Sur un théorème de MM. N. Levinson et O. Smith relatif à l'équation différentielle des oscillations entretenues

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans un travail de MM. Levinson et Smith publié en 1942 [1] on trouve parmi plusieurs importants théorèmes sur l'existence et l'unicité de l'intégrale périodique d'une équation différentielle de la forme

$$x^{\cdot\cdot}+f(x,x^{\cdot})x^{\cdot}+g(x)=0,$$

qui peut être remplacée par le système

$$dx/dt=v,\qquad dv/dt=-f(x,v)v-g(x)\ (^1) \tag{1}$$

une condition (cf. [1], Théorème II, p. 393) suffisante, de caractère bien général, pour l'unicité de l'intégrale périodique (ne s'annulant pas identiquement). Pourtant, en rapprochant le théorème en question de l'exemple (cf. § 3) dont la construction constitue le but de cette note, on constate que l'énoncé du théorème envisagé doit être modifié.

§ 1. Notations. Soit c un nombre réel quelconque. Nous désignons par $k(c)$, $R_1(c)$, $R_2(c)$, D_1 et D_2 respectivement les ensembles suivants:

(courbe $k(c)$) $\qquad \frac{1}{2}v^2+\int\limits_0^x g(s)\,ds=c,$

(ensemble $R_1(c)$) $\qquad (x,v)\in k(c),\quad f(x,v)<0,$

(ensemble $R_2(c)$) $\qquad (x,v)\in k(c),\quad f(x,v)>0,$

(ensemble D_1) $\qquad$ ensemble des nombres c pour lesquels $R_1(c)\neq 0,$

(ensemble D_2) $\qquad$ ensemble des nombres c pour lesquels $R_2(c)\neq 0.$

Définissons les fonctions $F(x,v)$, $m_2(c)$, $M_1(c)$ par les formules

$$F(x,v)=1/v^2+f_v(x,v)/vf(x,v)\quad \text{pour}\quad v\neq 0,\quad f(x,v)\neq 0,$$

$m_2(c)=$ minimum de $F(x,v)$ dans $R_2(c)$ (lorsque ce minimum existe),

$M_1(c)=$ maximum de $F(x,v)$ dans $R_1(c)$ (lorsqu'il existe).

---

(1) Les auteurs considèrent le système (1) comme admettant une seule solution périodique (ne se réduisant pas à zéro) lorsqu'il existe dans le plan (x,v) une seule courbe simple fermée qui constitue la trajectoire de certaines solutions du système.

§ 2. Hypothèse H. Les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$ et leurs dérivées du premier ordre sont partout continues,

(2.1) $$xg(x) > 0 \quad \text{pour} \quad |x| > 0,$$

(2.2) $$\int_0^{\pm\infty} g(x)\,dx = +\infty,$$

(2.3) $$f(0, 0) < 0,$$

il existe des nombres x_0, M, x_1 tels que

(a) $$x_0 > 0, \quad f(x, v) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant x_0,$$

(b) $$f(x, v) \geqslant -M \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant x_0,$$

(c) $$x_1 > x_0, \quad \int_{x_0}^{x_1} f\big(x, v(x)\big)\,dx \geqslant 10Mx_0$$

pour chaque fonction décroissante $v(x) > 0$.

Au moyen des notations précédentes on peut énoncer le théorème cité de MM. N. Levinson et O. Smith comme il suit:

THÉORÈME A. HYPOTHÈSES. *Le système* (1) *satisfait à l'hypothèse* H *et on a*

(J) $$m_2(c) > 0 \quad \text{et} \quad M_1(c) < m_2(c)$$

pour chaque c $\{$*telle que* $m_2(c)$ *resp.* $m_2(c)$ *et* $M_1(c)$ *sont définis*$\}$ [2].

THÈSE. *Le système* (1) *admet une solution périodique unique* (*au sens de la renvoi* [1]) *ne se réduisant pas à un seul point* [3].

Remarque. Le contre-exemple construit dans le § 3 satisfera non seulement aux hypothèses du Théorème A, mais aussi aux hypothèses suivantes:

L'ensemble D_2 n'est pas vide et l'on a (cf. les notations précédentes):

(h₁) $$D_2 \subset D_1,$$

alors les fonctions $m_2(c)$ et $M_1(c)$ sont définies dans l'ensemble D_2 tout entier.

