer }C_k.$$

Dans le cas où $f(z) = \lambda_k = \text{const}$ pour $z \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, la continuité de $\omega_k(f)$ est une conséquence de (a′) et (b′). En effet, soit

$$(8) \qquad g_j(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad z \in E_j, \\ 0 & \text{pour} \quad z \in E_k,\ k \neq j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Puisque $f(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j$ il suit de (a′) et (b′) qu'on a

$$\omega_k(f) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \omega_k(g_j), \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Les nombres $\omega_{kj} = \omega_k(g_j)$ dépendent seulement de l'ensemble E, d'où l'on conclut que $\omega_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, p$ sont continues.

Nous avons prouvé la continuité de la fonctionnelle $\omega_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, dans la classe K et, en même temps, d'après (4), (5) et (6) nous avons établi notre théorème. Observons que la classe des fonctions pour lesquelles $E_f = E$ n'est pas vide. À cette classe appartiennent par exemple toutes les fonctions $f(z) = \lambda_k = \text{const}$ pour $z \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, remplissant la condition

$$\max_{i=1,\ldots,p} \lambda_i - \min_{i=1,\ldots,p} \lambda_i \leqslant A_E,$$

où la constante A_E dépend seulement de l'ensemble E.

Solution du problème (II). Pour répondre à la question (II), p. 22, nous rappellerons quelques propriétés connues des nombres $\omega_{kj} = \omega_k(g_j)$. On a

$$(9) \qquad \omega_{ki} < 0, \quad k \neq i \quad \text{et} \quad \omega_{ii} > 0 \quad \text{pour} \quad k, i = 1, 2, \ldots, p.$$

Démonstration. Dans chaque domaine Δ, $\bar{\Delta} \subset D(E)$ la fonction analytique $u(z, g_j) + iv(z, g_j)$ a seulement un nombre fini de points critiques, d'où il résulte qu'on a dans Δ

$$u_x^2 + u_y^2 > 0,$$

à l'exception d'un nombre fini de points.

Lorsque $0 < c < 1$ et c est suffisamment petit, la ligne de niveau L: $u(z, g_j) = c$ se compose de $p-1$ courbes disjointes C_k', $k = 1, 2, \ldots, p$, $k \neq j$. Chacune de ces courbes C_k' entoure un des continus E_k, $k \neq j$. On peut choisir c de telle manière qu'on ait

$$(10) \qquad u_x^2 + u_y^2 > 0$$

pour $z \in L$. On a

$$(11) \qquad \omega_{kj} = \omega_k(g_j) = \int_{C_k'} dv = \int_{C_k'} \frac{dv}{ds}\, ds = -\int_{C_k'} \frac{du}{dn}\, ds,$$

où la normale n est dirigée vers l'intérieur de domaine $D(E)$.

D'autre part on a $du/dn > 0$ pour $z \in C_k'$, $k \neq j$. En effet, dans le domaine borné par $C_1', C_2', \ldots, C_{j-1}', E_j, C_{j+1}', \ldots, C_p'$, on a $c < u(z, g_j) < 1$, donc $du/dn \geqslant 0$, $z \in C_k'$, $k \neq j$. Il n'existe pas de point $z \in C_k'$ où $du/dn = 0$; dans le cas contraire on aurait en ce point $du/ds = 0$, donc $u_x^2 + u_y^2 = 0$, ce qui est en contradiction avec (10). Alors d'après (11) $\omega_{kj} < 0$, $k \neq j$. Puisque $\sum_{k=1}^{p} \omega_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \omega_k(g_j) = 0$, on a $\omega_{jj} > 0$.

On a le lemme connu:

Tous les mineurs d'ordre $p-1$ que l'on obtient en supprimant la s-ième ligne et la s-ième colonne $(1 \leqslant s \leqslant p)$ dans la matrice $[\omega_{kj}]$ remplissant la condition (9), sont différents de zéro.

