Les suites de points extrémaux liés aux ensembles dans l'espace à 3 dimensions

par J. Górski (Kraków)

Introduction. Dans le travail [3] M. F. Leja a donné la définition d'une suite de points extrémaux liés aux ensembles plans avec quelques applications à la représentation conforme. On peut aisément étendre de la manière suivante quelques uns de ces résultats au cas de l'espace à 3 pimensions.

Soit E un ensemble borné et fermé dont la capacité $d(E)$ est positive. (Pour la définition de la capacité d'un ensemble voir le travail [1], p. 46.) Soit Q_1 un point quelconque de E. Soit le point $Q_2 \epsilon E$ défini par la formule

$$1/Q_2Q_1 = \min_{Q \epsilon E}(1/QQ_1),$$

(où Q_2Q_1 est la distance de Q_2 et Q_1) le point $Q_3 \epsilon E$ par la condition

$$\frac{1}{Q_3Q_2} + \frac{1}{Q_3Q_1} = \min_{Q \epsilon E}\left[\frac{1}{QQ_2} + \frac{1}{QQ_1}\right]$$

etc. En général, lorsque les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ sont définis, soit $Q_n \epsilon E$ un point tel que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{Q_nQ_j} = \min_{Q \epsilon E} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{QQ_j}.$$

On obtient alors une suite infinie $\{Q_n\}$ de points appartenant à E

$$(1) \qquad Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n, \ldots$$

Nous l'appellerons suite de points extrémaux liés à l'ensemble E.

Potentiel d'équilibre. Désignons par $\sigma_n = \sigma_n(\varDelta)$, où $\varDelta$ est un ensemble borelien quelconque, la répartition de la masse unité sur E définie par les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de la suite (1), c'est-à-dire une fonction d'ensemble $\varDelta$ non négative, définie par la formule suivante:

$$\sigma_n(\varDelta) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \varDelta \text{ ne contient aucun des points } Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \\ k/n & \text{lorsque } \varDelta \text{ contient } k \text{ des points } Q_1, Q_2, \ldots, Q_n. \end{cases}$$

D'après le théorème du choix (voir [1]) on peut extraire de la suite $\{\sigma_n\}$ une suite partielle $\{\sigma_{n_k}\}$ convergente vers une fonction d'ensemble $\sigma = \sigma(\varDelta)$. Observons qu'on a $\sigma_n(E) = \sigma(E) = 1$.

On sait [1], p. 33-38, qu'il existe une répartition μ unique de la masse 1 sur E dite répartition d'équilibre telle qu'on a

$$(2) \qquad I(\mu) = \int_E\int_E \frac{d\mu(P)\,d\mu(Q)}{PQ} = \inf_{\tau \epsilon M} \int_E\int_E \frac{d\tau(P)\,d\tau(Q)}{PQ} = \frac{1}{d(E)}$$

où M est l'ensemble de toutes les répartitions de la masse 1 sur E (intégrale de Stieltjes-Lebesgue-Radon).

Posons

$$s_n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_jQ_k}.$$

D'après la définition des points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ on a

$$(3) \qquad s_n \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{QQ_j} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{QQ_j} + \ldots + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{QQ_j} + \frac{1}{QQ_1}$$

pour chaque position du point Q dans E.

Partageons l'ensemble E en s ensembles boreliens $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_s$ et supposons tout d'abord que $Q \epsilon \varDelta_1$. Multiplions l'inégalité (3) par $\mu(\varDelta_1)$. Supposons maintenant que $Q \epsilon \varDelta_2$ et multiplions (3) par $\mu(\varDelta_2)$ etc. Supposons enfin que $Q \epsilon \varDelta_s$ et multiplions (3) par $\mu(\varDelta_s)$. Formons la somme des s inégalités ainsi obtenues. Lorsque s tend vers l'infini et le diamètre de tous les ensembles $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_s$ tend vers zéro on obtient (en observant que $\mu(\varDelta_1) + \ldots + \mu(\varDelta_s) = 1$) l'inégalité

$$s_n \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_E \frac{d\mu(Q)}{QQ_j} + \ldots + \sum_{j=1}^{2} \int_E \frac{d\mu(Q)}{QQ_j} + \int_E \frac{d\mu(Q)}{QQ_1}.$$