---

[2] Nous introduisons cette restriction (entre les parenthèses $\{\ \}$) qui n'est pas formulée explicitement par MM. Levinson et Smith comme évidente, car il est facile de prouver que pour c négatif les ensembles $R_1(c)$ et $R_2(c)$ sont vides et par suite $M_1(c)$ et $m_2(c)$ ne sont pas déterminés. D'une façon analogue $R_2(c)$ est vide pour c positif et suffisamment petit (cf. hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3)) et par suite $m_2(c)$ n'est pas déterminé.

[3] Dans l'Hypothèse H l'existence d'au moins une intégrale périodique (non banale) est garantie par le Théorème I du travail cité de MM. Levinson et Smith (cf. p. 384). Un théorème plus général sur le même sujet a été établi dans notre travail antérieur (cf. [2]). Dans la note présente il est question exclusivement de l'unicité de la solution périodique (ne se réduisant pas à un seul point).

§ 3. Construction d'un contre-exemple. Pour construire la fonction $f(x, v)$ partageons le plan (x, v) de la manière suivante

(G_1) $$x^2+v^2 \leqslant 1,$$

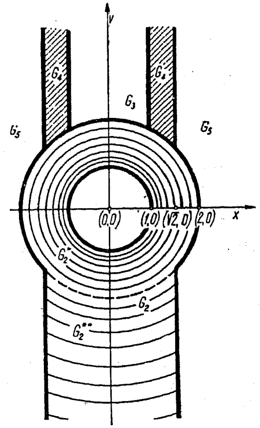
(G_2^*) $$1 \leqslant x^2+v^2 \leqslant 4,$$

(G_2^{**}) $$v < 0, \quad x^2+v^2 \geqslant 4, \quad x^2 \leqslant 2,$$

(G_3) $$4 \leqslant x^2+v^2, \quad x^2 \leqslant 1, \quad v > 0,$$

(G_4) $$4 \leqslant x^2+v^2, \quad 1 \leqslant x^2 \leqslant 2, \quad v > 0,$$

(G_5) $$4 \leqslant x^2+v^2, \quad 2 \leqslant x^2,$$



posons $G_2 = G_2^* + G_2^{**}$.

Nous définissons la fonction $f(x, v)$ par les formules suivantes:

(3.1₁) $$f(x, v) = -(x^2+v^2-1)^2 \quad \text{dans } G_1,$$

(3.1₂) $$f(x, v) = 0 \quad \text{dans } G_2,$$

(3.1₃) $$f(x, v) = -\frac{1}{v}(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)^2\exp(4-x^2-v^2) \quad \text{dans } G_3,$$

(3.1₄) $$f(x, v) = \frac{1}{v}(x^2-2)^2(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)^2 \quad \text{dans } G_4,$$

(3.1₅) $$f(x, v) = (x^2-2)^2(x^2+v^2-4)^2 \quad \text{dans } G_5.$$

Posons, par définition

(3.2) $$g(x) = x.$$

Nous allons démontrer que les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$ ainsi définies satisfont à l'hypothèse H.

Il est évident que $g(x)$ satisfait aux conditions (2.1) et (2.2). Passons donc à la fonction $f(x, v)$ définie par les relations (3.1₁), (3.1₂), (3.1₃), (3.1₄) et (3.1₅). La fonction $f(x, v)$ est ainsi définie dans le plan (x, v) tout entier. Elle est continue, avec ses dérivées $f_x(x, v)$ et $f_v(x, v)$, dans chaque ensemble G_i et on a

$$f(x, v) = f_x(x, v) = f_v(x, v) \equiv 0 \quad \text{sur la frontière de } G_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

La fonction $f(x, v)$, avec ses dérivées f_x et f_v, est donc continue partout.

