Problèmes aux limites pour l'équation parabolique normale

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$\hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}(A,t)$, $b_\alpha(A,t)$, $c(A,t)$ sont des fonctions déterminées dans la région fermée

$$A(x_1, \ldots, x_n)\,\epsilon\,\Omega + S, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

et Ω est un domaine borné dans l'espace euclidien à n ($n \geqslant 2$) dimensions, limité par la surface fermée S.

Nous admettons les hypothèses suivantes:

1. La forme quadratique

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t) X_\alpha X_\beta \tag{3}$$

est définie et positive dans la région (2).

2. Les coefficients $a_{\alpha\beta}(A,t)$ vérifient dans la région (2) la condition de Hölder

$$|a_{\alpha\beta}(A,t) - a_{\alpha\beta}(A_1,t_1)| < k(r_{AA_1}^{h} + |t-t_1|^{h'}) \tag{4}$$

k étant une constante positive et h, h' — deux constantes positives non supérieures à l'unité. On a désigné par r_{AA_1} la distance des points A et A_1.

3. Les coefficients $b_\alpha(A,t)$, $c(A,t)$ sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables $(x_1, \ldots, x_n, t)$ dans la région (2) et vérifient par rapport aux variables spatiales la condition de Hölder:

$$|b_\alpha(A,t) - b_\alpha(A_1,t)| < k' r_{AA_1}^{h}, \qquad |c(A,t) - c(A_1,t)| < k'' r_{AA_1}^{h} \tag{5}$$

k', k'' étant des constantes positives.

4. La surface S limitant le domaine Ω vérifie les conditions connues de Liapounoff, dont l'une, concernant l'angle $\Delta(P,Q)$ entre les normales aux deux points P et Q, a la forme

$$\Delta(P,Q) < \mathrm{const}\cdot r_{PQ}^{\varkappa} \qquad (0 < \varkappa \leqslant 1). \tag{6}$$

Sous les hypothèses 1, 2, 3 l'auteur de cet article a démontré dans le travail [1] l'existence de la solution fondamentale de l'équation (1) de la forme

$$\begin{aligned} \Gamma(A,t;B,\tau) &\\ = w^{B,\tau}(A,t;B,\tau) &+ \int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta \end{aligned} \tag{7}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} w^{M,\tau}(A,t;B,\tau) &= (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\tau}(A,B)}{4(t-\tau)}\right], \\ \vartheta^{M,\tau}(A,B) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M,\tau)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta). \end{aligned} \tag{8}$$

Les coefficients $a^{\alpha\beta}(M,\tau)$ désignent les éléments de la matrice *inverse* de la matrice $\|a_{\alpha\beta}(M,\tau)\|$, Ω' est un domaine arbitraire mesurable, contenant l'ensemble $\Omega+S$ à l'intérieur, les coefficients $a_{\alpha\beta}$, b_α, c sont prolongés au domaine Ω' d'une façon arbitraire, mais sous la condtion de satisfaire aux inégalités de Hölder (4), (5) et en conservant la propriété citée de la forme quadratique (3), M désigne un point arbitraire du domaine Ω', enfin $\Phi(M,\zeta;B,\tau)$ est la solution déterminée de l'équation de Volterra

$$\begin{aligned} \Phi(A,t;B,\tau) &\\ = f(A,t;B,\tau) &+ \lambda\int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega'(M)} N(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta. \end{aligned} \tag{9}$$

La fonction f et le noyau N à singularités faibles sont donnés par les formules (12) du travail [1]. Le point B et la variable numérique $\tau < t$ jouent le rôle de paramètres fixés. La solution fondamentale (7) est déterminée pour tout couple de points A, B du domaine Ω' et pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Elle vérifie l'équation

$$\hat{\Psi}_{A,t}[\Gamma(A,t;B,\tau)] = 0 \tag{10}$$

par rapport aux variables A, t. Nous avons démontré dans le travail (1) que la solution fondamentale vérifie l'inégalité

$$|\Gamma(A,t;B,\tau)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}} \tag{11}$$

où μ est un nombre choisi arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$.

En s'appuyant sur la solution fondamentale Γ on peut définir les intégrales suivantes de l'équation (1).

1. Le potentiel de simple couche([1]) défini par l'intégrale

$$U(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau \tag{12}$$

où la fonction $\varphi(Q, \tau)$ — dite densité de la couche — est déterminée dans la région

$$Q \in S, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \tag{13}$$

2. Le potentiel de charge spatiale, défini par l'intégrale

$$V(A, t) = \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau) \varrho(B, \tau) dB d\tau \tag{14}$$

où la fonction $\varrho(B, \tau)$ — dite densité de la charge — est déterminée dans la région

$$B \in \Omega, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \tag{15}$$

3. L'intégrale de Weierstrass-Poisson

$$J(A, t, \tau) = \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau) \varrho(B, \tau) dB \tag{16}$$

la fonction ϱ étant déterminée dans la région (15).

