Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme

par F. Leja (Kraków)

1. Suites extrémales de points d'un ensemble. Soit E un ensemble infini fermé et borné de points du plan et

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

la suite de points de E définie comme il suit: a_1 est un point quelconque de E, a_2 un point tel qu'on ait $|a_2-a_1| = \max_{z \in E}|z-a_1|$, a_3 un point tel que $|(a_3-a_1)(a_3-a_2)| = \max_{z \in E}|(z-a_1)(z-a_2)|$ et en général a_{n+1} un point de E tel que

$$(2) \qquad |(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n)| = \max_{z\in E}\prod_{k=1}^{n}|z-a_k|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Toute suite (1) remplissant les conditions (2), où a_1 est un point quelconque de E, sera dite *suite extrémale* de points de E. Il suit du principe de maximum que tous les points (1), sauf a_1 au plus, sont situés sur la frontière F du domaine non borné $D_\infty = D_\infty(E)$ contenu dans l'ensemble complémentaire à E.

Formons la suite numérique

$$(3) \qquad A_n = |(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n)|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

et la suite de polynômes

$$(4) \qquad P_n(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Le but de cette Note est d'examiner ces deux suites.

2. Convergence de la suite $\{\sqrt[n]{A_n}\}$. Désignons par $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ du plan, par $V(\zeta^{(n)})$ le produit de toutes les distances mutuelles de ces points

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|,$$

par $V_n(E)$ le maximum de ce produit lorsque les points de $\zeta^{(n)}$ varient arbitrairement dans E et soit

$$(5) \qquad \eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\}$$

un système de points de E pour lequel $V(\eta^{(n)}) = V_n(E)$. D'autre part, soit $T_n(z, E) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$ le polynôme de Tchebycheff du degré n correspondant à E et $R_n = \max_{z\in E}|T_n(z, E)|$. On sait [1] que les suites $\{[V(\eta^{(n)})]^{2/n(n+1)}\}$ et $\{\sqrt[n]{R_n}\}$ convergent vers la même limite

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty}[V(\eta^{(n)})]^{2/n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_n} = v(E)$$

dite diamètre transfini (ou écart) de l'ensemble E. Je dis que:

Lemme 1. *La suite $\{\sqrt[n]{A_n}\}$ converge, elle aussi, vers le diamètre transfini $v(E)$*

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n} = v(E).$$

Démonstration. Il suit de ce qui précède que le produit $V(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = A_1A_2\ldots A_n$ ne surpasse pas $V(\eta^{(n)})$ et que $R_n \leqslant A_n$ donc

$$R_1R_2\ldots R_n \leqslant A_1A_2\ldots A_n \leqslant V(\eta^{(n)}).$$

Posons $r_n = \sqrt[n]{R_n}$ et $\alpha_n = \sqrt[n]{A_n}$. Puisque

$$(r_1^1r_2^2\ldots r_n^n)^{2/n(n+1)} \leqslant (\alpha_1^1\alpha_2^2\ldots\alpha_n^n)^{2/n(n+1)} \leqslant [V(\eta^{(n)})]^{2/n(n+1)}$$

et que les termes extrêmes de cette inégalité convergent vers $v(E)$ on a

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty}(\alpha_1^1\alpha_2^2\ldots\alpha_n^n)^{2/n(n+1)} = v(E).$$

Soit d le diamètre (proprement dit) de l'ensemble E. Étant

$$A_{n+1} = \max_{z\in E}|(z-a_1)\ldots(z-a_{n+1})| \leqslant d\max_{z\in E}|(z-a_1)\ldots(z-a_n)| = dA_n$$

on voit que

$$(9) \qquad \alpha_{n+1} \leqslant d^{1/(n+1)}\alpha_n^{n/(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

et comme $\sqrt[n]{R_n} \leqslant \sqrt[n]{A_n}$ on a

$$(10) \qquad v(E) = \lim\sqrt[n]{R_n} \leqslant \underline{\lim}\,\alpha_n.$$

La thèse (7) résulte immédiatement des relations (8), (9), (10) et du lemme général suivant:

LEMME 2. *Si une suite $\{c_n\}$ à termes positifs satisfait aux hypothèses:*

1° $c_{n+1} \leqslant d^{1/(n+1)} c_n^{n/(n+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, *où d est un nombre positif,*

2° $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1^1 c_2^2 \ldots c_n^n)^{2/n(n+1)} = \gamma$,

3° $\gamma \leqslant \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} c_n$

alors cette suite converge vers γ.