La propriété (2.3) résulte du fait que, en vertu de (3.1₁)

$$f(0, 0) = -(x^2+v^2-1)^2_{x=v=0} = -1 < 0.$$

Dans notre définition de $f(x, v)$ on a les inégalités

$$(3.3) \qquad f(x, v) < 0 \quad \text{dans l'intérieur de } G_1 + \text{l'intérieur de } G_3,$$

$$(3.4) \qquad f(x, v) > 0 \quad \text{dans l'intérieur de } G_4 + \text{l'intérieur de } G_5.$$

Il en résulte que

$$(3.5) \qquad f(x, v) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 3.$$

Posons $x_0 = 3$. En vertu de (3.5) nous obtiendrons ainsi un x_0 satisfaisant aux conditions (a) de l'Hypothèse H.

Pour prouver l'existence d'un $M > 0$, intervenant dans (b) considérons $f(x, v)$ dans G_1 et G_3 (cf. (3.3) et (3.4)). Dans G_1, on a $f(x, v) \geqslant -1$. Dans G_3, on a la convergence uniforme

$$f(x, v) \rightrightarrows 0 \quad \text{pour} \quad v \to +\infty, \quad |x| \leqslant 1.$$

Il existe donc un nombre $M, M > 0$ tel que $f(x, v) > -M$ dans $G_3 + G_1$. $f(x, v)$ étant non négatif dans $G_4 + G_2 + G_5$, nous obtiendrons ainsi l'inégalité $f(x, v) > -M$ partout.

Pour démontrer l'existence d'un x_1 convenable prenons une fonction $v(x)$ quelconque, $v(x) > 0$. Soit $x_1 > x_0 = 3$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f\big(x, v(x)\big)\,dx = \int_{3}^{x_1} f\big(x, v(x)\big)\,dx.$$

Pour $|x| \geqslant 2$ le point (x, v) appartient à G_5. On a donc

$$(3.6) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f\big(x, v(x)\big)\,dx = \int_{3}^{x_1} (x^2-2)^2(x^2+v^2-4)^2\,dx \geqslant \int_{3}^{x_1} 7^2 5^2\,dx = 35^2(x_1-3).$$

Posons $x_1 = 3 + 10M \cdot 3/35^2$. En vertu de (3.6) on a, pour chaque fonction $v(x)$ décroissante ($v(x) > 0$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f\big(x, v(x)\big)\,dx \geqslant 10M \cdot 3 = 10Mx_0.$$

Nous avons ainsi démontré que l'Hypothèse H est vérifiée par les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$ définies plus haut.

Passons à la démonstration que les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$ ont les propriétés (h_1) et (J) (d'où il viendra qu'elles satisfont aux hypothèses du théorème A). Pour cela nous démontrerons d'abord que $D_2 \subset D_1$.

Dans notre exemple la courbe $k(c)$ est la circonférence

$$(3.7) \qquad x^2 + v^2 = 2c.$$

Pour $2c \leqslant 4$ et $(x, v) \in k(c)$ (ainsi défini) on a

$$(x, v) \in G_1 + G_2^*$$

et par suite $f(x, v) \leqslant 0$, d'où il vient que $D_2 \subset (2, \infty)$. Pour chaque c tel que $2c > 4$, la circonférence $k(c)$ coupe les ensembles G_3, G_4 et G_5 (cf. la définition de G_i), d'où en vertu de (3.3) et (3.4) il vient que la circonférence $k(c)$ coupe les deux ensembles

$$(\mathrm{U}_1) \qquad f(x, v) < 0, \quad x^2 + v^2 > 4,$$

$$(\mathrm{U}_2) \qquad f(x, v) > 0.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$(3.8) \qquad D_2 = (2, \infty) \subset D_1$$

(cf. (h_1)). Envisageons la fonction $F(x, v)$, intervenant dans la définition de $m_2(c)$ et $M_1(c)$ (cf. § 1).

$$F(x, v) = 1/v^2 + f_v(x, v)/vf(x, v) \quad \text{pour} \quad v \neq 0 \quad \text{et} \quad f \neq 0.$$

Posons, par définition

$$I_j = \text{intérieur de } G_j \quad (\text{pour} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