Nous avons étudié les propriétés de ces intégrales dans le travail [2]. Maintenant, en nous basant sur ces propriétés, nous allons résoudre les deux problèmes aux limites concernant l'équation aux dérivées partielles (1).

2. Problème linéaire aux limites. Sous les hypothèses 1, 2, 3, 4, nous résoudrons le problème de la détermination d'une fonction $u(A, t)$ qui satisfait à l'équation donnée (1) en tout point intérieur de la région

$$A(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{17}$$

vérifie la condition limite

$$du/dT_P + g(P, t) u + G(P, t) = 0 \tag{18}$$

([1]) Nous conservons le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface dans l'espace à n dimensions et le signe d'intégrale triple pour l'intégrale de volume dans cet espace.

en tout point P de la surface S, pour $0 < t \leqslant T$ et, de plus, satisfait à la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} u(A, t) = f(A) \tag{19}$$

en tout point *intérieur* A du domaine Ω.

On suppose que les fonctions données $g(P, t)$ et $G(P, t)$ sont bornées et continues dans la région

$$P \in S, \quad 0 < t \leqslant T \tag{20}$$

et la fonction donnée $f(A)$ est bornée et continue à l'intérieur du domaine Ω.

Nous remarquons (voir le travail [2]) que le symbole du/dT_P dans la relation (18) désigne la valeur limite de la *dérivée transversale* de la fonction u, c'est-à-dire la limite

$$du/dT_P = \lim_{A \to P} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \cos(N_P, x_\beta) u_{x_\alpha}(A, t). \tag{21}$$

Le problème posé consiste à étendre à l'équation parabolique normale (1) le problème bien connu de Fourier pour l'équation de la conductibilité.

Nous signalons encore qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions $g(P, t)$ et $G(P, t)$ aient des limites si $t \to 0$ et la fonction $f(A)$ une limite si $A \to P \in S$.

En nous appuyant sur la propriété de l'intégrale de Weierstrass-Poisson (16) (voir la thèse 143 du théorème 6 de notre travail [2]), nous cherchons la solution du problème sous la forme d'une somme du potentiel de simple couche de densité indéterminée $\varphi(Q, \tau)$ et d'une intégrale de Weierstrass-Poisson détérminée:

$$u(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau + \\ + (2\sqrt{\pi})^{-n} \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, 0) \sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(B, 0)|} f(B) dB. \tag{22}$$

La fonction (22) vérifie l'équation (1) pour $A \in \Omega$, $0 < t \leqslant T$ et la condition initiale (19), quelle que soit la fonction continue $\varphi(Q, \tau)$.

Nous allons profiter de l'indétermination de la fonction $\varphi(Q, \tau)$ en demandant que la fonction (22) vérifie la condition limite (17) à la surface S. En nous appuyant sur la propriété de la dérivée transversale du potentiel de simple couche (voir la thèse (38) du théorème 1 de notre travail [2]), nous obtiendrons ainsi l'équation intégrale

$$\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) \\ = \int_0^t \iint_S \left\{ \frac{d}{dT_P} [\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, \tau) \Gamma(P, t; Q, \tau) \right\} \varphi(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau + G_1(P, t). \tag{23}$$

où l'on a désigné

$$(24)\qquad G_1(P,t) = G(P,t)+(2\sqrt{\pi})^{-n}\iiint_{\Omega}\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,0)]+\right.$$

$$\left.+g(P,t)\Gamma(P,t;B,0)\right\}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B,0)|}\,f(B)\,dB.$$

L'équation intégrale (23) a la forme d'une équation de Volterra

$$(25)\qquad \varphi(P,t) = \frac{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}{(2\sqrt{\pi})^n}G_1(P,t)+$$

$$+\lambda\int_0^t\iint_S N(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau$$

dont le noyau vérifie, d'après le résultat (70) de notre travail [2], l'inégalité aux singularités séparées

$$(26)\qquad |N(P,t;Q,\tau)| < \frac{C}{(t-\tau)^{\mu_*}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu_*-\varkappa_1}},$$

μ_* est un nombre arbitrairement choisi à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}\varkappa_1, 1)$, où $\varkappa_1$ est le plus petit des trois nombres

$$(27)\qquad \varkappa_1 = \inf(h, 2h', \varkappa).$$

Il en résulte que $n+1-2\mu_*-\varkappa_1 < n-1$, donc les singularités de la limitation (26) sont faibles relativement à l'intégrale de surface.