En effet, dans le cas contraire le système de $p-1$ équations homogènes

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{p} \omega_{kj} x_j = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, p$$

posséderait une solution non nulle $\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{s-1}, \mathring{x}_{s+1}, \ldots, \mathring{x}_p$. Le plus grand parmi les nombres $|\mathring{x}_k|$, $k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, p$, étant désigné par $|\mathring{x}_l|$, $1 \leqslant l \leqslant p$, $l \neq s$, on aurait

$$\omega_{ll} \mathring{x}_l = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{p} \omega_{lj} \mathring{x}_j$$

d'où, d'après (9)

$$\omega_{ll} |\mathring{x}_l| \leqslant \Big(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s, l}}^{p} \omega_{lj}\Big) |\mathring{x}_l|,$$

donc

$$\omega_{ll} \leqslant -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s, l}}^{p} \omega_{lj}.$$

Mais ceci est impossible, car $\sum_{j=1}^{p} \omega_{lj} = 0$ et $\omega_{ls} < 0$.

On en conclut que, étant donnés p nombres réels w_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$, il existe une fonction $f(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j$, déterminée à une constante additive près, telle que $\omega_k(f) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Il est maintenant aisé de formuler une réponse à la question (II), p. 22, suffisante pour compléter les raisonnements donnés dans le travail [3].

Soit $\alpha_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$. Posons $\alpha_k = \alpha_k(0) + \beta_k$, où $\alpha_k(0)$ est défini à la p. 22. On a $\sum_{k=1}^{p} \beta_k = 0$. Soit $w_k = -2\pi\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$. De la conclusion mentionnée il résulte qu'il existe une fonction $f(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j$ telle que $\omega_k(f) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$. On sait [3] qu'il existe un nombre $\varrho_0 > 0$ tel que l'ensemble $E_{\varrho f}$ correspondant à la fonction ϱf, $0 < \varrho < \varrho_0$ soit égal à E. On a $\omega_k(\varrho f) = \varrho_k w_k = -2\pi\varrho\beta_k$. Alors, étant donnés p nombres α_k, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$ il existe une fonction $f(z) = \lambda_k = \text{const}$ pour $z \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, telle que $\alpha_k(f) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, si la différence $\max\limits_{k=1,\ldots,p} [\alpha_k - \alpha_k(0)] - \min\limits_{k=1,\ldots,p} [\alpha_k - \alpha_k(0)]$ est suffisamment petite.

La continuité des fonctionnelles $\alpha_k(f)$ dans le cas général. Supposons que l'ensemble E borné et fermé possède la propriété suivante: Chaque point $z \in E$ appartient à un continu non dégénéré $\subset E$.

Rappelons d'abord quelques théorèmes connus:

1° *La limite*

$$\lim_{n\to\infty} [V(\eta^{(n)}, \omega)]^{2/n(n+1)} = v(E, f)$$

dite écart de l'ensemble E, *existe* [3].

2° $v(E, f)$ *varie d'une manière continue avec la fonction* $f(z)$, [3].

3° *Pour chaque fonction définie et continue sur* E *il existe une répartition unique* μ *de la masse unité sur* E *telle qu'on ait* [2]

$$\log\frac{1}{v(E, f)} = \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu\, d\mu + 2\int_E f\, d\mu, \tag{12}$$

$$\log\Phi(z, E, f) = \int_E \log|z-\zeta|\, d\mu + \log\frac{1}{v(E, f)} - \int_E f\, d\mu. \tag{13}$$

Supposons que la suite des fonctions $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, définies et continues sur E, converge uniformément dans E vers la fonction continue $f(z)$. Pour chaque fonction $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, on peut construire la fonction extrémale $\log\Phi(z, E, f_n)$, il existe donc une répartition μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, de la masse unité sur E telle que

$$\log\frac{1}{v(E, f_n)} = \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu_n\, d\mu_n + 2\int_E f_n\, d\mu_n, \tag{14}$$

$$\log\Phi(z, E, f_n) = \int_E \log|z-\zeta|\, d\mu_n + \log\frac{1}{v(E, f_n)} - \int_E f_n\, d\mu_n.$$

Des formules (12) et (14) on obtient

$$\log\frac{1}{v(E, f_n)} - \log\frac{1}{v(E, f)}$$
$$= \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu_n\, d\mu_n - \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu\, d\mu + 2\int_E f_n\, d\mu_n - 2\int_E f\, d\mu.$$

