The asymptotes are

$$(x+q+1)B-1 = 0$$

and

$$By-A(x+q+1) = \frac{A}{B}.$$

In the figure the abscissa of the point P where the upper branch of the hyperbola turns upwards is $-q-1+2/B$. The only points of intersection of the curves (16) and (17) can lie to the right of the vertical asymptote of the hyperbola and the number of such points can be at most three. Indeed, one can easily prove the following lemma:

The transcendental equation

$$a^x = \frac{(\alpha x+\beta)^2}{\gamma x+\delta}$$

where $a>1$, $\gamma>0$ *and* $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ *can have at most three real different roots.*

We have already observed that $\Psi'(x)$ must vanish at two points R and S (say), R lying between the lines $x=-a$ and $x=0$ and S lying between the lines $x=0$ and $x=\beta$.

Since $a = q-p < q+1-2/B$, the point $(-a, 0)$ lies to the right of P and so at the point R the tangent to the curve (16) must be below that of the hyperbola. For if it were otherwise, the curves being strictly increasing to the right of P, the curve (16) would newer cut the curve (17) again, which is contrary to what we have proved above. Hence at the point S the curve (16) crosses the hyperbola (17) from below, and so there is no other point of intersection of these curves after S. We have thus proved that (16) and (17) must intersect in 3 points of which one is to the right of OY, one lies between O and P and the third to the left of P.

Hence $\Psi'(x)$ vanishes at 2 points to the left of OY and one to the right of OY. If $\Psi(\gamma) = 0$, we should be led to the impossible conclusion that $\Psi'(x)$ vanishes at 2 points to the right of OY. Hence the only positive integral zeros of $\Psi(x)$ and thus also of $\Phi(x)$ are 0 and β. We have thus proved that (10) and (15) cannot have a common root Θ_0.

References

[1] S. Gołąb, *Contribution à la formule simpsonienne de quadrature approchée*, Annales Polonici Math. 1 (1) (1954), p. 166-175.

[2] S. Gołąb et C. Olech, *Contribution à la théorie de la formule simpsonienne des quadratures approchées*, Annales Polonici Math. 1 (1) (1954), p. 176-183.

Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme générale

$$(1)\qquad \Psi(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(x_1, \ldots, x_n)u = 0$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$, $b_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, $c(x_1, \ldots, x_n)$ sont des fonctions des n coordonnées rectangulaires $(x_1, \ldots, x_n)$, déterminées dans un domaine borné et mesurable Ω dans l'espace euclidien à n dimensions.

Une prémière méthode d'étude de la solution fondamentale de l'équation (1) dans le cas elliptique a été donnée par E. Levi [2] dans le cas des coefficients admettants des dérivées secondes. Elle a été développée par W. Sternberg [7] dans le cas $n = 3$, mais encore avec la même hypothèse sur les dérivées, ensuite approfondie et généralisée par M. Gevrey [1] pour les coefficients vérifiant la condition de Hölder et n quelconque. Les recherches de M. Gevrey sont basées sur la *méthode des cylindres* de la dérivation des intégrales généralisées. Cette méthode est correcte dans l'étude des dérivées premières du potentiel, mais elle présente des lacunes dans celle des dérivées secondes, bien que M. Gevrey ait obtenu résultats positifs.

Dans le présent travail nous exposerons une autre méthode d'étude des dérivées des intégrales généralisées et nous compléterons l'étude de la solution fondamentale. Ensuite nous étudierons deux problèmes aux limites.

2. Le cas des coefficients constants. Nous rappelons l'étude du cas des coefficients $a_{\alpha\beta}$ *constants* pour l'équation

$$(2)\qquad \hat{D}u = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0$$

dans l'hypothèse que la forme quadratique

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$$

est définie positive.

Il est facile de vérifier que la fonction

$$w(A, B) = \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)\Big]^{-n/2+1} \qquad (n > 2) \tag{3}$$

satisfait à l'équation (2) en tout point $A(x_1, \ldots, x_n)$ différent du point $B(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Les coefficients $a^{\alpha\beta}$ sont les compléments algébriques des éléments $a_{\alpha\beta}$ de la matrice $\|a_{\alpha\beta}\|$, divisés par le déterminant de cette matrice.

On appelle la fonction (3) *solution fondamentale* de l'équation (2). Cette fonction admet, lorsque le point A tend vers B, une singularité comparable à celle de la fonction $1/r_{AB}^{n-2}$, où

$$r_{AB} = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2}$$

désigne la distance euclidienne des points A, B.