D'après la théorie classique, le noyau résolvant du noyau N est la somme de la série des noyaux itérés

$$(28)\qquad \mathfrak{N}(P,t;Q,\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu N_\nu(P,t;Q,\tau)$$

$(N_0 = N)$ déterminés par la relation de récurrence

$$(29)\qquad N_{\nu+1}(P,t;Q,\tau) = \int_\tau^t\iint_{S(\Pi)} N(P,t;\Pi,\zeta)N_\nu(\Pi,\zeta;Q,\tau)\,d\sigma_\Pi\,d\zeta.$$

Chaque itération abaisse le degré des singularités de la limitation et, d'après l'inégalité (26), les noyaux itérés seront bornés à partir d'un indice ν_0 égal tout au plus à la plus grande des deux valeurs

$$(30)\qquad E\left(\frac{1}{1-\mu_*}\right),\qquad E\left[\frac{n-1}{h_1-2(1-\mu_*)}\right].$$

En s'appuyant sur la limitation (26), on peut montrer que tous les noyaux bornés vérifient l'inégalité de la forme

$$(31)\qquad |N_{\nu_0+m}(P,t;Q,\tau)| < \frac{g_1}{(1-\mu_*)\,m}\cdot\frac{[g_2\Gamma(1-\mu_*)(t-\tau)^{1-\mu_*}]^m}{\Gamma[m(1-\mu_*)]}$$

$(m = 1,2,3,\ldots)$ g_1 et g_2 étant les bornes supérieures des fonctions

$$(32)\qquad |N_{\nu_0}| \leqslant g_1,\qquad \iint_S\frac{C\,d\sigma_\Pi}{r_{P\Pi}^{n+1-2\mu_*-\varkappa_1}} \leqslant g_2.$$

Le dénominateur $\Gamma[m(1-\mu_*)]$ dans la limitation (31) assure la convergence absolue et uniforme de la série (29) pour toute valeur λ et $t-\tau$, abstraction faite de quelques termes non bornés.

Avant d'exprimer la solution de l'équation (25) par le noyau résolvant (28), remarquons que la fonction (24) n'est pas bornée si $t\to 0$, donc il est douteux que l'on puisse appliquer la formule de Volterra. C'est le point sur lequel on a peu insisté dans les travaux consacrés au problème de Fourier. Pour résoudre cette question, il suffit de s'appuyer sur la limitation

$$(33)\qquad \left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,0)]\right| < \frac{\text{const}}{t^\mu}\cdot\frac{1}{r_{PB}^{n+1-2\mu}}\qquad (\tfrac{1}{2}<\mu<1),$$

résultant de la limitation des dérivées de la fonction $\Gamma(A,t;B,\tau)$ (voir l'inégalité (34) et (35) de notre travail [2]). Nous en déduisons la limitation à faible singularité

$$(34)\qquad |G_1(P,t)| < \frac{\text{const}}{t^\mu}$$

qui permet de conclure l'existence de la solution unique de l'équation (25) sous la forme classique

$$(35)\qquad \varphi(P,t) = \frac{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}{(2\sqrt{\pi})^n}G_1(P,t)+$$

$$+\lambda\int_0^t\iint_S\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)\frac{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(Q,\tau)|}}{(2\sqrt{\pi})^n}G_1(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau.$$

La solution (35) est continue dans la région

$$P\in S,\qquad 0<t\leqslant T$$

et, d'après la limitation (34), elle vérifie l'inégalité

$$(36)\qquad |\varphi(P,t)| < \frac{\text{const}}{t^\mu}\qquad (\tfrac{1}{2}<\mu<1)$$

si $t \to 0$. Cette propriété permet de conclure que la substitution de la solution (35) dans la formule (25) fournit la solution cherchée $u(A, t)$ de notre problème linéaire aux limites. En effet, quel que soit $t > 0$ on trouve un t_0 tel que $0 < t_0 < t$ et on décompose la première des intégrales (22) en deux intégrales étendues aux deux intervalles $(0, t_0)$ et (t_0, t). La première partie est évidemment continue avec ses premières dérivées si $A \to P$. La seconde partie obéit à la propriété (38) de la dérivée transversale du potentiel, démontrée dans le travail [2], puisque la densité $\varphi(Q, \tau)$ est continue et bornée dans l'intervalle (t_0, t). La fonction (22) vérifie donc la condition limite (18) pour $0 < t \leqslant T$, si la fonction $\varphi(Q, \tau)$ est une solution (35) de l'équation intégrale (23). En outre nous rappelons qu'elle vérifie la condition initiale (19) et l'équation donnée (1) en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$ pour $0 < t < T$, par conséquent cette fonction est la solution demandée du problème.