Démonstration. Il suit de 1° que

$$c_{n+k} \leqslant d^{k/(n+k)} c_n^{n/(n+k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre k vers l'infini, $\overline{\lim}\, c_n \leqslant d$, ce qui prouve que la suite $\{c_n\}$ est bornée. Posons

$$\underline{\lim}\, c_n = \alpha \leqslant \beta = \overline{\lim}\, c_n.$$

Si $\beta = 0$ il est clair que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la suite $\{c_n\}$ converge vers $\gamma = 0$.

Supposons que $\beta > 0$ et soit ε un nombre positif quelconque remplissant la condition $\beta - 2\varepsilon > 0$ et $\{m_k\}$ une suite croissante des nombres entiers positifs tels que

$$c_m > \beta - \varepsilon \quad \text{et} \quad c_m \to \beta \quad \text{lorsque} \quad m = m_1, m_2, \ldots$$

En remplaçant dans (11) n par $m-k > 0$ on obtient pour $m = m_1, m_2, \ldots$ et $k < m$

$$c_{m-k} \geqslant d^{-k/(m-k)} c_m^{m/(m-k)} > d^{-k/(m-k)} (\beta - \varepsilon)^{m/(m-k)}. \tag{12}$$

Désignons par $k = k(m)$ le plus grand nombre entier $< m$ pour lequel

$$d^{-k/(m-k)} (\beta - \varepsilon)^{m/(m-k)} > \beta - 2\varepsilon. \tag{13}$$

Alors $k[\log d - \log(\beta - 2\varepsilon)] < m[\log(\beta-\varepsilon) - \log(\beta - 2\varepsilon)]$ et si l'on pose

$$\eta = \frac{\log(\beta-\varepsilon) - \log(\beta-2\varepsilon)}{\log d - \log(\beta - 2\varepsilon)}$$

on a $m\eta - 1 < k \leqslant m\eta$ pour $m = m_1, m_2, \ldots, k = k(m)$ et par suite $k/m \to \eta > 0$ lorsque $k = k(m)$ et $m = m_k \to \infty$.

Désignons par γ_m la quantité $(c_1^1, c_2^2, \ldots, c_m^m)^{2/m(m+1)}$. Étant

$$\gamma_m = (c_1^1 c_2^2 \ldots c_{m-k}^{m-k})^{2/m(m+1)} (c_{m-k+1}^{m-k+1} \ldots c_m^m)^{2/m(m+1)}$$

et d'après (12) et (13) $c_{m-k} > \beta - 2\varepsilon$ pour $0 \leqslant k \leqslant k(m)$ on a

$$\gamma_m \geqslant \gamma_{m-k}^{(m-k)(m-k+1)/m(m+1)} (\beta - 2\varepsilon)^{k(2m-k+1)/m(m+1)}$$
$$\text{pour} \quad k = k(m), \quad m = m_1, m_2, \ldots$$

En faisant tendre m vers l'infini par les valeurs $m_1, m_2, \ldots$ on trouve d'après l'hypothèse 2°

$$\gamma \geqslant \gamma^{(1-\eta)^2} (\beta - 2\varepsilon)^{2\eta - \eta^2}$$

et cette inégalité donne $\gamma \geqslant \beta - 2\varepsilon$. Mais, étant d'après 3° $\gamma \leqslant \alpha$ on a $\beta - 2\varepsilon \leqslant \alpha$ et, comme ε est arbitrairement petit, $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui prouve la convergence de la suite $\{c_n\}$ vers γ.