Considérons l'intégrale[1])

$$V(A) = \iiint_\Omega w(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B \tag{4}$$

étendue au domaine mesurable Ω, analogue au potentiel de chargé spatiale de densité $\varrho(B)$, déterminée et intégrable dans Ω. La fonction (4) vérifie évidemment l'équation

$$\hat{D}[V(A)] = \iiint_\Omega \hat{D}[w(A, B)]\,\varrho(B)\,d\tau_B = 0$$

en tout point A extérieur au domaine Ω. Cherchons maintenant les dérivées secondes de l'intégrale généralisée (4) au point intérieur A du domaine Ω, d'abord dans le cas $\varrho = \text{const}$. Décomposons donc l'intégrale (4) en deux parties

$$V(A) = V^K(A) + V^{\Omega-K}(A) \tag{5}$$

étendues à la sphère K de centre arbitraire A_0, située à l'intérieur du domaine Ω, contenant le point A et au domaine extérieur $\Omega - K$. En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on a

$$\frac{\partial V^K(A)}{\partial x_\alpha} = -\varrho \iiint_K \frac{\partial w(A, B)}{\partial \xi_\alpha}\,d\tau_B = -\varrho \iint_{K'} w(A, P)\cos\nu_\alpha\,d\sigma_P, \tag{5'}$$

[1]) Nous conservons le signe d'intégrale triple pour l'intégrale de volume et le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface dans l'espace à n dimensions.

ν_α désignant l'angle que fait la normale extérieure à la surface K' de la sphère K au point P avec l'axe ξ_α. Donc les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 V^K(A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\varrho \iint_{K'} \frac{\partial w(A, P)}{\partial x_\beta}\cos\nu_{\xi_\alpha}\,d\sigma_P$$

existent et par conséquent aussi les dérivées secondes de la fonction $V(A)$ en tout point A à l'intérieur du domaine Ω. Au centre A_0 de la sphère K on aura donc

$$\begin{aligned}(\hat{D}V(A))_{A_0} &= \Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 V^K(A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big)_{A_0} \\ &= -\frac{(n-2)\varrho}{r_{A_0P}} \iint_{K'} \frac{\sum_{\alpha,\mu=1}^{n}\Big(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}a^{\alpha\mu}\Big)(x_\alpha^0 - \xi_\alpha)(x_\mu^0 - \xi_\mu)}{\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(x_\alpha^0 - \xi_\alpha)(x_\beta^0 - \xi_\beta)\Big]^{n/2}}\,d\sigma_P \\ &= -(n-2)\varrho \iint_\Lambda \frac{d\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\Big]^{n/2}} = -\lambda_n \varrho,\end{aligned} \tag{6}$$

Λ étant une sphère de rayon unité et de centre à l'origine. La fonction (4) vérifie donc, dans le cas de la densité ϱ constante, l'équation de Poisson

$$\hat{D}[V(A)] = -\lambda_n \varrho \tag{6'}$$

en tout point intérieur A du domaine Ω.

Supposons maintenant que la densité $\varrho(A)$ soit une fonction vérifiant la condition de Hölder,

$$|\varrho(A) - \varrho(A_1)| < \text{const}\cdot r_{AA_1}^{\mu} \qquad (0 < \mu \leqslant 1)$$

dans le domaine Ω. La méthode de M. Gevrey fournit facilement l'expression des dérivées premières de l'intégrale généralisée (4). Considérons, en effet, une suite de cylindres γ_m situés à l'intérieur du domaine Ω, ayant un axe commun (p, q) parallèle à l'axe x_α et dont les rayons tendent vers zéro. Le point A à l'intérieur du segment (p, q) étant extérieur au domaine $\Omega - \gamma_m$, l'intégrale

$$V^{\Omega-\gamma_m}(A) = \iiint_{\Omega-\gamma_m} w(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B \tag{7}$$

admet une dérivée par rapport à la coordonnée x_α du point A

$$V_{x_\alpha}^{\Omega-\gamma_m}(A) = \iiint_{\Omega-\gamma_m} w'_{x_\alpha}(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B. \tag{8}$$

Or la dérivée w'_{x_α} est comparable à $1/r_{AB}^{n-1}$ avec une singularité *faible* donc la suite des dérivées (8) tend *uniformément* dans le segment (p, q) vers l'intégrale généralisée

$$V_{x_\alpha}(A) = \iiint_\Omega w'_{x_\alpha}(A, B)\varrho(B)\,d\tau_B \tag{9}$$

qui représente la dérivée de l'intégrale généralisée

$$V(A) = \lim_{m\to\infty} V^{\Omega-\gamma_m}(A)$$

en tout point intérieur A, d'après le théorème classique sur la suite uniformément convergente des dérivées.