3. Problème non linéaire aux limites. Soit l'équation parabolique de la forme plus générale

$$\hat{\Psi}(u) = F(A, t, u) \tag{37}$$

où $F(A, t, u)$ est une fonction déterminée dans la région

$$A \epsilon \Omega + S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < u < +\infty \tag{38}$$

bornée, continue par rapport à l'ensemble des variables et vérifiant par rapport aux variables (A, u) la condition de Hölder de la forme

$$|F(A, t, u) - F(A_1, t, u_1)| < C[r_{AA_1}^{\delta} + t^{\alpha}|u - u_1|^{\delta}] \tag{39}$$

où C, α, δ sont des constantes positives données, telles que

$$0 < \delta \leqslant 1, \quad \alpha > \tfrac{1}{2}\delta. \tag{39'}$$

Nous posons le problème de la détermination d'une fonction $u(A, t)$ qui:

1. vérifie l'équation (37) en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$ pour $0 < t < T$,
2. vérifie la condition limite non linéaire

$$du/dT_P = \Phi(P, t, u_P) \tag{40}$$

en tout point P de la surface S pour $0 < t \leqslant T$,

3. vérifie la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} u(A, t) = f(A) \tag{41}$$

en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$.

On admet que la fonction $\Phi(P, t, u)$ est déterminée, bornée et continue dans la région

$$P \epsilon S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < u < +\infty \tag{42}$$

et que la fonction $f(A)$ est déterminée, bornée et continue dans le domaine Ω.

En nous appuyant sur la propriété du potentiel généralisé de charge spatiale (voir l'équation de Poisson (133) dans notre travail [2]), nous cherchons la solution du problème sous la forme d'une somme des trois intégrales

$$\begin{aligned} u(A, t) = &-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u(B, \tau)]\, dB\, d\tau + \\ &+ \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, d\sigma_Q\, d\tau + K(A, t) \end{aligned} \tag{43}$$

en désignant pour abréger

$$\begin{aligned} K(A, t) &= (2\sqrt{\pi})^{-n}\iiint_{\Omega} \Gamma(A, t; B, 0)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B, 0)|}\, f(B)\, dB \\ F_1(B, \tau, u) &= \sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B, \tau)|}\, F(B, \tau, u)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

En demandant que la fonction (43) vérifie la condition limite (40) et en nous appuyant sur la propriété citée de la dérivée transversale du potentiel de simple couche, nous arrivons à l'équation intégrale non linéaire de la forme suivante:

$$\begin{aligned} &-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}}\varphi(P, t) + \int_0^t \iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)]\varphi(Q, \tau)\, d\sigma_Q\, d\tau + \\ &-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t \iiint_{\Omega} \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; B, \tau)] F_1[B, \tau, u(B, \tau)]\, dB\, d\tau + \frac{d}{dT_P}[K(P, t)] \\ &= \Phi\Big\{P, t, -(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(P, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u(B, \tau)]\, dB\, d\tau + \\ &\qquad + \int_0^t \iint_S \Gamma(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, d\sigma_Q\, d\tau + K(P, t)\Big\}. \end{aligned} \tag{45}$$

Nous avons donc ramené le problème à la résolution du système de deux équations intégrales (43) et (45) non linéaires et singulières à deux fonctions inconnues: l'une $u(A,t)$ dans la région $[A\in\Omega+S,\ 0<t\leqslant T]$, l'autre $\varphi(P,t)$ dans la région $[P\in S,\ 0<t\leqslant T]$.

D'après la limitation (33), on peut prévoir que les fonctions $u(A,t)$, $\varphi(P,t)$ peuvent ne pas être bornées, si t tend vers zéro, nous introduirons donc deux nouvelles fonctions inconnues

(46) $$v(A,t)=t^{\gamma}u(A,t),\qquad \psi(P,t)=t^{\gamma}\varphi(P,t)$$

où γ est un nombre arbitrairement choisi à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2},1)$.

Le système d'équations (43), (45) prendra alors la forme suivante

(47)
$$v(A,t)=-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)} t^{\gamma}\Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)} t^{\gamma}\Gamma(A,t;Q,\tau)\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau+t^{\gamma}K(A,t),$$

(47') $$-\frac{(2\sqrt{\pi})^{n}}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\psi(P,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)} t^{\gamma}\tau^{-\gamma}\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau-$$
$$-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)} t^{\gamma}\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+t^{\gamma}\frac{d}{dT_P}[K(P,t)]$$
$$=t^{\gamma}\Phi\Big\{P,t,-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)}\Gamma(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma(P,t;Q,\tau)\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau+K(P,t)\Big\}.$$

On peut toujours supposer que la constante μ dans les propriétés (33), (11) est fixée à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{1}{2},\gamma)$. Alors la fonction

(48) $$t^{\gamma}\frac{d}{dT_P}[K(P,t)]$$

sera bornée, continue et tendra uniformément vers zéro, si $t\to 0$.

Si $v(A,t)$ et $\psi(P,t)$ sont continues et bornées, toutes les intégrales dans les équations (47) et (47') sont bornées, continues et tendent uniformément vers zéro si $t\to 0$. Nous admettons donc que ces intégrales sont nulles dans la région $(\Omega+S,\ t=0)$.

Le système d'équations (47), (47') étant irrésoluble par la méthode classique des approximations successives, nous la résolvons par l'application du théorème topologique de J. Schauder [3]: „Si dans un espace de Banach une transformation continue fait correspondre à un ensemble de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, alors il existe dans cet ensemble un point invariant de la transformation".