Posons $\sigma_n = \mu_n - \mu$. On a

$$\log\frac{1}{v(E, f_n)} - \log\frac{1}{v(E, f)} = 2\int_E\left[\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu + f\right] d\sigma_n -$$
$$-2\int_E f\, d\sigma_n + 2\int_E f_n\, d\mu_n - 2\int_E f\, d\mu + \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_n\, d\sigma_n$$
$$= \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_n\, d\sigma_n + 2\int_E [f_n - f]\, d\mu_n + 2\int_E\left[\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu + f\right] d\sigma_n.$$

Observons maintenant que, en vertu de 2° et de la convergence uniforme $f_n(z) \underset{E}{\rightrightarrows} f(z)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \log\frac{v(E, f)}{v(E, f_n)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E [f_n - f]\, d\mu_n = 0,$$

donc il résulte de la formule précédente que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2\int_E\left[\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu + f\right] d\sigma_n + \int_E\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_n\, d\sigma_n\right\} = 0. \tag{15}$$

Pour abréger l'écriture posons

$$\varphi(z) = \int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu + f(z) \quad \text{et} \quad \log\frac{1}{v(E, f)} - \int_E f\, d\mu = c.$$

D'après (13) et (2°), p. 22, on a

$$\varphi(z) = c \quad \text{pour} \quad z \in E_f \quad \text{et} \quad \varphi(z) \geqslant c \quad \text{dans} \quad E,$$

donc

$$2\int_E\left[\int_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu + f(z)\right] d\sigma_n = 2\int_E \varphi(z)\, d\sigma_n$$
$$\geqslant c\sigma_n(E_f) + c\sigma_n(E - E_f) = c\sigma_n(E).$$

Mais $\sigma_n(E) = \mu_n(E) - \mu(E) = 0$, donc l'expression $2\int_E \varphi(z)\, d\sigma_n$ est $\geqslant 0$.

Puisque $\sigma_n(E) = 0$, l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma_n) = \int\limits_E\int\limits_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\sigma_n d\sigma_n$$

est toujours $\geqslant 0$ (voir [1], p. 61), alors il suit de (15) qu'on a

(16) $$\lim_{n\to\infty} I(\sigma_n) = 0,$$

(17) $$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E \varphi(z)\,d\sigma_n = 0.$$

D'après le théorème du choix [1] on peut extraire de la suite $\{\sigma_n\}$ une suite partielle qui converge vers une fonction σ. Puisque la fonction $\varphi(z)$ est continue sur E, il résulte de (17) que

(18) $$\int\limits_E \varphi(z)\,d\sigma = 0.$$

L'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ est égale à 0. En effet, si l'on avait

(19) $$I(\sigma) = a > 0,$$

il viendrait d'après (18)

$$\int\limits_E\Big[\int\limits_E \varphi(z)\,d\sigma\Big]d\sigma = 0.$$

Mais, puisque $\sigma(E) = 0$, on aurait

$$\int\limits_E\Big[\int\limits_E \varphi(z)\,d\sigma\Big]d\sigma = \int\limits_E\Big[\int\limits_E \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu\,d\sigma + \int\limits_E f\,d\sigma\Big]d\sigma = \int\limits_E a\,d\mu = a > 0$$

ce qui est en contradiction avec (18). Donc $I(\sigma) = 0$, d'où il résulte (voir [1], p. 61) que $\sigma \equiv 0$.

Donc la limite σ de chaque suite partielle convergente, extraite de la suite $\{\sigma_n\}$, est identiquement nulle d'où il résulte que la suite $\{\sigma_n\}$ converge vers 0.

On a (voir la formule (8))

$$\int\limits_E g_j\,d\mu = a_j(f) \quad \text{et} \quad \int\limits_E g_j\,d\mu_n = a_j(f_n),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} a_j(f_n) = a_j(f), \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

c'est-à-dire les fonctionnelles $a_j(f)$ sont continues.

Travaux cités

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.

[2] J. Górski, *Sur certaines propriétés de points extrémaux liés à un domaine plan*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 32-36.

[3] F. Leja, *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 319-342.

Reçu par la Rédaction le 24. 4. 1956