La détermination des dérivées secondes de la fonction (4) au point intérieur A doit être modifiée, puisque la seconde dérivation sous le signe de l'intégrale (9) fournirait une singularité trop forte, comparable à $1/r_{AB}^n$.

Dans ce but, introduisons la fonction

$$\Psi(A, B, z) = \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)+z^2\Big]^{-n/2+1} \tag{10}$$

et considérons l'intégrale (à singularité *faible* si $z\to 0$)

$$W(A, z) = \iiint_\Omega \Psi'_{x_\alpha}(A, B, z)\varrho(B)\,d\tau_B \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

déterminée à l'intérieur d'un cylindre à $n+1$ dimensions ($A\in\Omega$; z arbitraire réel).

THÉORÈME 1. *La fonction $W(A, z)$ tend uniformément vers la fonction* (9),

$$W(A, z) \rightrightarrows \frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha}, \tag{12}$$

si $z\to 0$, ϱ étant une fonction bornée intégrable.

Pour démontrer ce théorème, considérons une sphère K de centre au point arbitraire A à l'intérieur du domaine Ω, de rayon R_K, dont la valeur n'est pas fixée pour le moment, et décomposons l'intégrale (11) en une somme de deux intégrales

$$W(A, z) = W^{K'}(A, z)+W^{\Omega-K'}(A, z) \tag{13}$$

étendues au domaine K', commun à la sphère K et au domaine Ω, ainsi qu'au domaine extérieur $\Omega-K'$. En tenant compte de la singularité faible $1/r_{AB}^{n-1}$ de la fonction $w'_{x_\alpha}(A, B)$, nous aurons en tout point (A, z) l'inégalité

$$|W^{K'}(A, z)| < M_\varrho c\int_0^{R_K}\frac{\omega_n r^{n-1}dr}{r^{n-1}} = M_\varrho c\omega_n R_K \tag{14}$$

où c désigne une constante positive, ω_n l'aire d'une surface sphérique à n dimensions de rayon unité, M_ϱ la borne supérieure de la fonction $|\varrho(B)|$. D'après l'inégalité (14) nous pouvons faire correspondre à tout nombre positif ε un rayon

$$R_K = \frac{\varepsilon}{3M_\varrho c\omega_n} \tag{15}$$

tel que l'on ait

$$|W^{K'}(A, z)| < \varepsilon/3 \tag{16}$$

en tout point (A, z). Nous avons ensuite

$$\frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha} = W(A, 0) = W^{K'}(A, 0)+W^{\Omega-K'}(A, 0), \tag{17}$$

d'où

$$\left|\frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha}-W(A, z)\right| < |W^{K'}(A, z)|+|W^{K'}(A, 0)|+ \\ +|W^{\Omega-K'}(A, z)-W^{\Omega-K'}(A, 0)|.$$

Remarquons maintenant que la fonction $W^{\Omega-K'}(A, z)$ est continue au point $z = 0$, puisque le domaine d'intégration $\Omega-K'$ est extérieur au point A. Donc, la sphère K étant fixée, nous pouvons choisir un nombre positif $\eta(\varepsilon)$, ne dépendant que du nombre ε, tel que l'on ait $|W^{\Omega-K'}(A, z)-W^{\Omega-K'}(A, 0)| < \varepsilon/3$ si $|z| < \eta(\varepsilon)$. Il en résulte

$$\left|\frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha}-W(A, z)\right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z| < \eta(\varepsilon), \quad \text{c. q. f. d.}$$

THÉORÈME 2. *La fonction* (11) *admet à l'intérieur du domaine Ω et pour $z\neq 0$, des dérivées par rapport aux coordonnées du point $A(x_1, \ldots, x_n)$ qui tendent uniformément dans le voisinage de chaque point intérieur A_0 vers la limite*

$$W'_{x_\beta}(A, z) \rightrightarrows \varrho(A)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega w(A, B)\,d\tau_B\Big]+ \\ +\iiint_\Omega w''_{x_\alpha x_\beta}(A, B)[\varrho(B)-\varrho(A)]\,d\tau_B \tag{18}$$

si $z\to 0$, dans l'hypothèse que la fonction $\varrho(B)$ vérifie la condition de Hölder.