Considérons donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les couples de fonctions réelles $[v(A,t),\psi(P,t)]$ bornées et continues dans les régions

$$(A\in\Omega+S,\ 0\leqslant t\leqslant T),\qquad (P\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T).$$

Cet espace sera linéaire, normé et complet, il sera donc un espace de Banach, si nous admettons les définitions connues suivantes des opérations linéaires:

(49) $$[v,\psi]+[v_1,\psi_1]=[v+v_1,\psi+\psi_1],\qquad \lambda[v,\psi]=[\lambda v,\lambda\psi]$$

de la norme du point $U(v,\psi)$:

(50) $$\|U\|=\sup|v(A,t)|+\sup|\psi(P,t)|$$

et de la distance des deux points $U(v,\psi)$, $U_1(v_1,\psi_1)$:

(51) $$\delta(U,U_1)=\|U-U_1\|=\sup|v-v_1|+\sup|\psi-\psi_1|.$$

Soit dans l'espace Λ un ensemble E, borné et fermé, de points $U(v,\psi)$ déterminé par les inégalités

(52) $$|v(A,t)|\leqslant\varrho_1,\qquad |\psi(P,t)|\leqslant\varrho_2$$

où ϱ_1 et ϱ_2 sont des nombres positifs arbitrairement fixés. Il est facile de montrer que l'ensemble E est *convexe*.

En tenant compte de la forme des équations intégrales (47) et (47')' transformons l'ensemble E à l'aide des relations suivantes

(53)
$$v'(A,t) = -(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)} t^\gamma\Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)} t^\gamma\Gamma(A,t;Q,\tau)\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau+t^\gamma K(A,t),$$

(53')
$$-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\psi'(P,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)} t^\gamma\tau^{-\gamma}\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\psi'(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau+$$
$$-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)} t^\gamma\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+t^\gamma\frac{d}{dT_P}[K(P,t)]$$
$$=t^\gamma\Phi\Big\{P,t,-(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t\iiint_{\Omega(B)}\Gamma(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma(P,t;Q,\tau)\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau+K(P,t)\Big\}.$$

Toute fonction $v'(A,t)$ est déterminée, bornée et continue dans la région $(A\in\Omega+S,\ 0\leqslant t\leqslant T)$.

Toute fonction $\psi'(P,t)$ est la solution d'une équation de Volterra de la forme

(54)
$$-\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\psi'(P,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)} t^\gamma\tau^{-\gamma}\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\psi'(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau=g(P,t)$$

bien déterminée, bornée et continue dans la région $(P\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ quelle que soit la fonction continue $g(P,t)$ dans cette région. Donc les relations (53), (53') font correspondre à tout point $U[v(A,t);\psi(P,t)]$ de l'ensemble E un point bien déterminé $U'[v'(A,t);\psi'(P,t)]$ de l'espace Λ.

Cherchons la condition pour que l'ensemble E' des points transformés U' fasse partie de l'ensemble E.

D'après l'inégalité (11) et la relation (53), nous obtenons l'inégalité suivante

(55) $$|v'(A,t)|\leqslant C_1t^{1+\gamma-\mu}M_F+C_2t^{1-\mu}\varrho_2+C_3t^\mu M_f\qquad(\tfrac{1}{2}<\mu<\gamma)$$

où M_F, M_f désignent les bornes supérieures des fonctions $|F|$ resp. $|f|$ et C_1, C_2, C_3 sont des constantes positives ne dépendant que des coefficients de l'équation (1) et de la surface S. Remarquons ensuite que toute solution unique de l'équation de Volterra (54) vérifie, d'après la limitation (26), l'inégalité

(56) $$|\psi'(P,t)|\leqslant\sup|g(P,t)|(1+C_4t^{1-\mu_*})$$

où la constante C_4 ne dépend que des coefficients de l'équation (1) et de la surface S. Il en résulte que toute fonction ψ', donnée par la relation (53'), vérifie l'inégalité

(57) $$|\psi'(P,t)|\leqslant(C_5t^{1+\gamma-\mu}M_F+C_6t^{\gamma-\mu}M_f+t^\gamma M_\Phi)(1+C_4t^{1-\mu_*})$$

les constantes positives C_5, C_6 ne dépendent aussi que de la surface S et des coefficients de l'équation (1) et M_Φ désigne la borne supérieure de la fonction $|\Phi|$. Nous en concluons, d'après (55) et (57), que l'ensemble transformé E' fera partie de l'ensemble E si les constantes positives ϱ_1 et ϱ_2, déterminant cet ensemble dans les inégalités (52), sont choisies suffisamment grandes pour que l'on ait

(58)
$$C_1T^{1+\gamma-\mu}M_F+C_2T^{1-\mu}\varrho_2+C_3T^\mu M_f\leqslant\varrho_1,$$
$$(C_5T^{1+\gamma-\mu}M_F+C_6T^{\gamma-\mu}M_f+T^\gamma M_\Phi)(1+C_4T^{1-\mu_*})\leqslant\varrho_2$$

ce choix est toujours possible.