3. Propriétés de la suite $\{P_n(z)\}$. L'ensemble complémentaire à F est la somme d'un nombre fini ou dénombrable de domaines D_∞, $D_1, D_2, \ldots$ dont D_∞ seul est non borné. Formons la suite

$$\sqrt[n]{P_n(z)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

et supposons que ses termes soient normés dans D_∞ de manière que le quotient $\sqrt[n]{P_n(z)}/z$ soit égal à 1 à l'infini. Nous allons démontrer le

THÉORÈME 1. *Si $v(E) > 0$ la suite (14) converge dans le domaine D_∞ vers une fonction analytique $P(z) = \lim \sqrt[n]{P_n(z)}$, uniforme ou multiforme, dont le module est uniforme et satisfait à la relation*

$$\log|P(z)| = G(z) + \log v(E), \tag{15}$$

où $G(z)$ est la fonction de Green (classique ou généralisée) de D_∞ et de pôle à l'infini.

Démonstration. Considérons le système (5), formons les produits

$$\Delta_j^{(n)} = \prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} |\eta_j^{(n)} - \eta_k^{(n)}|, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

et supposons que les indices des points $\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}$ soient choisis de manière qu'on ait $\Delta_0^{(n)} \leqslant \Delta_j^{(n)}$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Les polynômes

$$L_j^{(n)}(z) = \prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} \frac{z - \eta_k^{(n)}}{\eta_j^{(n)} - \eta_k^{(n)}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

satisfont dans l'ensemble E à l'inégalité $|L_j^{(n)}(z)| \leqslant 1$ ce qui résulte immédiatement de la suivante $V(\eta_0^{(n)}, \ldots, \eta_{j-1}^{(n)}, z, \eta_{j+1}^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}) \leqslant V(\eta^{(n)})$ lorsque $z \in E$. Nous nous appuierons sur les résultats suivants démontrés ailleurs (F. Leja [3] et J. Górski [2]):

La suite $\{\sqrt[n]{\Delta_0^{(n)}}\}$ converge vers $v(E)$ et si $v(E) > 0$ la suite $\{(\sum\limits_{j=0}^{n} |L_j^{(n)}(z)|)^{1/n}\}$ converge dans le plan entier et la suite $\{|L_0^{(n)}(z)|^{1/n}\}$ en dehors de l'ensemble F et on a dans le domaine D_∞ l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} |L_j^{(n)}(z)|\Big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |L_0^{(n)}(z)|^{1/n} = e^{G(z)}.$$

Ceci posé, remarquons que d'après la formule d'interpolation de Lagrange on a identiquement

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} P_n(\eta_j^{(n)}) L_j^{(n)}(z)$$

d'où l'on déduit l'inégalité $|P_n(z)| \leqslant \Delta_n \sum_{j=0}^{n} |L_j^{(n)}(z)|$ et par suite

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqslant v(E) e^{G(z)} \quad \text{si} \quad z \in D_\infty. \tag{16}$$

Posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$R_n(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{(z-\eta_1^{(n)})(z-\eta_2^{(n)})\ldots(z-\eta_n^{(n)})} = \frac{P_n(z)}{L_0^{(n)}(z)} \cdot \frac{1}{\Delta_0^{(n)} e^{i\Theta_n}} \tag{17}$$

où Θ_n est l'argument de $(\eta_0^{(n)}-\eta_1^{(n)})(\eta_0^{(n)}-\eta_2^{(n)})\ldots(\eta_0^{(n)}-\eta_n^{(n)})$ et soit Δ un domaine simplement connexe quelconque contenant le point $z=\infty$ et contenu avec sa frontière dans D_∞. Les fonctions $\sqrt[n]{R_n(z)}$, $n = 1, 2, \ldots$, normées par la condition $\sqrt[n]{R_n(\infty)} = 1$ sont holomorphes uniformes dans Δ. Je dis que la suite $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ est uniformément bornée dans Δ.