Mais on sait [1], p. 33, que le potentiel d'équilibre

$$u(P) = \int_E \frac{d\mu(Q)}{QP}$$

est $\leqslant 1/d(E)$ sur E, il résulte donc de l'inégalité précédente qu'on a

$$(4) \qquad s_n \leqslant (n-1)\tfrac{1}{2}n/d(E).$$

D'autre part

$$(5) \qquad s_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{Q_jQ_k}.$$

Soit N un nombre naturel quelconque. Posons

$$\frac{1}{[Q_jQ_k]_N} = \begin{cases} 1/Q_jQ_k & \text{si} \quad 1/Q_jQ_k \leqslant N, \\ N & \text{si} \quad 1/Q_jQ_k > N. \end{cases} \tag{6}$$

De (5) et (6) résulte l'inégalité suivante

$$\frac{2}{n^2}s_n \geqslant \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{[Q_jQ_k]_N} - \frac{N}{n}. \tag{7}$$

Le premier terme du second membre peut être représenté par l'intégrale

$$\int_E\int_E \frac{1}{[QP]_N}\,d\sigma_n(P)\,d\sigma_n(Q).$$

De (4) et (7) on déduit l'inégalité

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{d(E)} \geqslant \frac{2}{n^2}s_n \geqslant \int_E\int_E \frac{1}{[PQ]_N}\,d\sigma_n\,d\sigma_n - \frac{N}{n}.$$

En maintenant N fixe faison tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1, n_2, \ldots$ définies plus haut. On obtient l'inégalité

$$\frac{1}{d(E)} \geqslant \int_E\int_E \frac{d\sigma\,d\sigma}{[PQ]_N}$$

et lorsque $N \to \infty$ on a $I(\mu) = 1/d(E) \geqslant I(\sigma)$.

D'autre part d'après (2) on a $I(\sigma) \geqslant I(\mu)$, donc $I(\sigma) = I(\mu)$ et, puisque la répartition d'équilibre μ est unique, on a $\sigma \equiv \mu$. Alors la limite de chaque suite partielle convergente extraite de la suite $\{\sigma_n\}$ est égale à μ, d'où il résulte que chaque suite partielle convergente extraite de la suite $u_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{PQ_j}$ est convergente vers la même limite

$$\int_E \frac{d\mu(Q)}{PQ}, \qquad P\bar{\epsilon}E,$$

donc la suite $\{u_n(P)\}$ est convergente pour $P\bar{\epsilon}E$. Nous obtenons ainsi le

THÉORÈME 1. *Le potentiel d'équilibre de l'ensemble E est la limite de la suite*

$$u_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{PQ_j}$$

quand $P\bar{\epsilon}E$ et $n \to \infty$, où les points Q_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ appartiennent à la suite (1).

Applications au problème de Dirichlet. Soit $f(Q)$ une fonction définie et continue sur E et Q_1^* un point quelconque de l'ensemble E. Soit le point Q_2^* défini par la formule

$$\frac{1}{Q_2^*Q_1^*} - f(Q_2^*) - f(Q_1^*) = \min_{Q\epsilon E}\left[\frac{1}{QQ_1^*} - f(Q) - f(Q_1^*)\right],$$

le point Q_3^* par la condition

$$\frac{1}{Q_3^*Q_2^*} + \frac{1}{Q_3^*Q_1^*} - 2f(Q_3^*) - f(Q_2^*) - f(Q_1^*)$$
$$= \min_{Q\epsilon E}\left[\frac{1}{QQ_2^*} + \frac{1}{QQ_1^*} - 2f(Q) - f(Q_2^*) - f(Q_1^*)\right]$$

etc. En général lorsque les points $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_{n-1}^*$ sont définis, soit $Q_n^* \epsilon E$ un point tel que

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{Q_n^*Q_j^*} - (n-1)f(Q_n^*) - \sum_{j=1}^{n-1}f(Q_j^*)$$
$$= \min_{Q\epsilon E}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{QQ_j^*} - (n-1)f(Q) - \sum_{j=1}^{n-1}f(Q_j^*)\right].$$

On obtient alors une suite infinie

$$Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, \ldots, Q_n^*, \ldots \tag{8}$$

de points appartenant à E qu'on appelle suite de points extrémaux liés à l'ensemble E et à la fonction $f(Q)$.