Nous démontrerons maintenant, que la transformation définie par les relations (53) et (53') est *continue* dans l'espace Λ. Soit, en effet, une suite arbitraire de points $\{U_n(v_n,\psi_n)\}$ dans l'ensemble E qui converge vers le point $U(v,\psi)$ de cet ensemble, on a alors

$$\delta(U_n,U)\to 0$$

et les suites fonctionnelles $\{v_n(A,t)\}$ et $\{\psi_n(A,t)\}$ convergent uniformément vers les fonctions continues $v(A,t)$, $\psi(P,t)$.

Soit $U_n'(v_n',\psi_n')$ la suite des points transformés par les relations (53), (53'). Montrons que cette suite tend vers le point $U(v',\psi')$ transformé du point limite $U(v,\psi)$. Étudions donc les différences entre les intégrales qui figurent dans les relations (53), (53'). Il suffit d'étudier l'une d'elle que nous décomposons de la façon suivante

$$(59)\qquad \int_0^t \iiint_\Omega \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]\{F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v_n(B,\tau)]-$$

$$-F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\}\,dB\,d\tau=\int_0^{t_0(\varepsilon)}\iiint_\Omega+\int_{t_0(\varepsilon)}^t\iiint_\Omega .$$

On peut faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre $t_0(\varepsilon)$ tel que la première partie de l'intégrale (59) ait une valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2}\varepsilon$ quel que soit n; ensuite, en nous appuyant sur la convergence uniforme $v_n\to v$ et la limitation (33), nous pouvons choisir $n_0(\varepsilon)$ suffisamment grand pour que la seconde partie de la différence (59) ait une valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2}\varepsilon$, si $n>n_0(\varepsilon)$. Donc la différence (59) tend uniformément vers zéro, si $n\to\infty$. D'une façon analogue on étudiera les autres intégrales et on conclura que

$$\delta(U_n',U')\to 0,$$

donc que la transformation étudiée est continue dans l'espace Λ.

Il reste à démontrer, que l'ensemble transformé E' est *compact*, ce qui est plus difficile.

L'ensemble E' étant borné il suffit, d'après le théorème d'Arzelà, de démontrer que les fonctions $v'(A,t)$, $\psi'(A,t)$, composantes des points de l'ensemble E', sont *équicontinues*. Dans ce but nous nous appuierons sur les théorèmes, démontrés dans notre travail [2], concernant la condition de Hölder pour les potentiels généralisés. Commençons à étudier la première des intégrales (53) que nous désignerons par $I_1(A,t)$. Cette intégrale admet des dérivées premières spatiales bornées et vérifie la condition de Hölder par rapport à la variable t, d'après le théorème 5 (formule (134)) de notre travail [2], nous aurons donc

$$(60)\qquad |I_1(A,t)-I_1(A_1,t_1)|<\mathrm{const}\cdot M_F[r_{AA_1}+|t-t_1|^{\gamma}].$$

Par conséquent à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $\eta(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$|I_1(A,t)-I_1(A_1,t_1)|<\varepsilon,\quad \text{si}\quad r_{AA_1}<\eta(\varepsilon),\quad |t-t_1|<\eta(\varepsilon)$$

pour toutes les fonctions $v(B,\tau)$ de l'ensemble E, cela veut dire que les fonctions $I_1(A,t)$ sont équicontinues.

Passons à la seconde des intégrales (53), que nous désignerons par $I_2(A,t)$:

$$(61)\qquad I_2(A,t)=\int_0^t\iint_S t^{\gamma}\Gamma(A,t;Q,\tau)\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau .$$

Nous ne pouvons pas appliquer ici directement les théorèmes 2 et 3 de notre travail [2], puisque la densité $\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)$ n'est pas bornée. D'après l'inégalité (11), à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $t_0(\varepsilon)<T$, ne dépendant que de ε et de ϱ_2, tel que l'on ait

$$(62)\qquad |I_2(A,t)|<\tfrac{1}{4}\varepsilon,\quad \text{si}\quad 0\leqslant t\leqslant t_0(\varepsilon).$$

On aura alors

$$(63)\qquad |I_2(A,t)-I_2(A_1,t_1)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

si t,t_1 se trouvent dans l'intervalle fermé $\langle 0,t_0(\varepsilon)\rangle$, A,A_1 sont deux points quelconques de l'ensemble $\Omega+S$ et $\psi(P,t)$ est une fonction continue arbitraire, vérifiant l'inégalité $|\psi|<\varrho_2$.