En effet, soit δ la distance de Δ à E et K le cercle $|z| < r$ de rayon si grand que $E \subset K$ et que, si η est un point quelconque de E et ζ un point extérieur à K, on ait $|\eta/\zeta| < \frac{1}{2}$. Alors aux points $z \in \Delta$ intérieurs à K on a $|\sqrt[n]{R_n(z)}| \leqslant 2r/\delta$ car $|z-a_k| \leqslant 2r$, $|z-\eta_k^{(n)}| \geqslant \delta$, et aux points $z \in \Delta$ extérieurs à K on a $|\sqrt[n]{R_n(z)}| < 3$ car $|1-a_k/z| < \frac{3}{2}$, $|1-\eta_k^{(n)}/z| > \frac{1}{2}$.

Je dis maintenant que la suite $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ converge dans Δ vers la constante 1. En effet, de chaque suite partielle de $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ on peut extraire une nouvelle suite partielle tendant uniformément dans Δ vers une fonction analytique, soit $R(z)$. Puisque $\sqrt[n]{\Delta_0^{(n)}} \to v(E)$ et $|L_0^{(n)}(z)|^{1/n} \to e^{G(z)}$ il suit de (16) et (17) que le module de $R(z)$ satisfait à l'inégalité $|R(z)| \leqslant 1$. D'autre part, étant $\sqrt[n]{R_n(\infty)} = 1$ on a $R(\infty) = 1$ d'où il suit d'après le principe de maximum que $R(z) \equiv 1$ et comme toute suite partielle de $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ contient une nouvelle suite partielle tendant uniformément vers 1, la suite $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ converge dans Δ uniformément vers 1.

Il en résulte d'après la formule

$$|\sqrt[n]{P_n(z)}| = |\sqrt[n]{R_n(z)} \sqrt[n]{L_0^{(n)}(z)} \sqrt[n]{\Delta_0^{(n)}}|$$

que la suite $\{|\sqrt[n]{P_n(z)}|\}$ converge dans le domaine D_∞ vers $e^{G(z)} v(E)$ la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point fini de ce domaine et comme la suite $\{\sqrt[n]{P_n(z)}/z\}$ converge à l'infini vers 1 la suite (14) converge dans le domaine D_∞ vers une fonction analytique uniforme ou multiforme $P(z)$ satisfaisant à la rélation (15). Le théorème est donc démontré.

4. Remarques. 1. Lorsque le domaine D_∞ est simplement connexe il est clair que la fonction $P(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n(z)}$ est uniforme. D'après (15) son module surpasse $v(E)$ et tend vers $v(E)$ lorsque z tend vers un point quelconque de la frontière F de D_∞. Dans le voisinage du point à l'infini $P(z)$ admet manifestement le developpement de la forme

$$P(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots$$

d'où l'on conclut que $P(z)$ est univalente dans D_∞ et effectue la représentation conforme de ce domaine sur le cercle $|w| > v(E)$ de manière que les points $z=\infty$ et $w=\infty$ se correspondent et le quotient w/z tend vers 1 lorsque $z \to \infty$.

Lorsque le domaine D_∞ est multiplement connexe la fonction $P(z)$ est en général multiforme et les valeurs $w = P(z)$ couvrent de même le cercle $|w| > v(E)$.

2. Supposons que l'ensemble complémentaire au domaine fermé $D_\infty + F$ ne soit pas vide et soit D_k un des domaines partiels de cet ensemble ouvert. Choisissons dans D_k un point fixe quelconque $z = a$ et formons la suite

$$p_n(z) = e^{i\Theta_n} \sqrt[n]{P_n(z)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

où la détermination du radical et le nombre réel Θ_n ont été choisis de manière que la valeur de $p_n(z)$ au point $z = a$ soit positive. En appliquant la méthode du paragraphe précédent on peut démontrer le

THÉORÈME 2. *La suite* (18) *converge uniformément dans le domaine* D_k *vers la constante* $v(E)$.

Travaux cités

[1] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeit. 17 (1923), p. 228-249.

[2] J. Górski, *Sur l'équivalence de deux constructions de la fonction de Green généralisée*, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), p. 70-73.

[3] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1934), p. 57-71.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1956