Désignons par $\sigma^* = \sigma_n^*(\Delta)$ la répartition de la masse 1 sur E définie par les points $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*$ comme à la page 14. Soit $\sigma^* = \sigma^*(\Delta)$ la limite d'une suite partielle $\{\sigma_{n_k}^*\}$ convergente extraite de la suite $\{\sigma_n^*\}$. On sait [2] qu'il existe une répartition unique μ^* de la masse 1 sur E telle qu'on a

$$I^*(\mu^*) = \int_E\int_E \frac{1}{PQ}\,d\mu^*(P)\,d\mu^*(Q) - 2\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) = \inf_{\tau\epsilon M} I^*(\tau) \tag{9}$$

où M est l'ensemble des toutes les répartitions de la masse 1 sur E.

Posons

$$s_n^* = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_j^*Q_k^*} - (n-1)\sum_{j=1}^{n}f(Q_j^*).$$

D'après la définition des points $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*$ on a

$$(10)\qquad s_n^* \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{QQ_j^*} - (n-1)f(Q) - \sum_{j=1}^{n-1} f(Q_j^*) + \ldots +$$
$$+\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{QQ_j^*} - 2f(Q) - \sum_{j=1}^{2} f(Q_j^*) + \frac{1}{QQ_1^*} - f(Q) - f(Q_1^*),$$

pour chaque position du point Q sur E. Partageons l'ensemble E en s ensembles boreliens $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. En procédant de même que à la page 15 on obtient de la formule (10) l'inégalité suivante:

$$(11)\qquad s_n^* \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_E \frac{d\mu^*(Q)}{QQ_j^*} - (n-1) \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) - \sum_{j=1}^{n-1} f(Q_j^*) + \ldots +$$
$$+\sum_{j=1}^{2} \int_E \frac{d\mu^*(Q)}{QQ_j^*} - 2\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) - \sum_{j=1}^{2} f(Q_j^*) +$$
$$+\int_E \frac{d\mu^*(Q)}{QQ_1^*} - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) - f(Q_1^*).$$

D'après [2] on a

$$(12)\qquad u^*(P) \overset{\text{df}}{=} \int_E \frac{d\mu^*(Q)}{PQ} - f(P) \leqslant \gamma \quad \text{pour} \quad P \epsilon E_f,$$

où E_f désigne le noyau de la masse relatif à la distribution μ^*. La constante γ est égale à

$$(13)\qquad \int_E u^*(P)\,d\mu^*(P) = 1/d(E_f) - \int_E f(P)\,d\mu_f(P),$$

où μ_f est la distribution d'équilibre pour l'ensemble E_f.

Supposons maintenant que pour la fonction $f(Q)$ on ait $E_f = E$. Il résulte de (11) et (12) qu'on a

$$(14)\qquad s_n^* \leqslant (n-1)\gamma - (n-1)\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) + (n-2)\gamma - (n-2)\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) +$$
$$+\ldots + 2\gamma - 2\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) + \gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q)$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}\Big[\gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q)\Big].$$

D'autre part on a

$$s_n^* = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{Q_j^* Q_k^*} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} [f(Q_j^*) + f(Q_k^*)]$$

donc (voir page 16)

$$(15)\qquad \frac{2}{n^2} s_n^* \geqslant \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{[Q_j^* Q_k^*]_N} - \frac{2(n-1)}{n^2} \sum_{j=1}^{n} f(Q_j^*) - \frac{N}{n}.$$

Les termes du second membre peuvent être représentés par

$$(16)\qquad \int_E\int_E \frac{1}{[PQ]_N}\,d\sigma_n^*(P)\,d\sigma_n^*(Q) - 2\frac{n-1}{n}\int_E f(Q)\,d\sigma_n^*(Q) - \frac{N}{n}.$$

De (14), (15) et (16) on tire l'inégalité suivante

$$\frac{n-1}{n}\Big[\gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q)\Big] \geqslant \frac{2}{n^2} s_n^*$$
$$\geqslant \int_E\int_E \frac{1}{[PQ]_N}\,d\sigma_n^*\,d\sigma_*^n - 2\frac{n-1}{n}\int_E f\,d\sigma_n - \frac{N}{n}.$$