Supposons maintenant que $t_0\leqslant t\leqslant T$ et décomposons l'intégrale (61) en une somme d'intégrales

$$(64)\qquad I_2(A,t)=I_2^{0,t_0}(A,t)+I_2^{t_0,t}(A,t)$$

étendues aux intervalles $(0,t_0)$ et (t_0,t).

Si $t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$, nous aurons

$$(65)\qquad |I_2^{0,t_0}(A,t)|<\mathrm{const}\cdot t^{\gamma}\sup|\psi|\int_0^{t_0}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu}\tau^{\gamma}}<\mathrm{const}\cdot\sup|\psi|\cdot t_0^{1-\mu}$$

on peut donc supposer $t_0(\varepsilon)$ choisi suffisamment petit pour que l'on ait, outre l'inégalité (62), aussi

$$(66)\qquad |I_2^{0,t_0}(A,t)|<\tfrac{1}{4}\varepsilon,\quad \text{si}\quad t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$$

donc

$$(67)\qquad |I_2^{0,t_0}(A,t)-I_2^{0,t_0}(A_1,t_1)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

si t,t_1 sont situés dans l'intervalle $\langle t_0,2t_0\rangle$. Si les valeurs t,t_1 se trouvent dans l'intervalle $\langle 2t_0,T\rangle$, on étudiera la différence (67) tout à fait comme pour le potentiel de simple couche dans la démonstration des théorèmes 2 et 3 de notre travail [2].

Il faut remarquer ici qu'on a $t-\tau\geqslant t_0$ et que la limite supérieure t_0 de l'intégrale est constante, ce qui facilite le raisonnement. On arrive de telle façon à l'inégalité de Hölder

$$(68)\qquad |I_2^{0,t_0}(A,t)-I_2^{0,t_0}(A_1,t_1)|<\mathrm{const}\cdot\varrho_2[r_{AA_1}+|t-t_1|^{\theta/2}]$$

$(0<\theta<1)$ commune pour toutes les fonctions $|\psi(A,t)|\leqslant\varrho_2$.

Quant au second terme (64), on peut appliquer ici directement les théorèmes 2 et 3 (travail [2]), puisque ce terme a la forme d'un potentiel de simple couche de densité $\tau^{-\gamma}\psi(Q,\tau)$ bornée dans l'intervalle d'intégration $\langle t_0, t\rangle$. On aura donc

$$(69)\qquad |I_2^{t_0,t}(A,t)-I_2^{t_0,t}(A_1,t_1)| < \mathrm{const}\cdot\varrho_2[r^\theta_{AA_1}+|t-t_1|^{\theta/2}].$$

Les résultats (63), (67), (68), (69) permettent d'affirmer qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $\eta(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$(70)\qquad |I_2(A,t)-I_2(A_1,t_1)| < \varepsilon,$$

quel que soit le couple de points A, A_1 de l'ensemble $\Omega+S$, et le couple de valeurs t, t_1 dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ vérifiant les inégalités

$$r_{AA_1} < \eta(\varepsilon), \qquad |t-t_1| < \eta(\varepsilon).$$

En outre l'inégalité (70) est vraie simultanément pour toute fonction ψ concernant l'ensemble E. Les fonctions $I_2(A,t)$ correspondant à l'ensemble E sont donc *équicontinues*.

D'une façon analogue, en s'appuyant sur la limitation (26) de la dérivée transversale et le théorème 4 du travail [2], on constatera que la première intégrale dans l'équation (53') détermine une famille de fonctions équicontinues.

Il reste à étudier l'intégrale

$$(71)\qquad I_4(P,t) = \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]F_1[B,\tau,\tau^{-\gamma}v(B,\tau)]\,dB\,d\tau$$

où

$$(71')\qquad \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P,t)\cos(N_P,x_\beta)\Gamma_{x_\alpha}(P,t;B,\tau).$$

En appliquant ici le théorème 5 de notre travail [2] (thèse (135)) et les inégalités (4), (6), nous concluons que l'intégrale (71) vérifie par rapport aux variables spatiales la condition de Hölder

$$(72)\qquad |I_4(P,t)-I_4(P_1,t)| < \mathrm{const}\cdot M_F r_{PP_1}^{h_*}$$

où h_* désigne le plus petit des trois nombres $h, \varkappa, \theta, P$ et P_1 sont deux points arbitraires de la surface S. En appliquant les méthodes exposées dans notre travail [2], on peut ensuite montrer que la fonction de la forme

$$(73)\qquad I(A,t) = \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau$$

$(A\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ vérifie la condition de Hölder suivante par rapport à la variable t:

$$(74)\qquad |I(A,t)-I(A,t_1)| < \mathrm{const}\cdot\sup|\varrho|\cdot|t-t_1|^{\theta/2}$$

$\varrho(B,\tau)$ étant une fonction bornée et intégrable, θ un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité.