En vertu de (3.3) et (3.4) on a les relations

$$U_1 = \text{intérieur de } G_3 = I_3,$$

$$U_2 = \text{intérieur de } G_4 + \text{intérieur de } G_5 = I_4 + I_5.$$

La fonction $F(x, v)$ est définie dans $I_1 + I_3 + I_4 + I_5$. Considérons F dans $U_1 + U_2 = I_3 + I_4 + I_5$. Dans I_3 (cf. (3.1_3)), on a

$$(3.9) \qquad F(x, v) = \frac{1}{v^2} + \frac{4}{x^2+v^2-4} - \frac{1}{v^2} - 2 = \frac{4}{x^2+v^2-4} - 2.$$

Dans I_4, la fonction $F(x, v)$ a la forme (cf. (3.1_4))

$$(3.10) \qquad F(x, v) = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{(x^2-2)^2(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)^2}{\frac{v}{v}(x^2-2)^2(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{4v}{v}(x^2-2)^2(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)}{\frac{v}{v}(x^2-2)^2(x^2-1)^2(x^2+v^2-4)^2} = \frac{4}{x^2+v^2-4}.$$

Dans I_5, (cf. (3.1_5)) la fonction $F(x, v)$ prend la forme

$$(3.11) \qquad F(x, v) = \frac{1}{v^2} + \frac{4v(x^2-2)^2(x^2+v^2-4)}{v(x^2-2)^2(x^2+v^2-4)^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{4}{x^2+v^2-4}.$$

Prenons un $c_0 \epsilon D_2$, c'est-à-dire $c_0 > 2$. Nous prouverons que

$$M_1(c_0) = \frac{2}{c_0-2} - 2.$$

On vérifie facilement que

$$R_1(c_0) = I_3 k(c_0)$$

et par suite, en vertu de (3.9), on a dans $R_1(c_0)$ la relation

$$F(x, v) = \frac{4}{2c_0-4} - 2 = \frac{2}{c_0-2} - 2$$

pour chaque $(x, v) \epsilon R_1(c_0)$. Il existe donc un maximum de la fonction $F(x, v)$ considérée sur $R_1(c_0)$, et celui-ci vérifie l'égalité

$$M_1(c_0) = \frac{2}{c_0-2} - 2. \tag{3.12}$$

Maintenant nous allons prouver que $m_2(c_0) = 2/(c_0-2) > 0$ (cf. (J)). Posons

$$R_2^*(c_0) = k(c_0) I_4, \quad R_2^{**}(c_0) = k(c_0) I_5.$$

Nous avons donc la relation

$$R_2(c_0) = R_2^*(c_0) + R_2^{**}(c_0).$$

En vertu de (3.10) on a, dans $R_2(c_0)$, l'égalité

$$F(x, v) = \frac{4}{2c_0-4} = \frac{2}{c_0-2} \quad \text{dans} \quad R_2^*(c_0) \tag{3.13}$$

et, en vertu de (3.11), on a dans $R_2^{**}(c_0)$ l'inégalité

$$F(x, v) = \frac{1}{v^2} + \frac{4}{2c_0-4} = \frac{1}{v^2} + \frac{2}{c_0-2} > \frac{2}{c_0-2}.$$

Cette inégalité, rapprochée de l'égalité (3.13), conduit à l'égalité

$$m_2(c_0) = \frac{2}{c_0-2} > 0 \quad \text{pour} \quad c_0 \epsilon D_2$$

d'où, en vertu de (3.12), il résulte que

$$M_1(c_0) < m_2(c_0) \quad \text{pour} \quad c_0 \epsilon D_2$$

(cf. condition (J)). Ainsi nous avons démontré que notre exemple vérifie les Hypothèses du théorème A et qu'il possède la propriété (h_1). D'autre part l'équation (1) ainsi construite a, dans G_2, la forme

$$x^{\cdot} = v, \quad v^{\cdot} = -x.$$

Il en résulte que chaque circonférence

$$x^2 + v^2 = 2c$$

fournit pour $\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant 2$ une solution périodique du système en question, contrairement au théorème A.

Travaux cités

[1] N. Levinson et O. Smith, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. Journal 9, N. 2 (1942), p. 382.

[2] Z. Mikołajska, *Sur l'équation généralisée des oscillations entretenues*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, Vol. II, No. 7., 1954.

Reçu par la Rédaction le 9. 3. 1956