En maintenant N fixe faisons tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1, n_2, n_3, \ldots$ On obtient l'inégalité

$$\gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) \geqslant \int_E\int_E \frac{1}{[PQ]_N}\,d\sigma^* d\sigma^* - 2\int_E f(Q)\,d\sigma^*(Q)$$

et lorsque $N \to \infty$ on a

$$\gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) \geqslant I^*(\sigma^*).$$

Mais

$$\gamma - \int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) = \int_E\int_E \frac{1}{PQ}\,d\mu^*(P)\,d\mu^*(Q) - 2\int_E f(Q)\,d\mu^*(Q) = I^*(\mu^*)$$

alors $I^*(\mu^*) \geqslant I^*(\sigma^*)$. Puisque $I^*(\sigma^*) \geqslant I^*(\mu^*)$, donc $I^*(\mu^*) = I^*(\sigma^*)$. La distribution remplissant la condition (9) est unique, donc $\sigma^* \equiv \mu^*$.

L'ensemble complémentaire de E est une somme finie ou dénombrable de domaines $D_1, D_2, D_3, \ldots$ dont la frontière est contenue dans E. Soit D_1 le domaine contenant le point ∞. Les domaines $D_2, D_3, \ldots$, s'ils existent, sont bornés.

L'ensemble complémentaire de E_f est aussi une somme de domaines $D_{1f}, D_{2f}, \ldots$ On sait [2] que la fonction

$$\int_E \frac{d\mu^*(Q)}{PQ} - \gamma$$

est la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_{if}, $i = 1, 2, 3, \ldots$ avec la valeur $f(P)$ sur sa frontière (et 0 à l'infini dans le cas $i = 1$).

Lorsque $E_f = E$ on a (voir (13))

$$\gamma = \frac{1}{d(E)} - \int_E f(Q)\,d\mu(Q) = \frac{1}{d(E)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(Q_j).$$

Nous avons donc obtenu le

THÉORÈME 2. *Lorsque $E_f = E$ la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_i, $i = 1, 2, \ldots$ avec la valeur $f(P)$ sur sa frontière et 0 à l'infini (dans le cas $i = 1$) est la limite de la suite*

$$u_n^*(P) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{PQ_j^*} + f(Q_j)\right] - \frac{1}{d(E)}, \qquad P \bar{\epsilon} E,$$

quand $n \to \infty$, où les points $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*$ appartiennent à la suite de points extrémaux (8) *et les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ à la suite* (1).

Travaux cités

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.

[2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Pol. Math. 1 (2) (1955), p. 418-429.

[3] F. Leja, *Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, ce volume, p. 8-13.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1956

Certains théorèmes concernant la répartition des points extrémaux dans les ensembles plans

par J. Górski et J. Siciak (Kraków)

Introduction. Soit E un ensemble borné et fermé,

$$E = \sum_{j=1}^{p} E_j, \quad E_j E_k = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k,$$

où E_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, est un continu non dégénéré et $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue sur E. Nous supposons que E est la frontière d'un domaine $D(E)$ contenant le point $z = \infty$. Soit

$$\omega = |z-\zeta| \exp[-f(z) - f(\zeta)]$$

et $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un système de $n+1$ points de l'ensemble E. Désignons par $V(x^{(n)}, \omega)$ le produit

$$V(x^{(n)}, \omega) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(x_i, x_k).$$

Un système de $n+1$ points

(1) $$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$$

appartenant à E est appelé $n^{\text{-ième}}$ système de points extrémaux de l'ensemble E par rapport à la fonction ω lorsque

$$V(\eta^{(n)}, \omega) \geqslant V(x^{(n)}, \omega)$$

pour chaque autre système $x^{(n)}$ de points de l'ensemble E.

On sait [3] que, si $a_n(E_k)$ désigne le nombre des points extrémaux du $n^{\text{-ième}}$ système qui appartiennent à E_k, les limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(E_k)}{n} = a_k(f), \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

existent. On a

(2) $$a_k(f) \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{p} a_k(f) = 1.$$