Nous concluons donc, vu l'inégalité (4), que l'intégrale (71) vérifie par rapport à la variable t la condition de Hölder

$$(75)\qquad |I_4(P,t)-I_4(P,t_1)| < \mathrm{const}\cdot M_F|t-t_1|^{h'_*}$$

où $h'_* = h'$, si $h' < \frac{1}{2}$ et $h'_* = \frac{1}{2}\theta$, si $h' \geqslant \frac{1}{2}$.

Les propriétés (72), (75) montrent nettement que les fonctions (71) forment une famille de fonctions équicontinues. En réunissant les propriétés cités des intégrales I_ν et en tenant compte des hypothèses concernant les fonctions F et Φ, nous concluons que les fonctions $v'(A,t)$, $\psi'(A,t)$ concernant l'ensemble E', forment une famille de fonctions équicontinues, donc l'ensemble transformé E' est *compact*.

Toutes les conditions du théorème de Schauder étant satisfaites, nous en déduisons l'existence dans l'ensemble E au moins d'un point (v^*, ψ^*), invariant relativement à la transformation (53), (53'), donc l'existence d'une solution du système d'équations intégrales (47), (47'), composée des deux fonctions $v^*(A,t)$, $\psi^*(P,t)$, continues et bornées dans la région $[A\in\Omega+S,\ 0\leqslant t\leqslant T]$ resp. $[P\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T]$. Il en résulte que les fonctions

$$(76)\qquad u^*(A,t)\,t = {}^{-\gamma}v^*(A,t), \qquad \varphi^*(P,t) = t^{-\gamma}\psi({}^*P,t)$$

forment une solution du système d'équations intégrales (43), (45) dans les régions $[A\in\Omega+S,\ 0 < t\leqslant T]$ et $[P\in S,\ 0 < t \leqslant T]$. Nous allons montrer que la fonction obtenue $u^*(A,t)$ est la solution du problème proposé dans ce chapitre.

Remarquons, en effet, que la fonction $u^*(A,t)$ a des dérivées spatiales

(77)

$$u^*_{x_\alpha}(A,t) = -(2\sqrt{\pi})^{-n}\int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma_{x_\alpha}(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u^*(B,\tau)]\,dB\,d\tau + \\ + \int_0^t \iint_{S} \Gamma_{x_\alpha}(A,t;Q,\tau)\varphi^*(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau + K_{x_\alpha}(A,t)$$

déterminées et admettant dans un domaine arbitraire fermé $\Omega^*\subset\Omega$ une borne supérieure de la forme: $\mathrm{const}\cdot t^{-\alpha/\delta}$, si $t > 0$. Donc elle vérifie dans le domaine Ω^*, pour $t > 0$, la condition de Lipschitz

$$(78)\qquad |u^*(A,t)-u^*(A_1,t)| < kt^{-\alpha/\delta}r_{AA_1}.$$

Il en résulte que la fonction $F[B,\tau,u^*(B,\tau)]$ vérifie, d'après la supposition (39), la condition de Hölder

$$(79)\qquad |F[B,\tau,u^*(B,\tau)]-F[B_1,\tau,u^*(B_1,\tau)]| < C(1+k)r^{\delta}_{BB_1} \quad \text{dans } \Omega^*$$

Par conséquent, d'après le théorème 8 de notre travail [1] et l'équation (77), la fonction $u^*(A, t)$ admet des dérivées secondes qui vérifient l'équation donnée (1) en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$ pour $t > 0$.

La fonction $u^*(A, t)$ vérifie la condition limite (40) pour $t > 0$, d'après l'équation (45). Enfin, en remarquant que la première et la seconde des intégrales (43) tendent vers zéro en tout point intérieur A du domaine Ω, en nous appuyant ensuite sur la propriété de l'intégrale de Poisson-Weierstrass $K(A, t)$ (voir le théorème 6 de notre travail [2]), nous concluons que la fonction trouvée vérifie la condition initiale (41). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les coefficients de l'équation parabolique* (1) *vérifient les conditions de Hölder* (4), (5), *la fonction donnée* $F(A, t, u)$ *vérifie la condition* (39) *dans la région* (38), *la fonction donnée* $\Phi(P, t, u)$ *est continue dans la région* (42) *et la fonction* $f(A)$ *dans le domaine* Ω, *alors il existe au moins une fonction* $u(A, t)$ *qui vérifie l'équation donnée* (1) *en tout point intérieur* $A \epsilon \Omega$ *pour* $0 < t < T$, *qui vérifie la condition limite* (40) *pour* $0 < t \leqslant T$ *en tout point* P *de la surface* S *limitant le domaine* Ω *(vérifiant les conditions de Liapounoff) et vérifie la condition initiale* (41) *en tout point intérieur* $A \epsilon \Omega$.

Nous signalons encore que la solution du problème existe quelque grandes que soient les bornes supérieures des fonctions F, Φ, f.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5, Napoli 1956.

[2] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, ce volume, p. 61-92.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 9. 1956

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10, ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 \$.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.