Il est évident que la fonction (11) pour $z\neq 0$ admet en tout point A des dérivées déterminées par l'intégrale régulière

$$W'_{x_\beta}(A, z) = \iiint_\Omega \Psi''_{x_\alpha x_\beta}(A, B, z)\varrho(B)\,d\tau_B \quad (z\neq 0). \tag{19}$$

Pour démontrer l'existence d'une limite de cette intégrale, si $z \to 0$, décomposons-la en une somme de deux intégrales:

$$(20)\qquad W'_{x_\beta}(A, z) = \varrho(A)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega \Psi'_{x_\alpha}(A, B, z)\, d\tau_B\Big] + \\ + \iiint_\Omega \Psi''_{x_\alpha x_\beta}(A, B, z)[\varrho(B)-\varrho(A)]\, d\tau_B.$$

En répétant le raisonnement qui a conduit à la formule (5') nous aurons

$$(21)\qquad \iiint_\Omega \Psi'_{x_\alpha}(A, B, z)\, d\tau_B = \iiint_{\Omega-K} \Psi_{x_\alpha}(A, B, z)\, d\tau_B - \\ - \iint_{K^*} \Psi(A, P, z)\cos\nu_{\xi_\alpha}\, d\sigma_P,$$

où K désigne la sphère de centre A_0, située à l'intérieur du domaine Ω, et K^* désigne la surface de cette sphère. De l'égalité (21) on tire

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega \Psi'_{x_\alpha}(A, B, z)\, d\tau_\beta\Big] = \iiint_{\Omega-K} \Psi''_{x_\alpha x_\beta}(A, B, z)\, d\tau_B - \\ - \iint_{K^*} \Psi'_{x_\beta}(A, P, z)\cos\nu_{\xi_\alpha}\, d\sigma_P.$$

En remarquant que le centre A_0 est extérieur aux domaines d'intégration $\Omega-K$ et K^*, nous concluons que, dans un voisinage suffisamment petit du point A_0, la dérivée (22) tend uniformément vers la limite

$$(23)\qquad \iiint_{\Omega-K} \Psi_{x_\alpha x_\beta}(A, B, 0)\, d\tau_B - \iint_{K^*} \Psi'_{x_\beta}(A, P, 0)\cos\nu_{\xi_\alpha}\, d\sigma_P \\ = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega w'_{x_\alpha}(A, B)\, d\tau_B\Big]$$

si $z \to 0$. La fonction sous le signe de la seconde intégrale dans la somme (20) satisfait, en admettant que la condition de Hölder est remplie par la fonction $\varrho(B)$, à l'inégalité

$$(24)\qquad |\Psi''_{x_\alpha x_\beta}(A, B, z)[\varrho(B)-\varrho(A)]| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-\mu}},$$

cette fonction admet donc une singularité faible, si $B \to A$, $z \to 0$. Nous en concluons, en répétant le raisonnement du théorème 1, que la seconde intégrale de la somme (20) tend uniformément vers la limite

$$(25)\qquad \iiint_\Omega w''_{x_\alpha x_\beta}(A, B)[\varrho(B)-\varrho(A)]\, d\tau_B$$

si $z \to 0$. En rapprochant les limites (23) et (25) obtenues pour les termes de la somme (20), nous arrivons à la thèse (18) du théorème 2.

En égard au théorème classique sur la limite de la dérivée, les théorèmes 1 et 2 permettent de conclure que la limite (18) représente la dérivée de la limite (12), donc que le potential (4) admet des dérivées secondes continues déterminées par la formule

$$(26)\qquad \frac{\partial^2 V(A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \varrho(A)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega w(A, B)\, d\tau_B\Big] + \\ + \iiint_\Omega w''_{x_\alpha x_\beta}(A, B)[\varrho(B)-\varrho(A)]\, d\tau_B$$

en tout point intérieur A du domaine Ω. Nous en concluons ensuite que le résultat de l'opération $\hat{D}$ sur la fonction $V(A)$ est déterminé, en tout point intérieur A du domaine Ω par la formule

$$(27)\qquad \hat{D}[V(A)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 V(A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ = \varrho(A)\hat{D}\Big[\iiint_\Omega w(A, B)\, d\tau_B\Big] + \iiint_\Omega \hat{D}_A[w(A, B)][\varrho(B)-\varrho(A)]\, d\tau_B.$$

En tenant compte de l'égalité (6) et de l'égalité évidente $\hat{D}[w(A, B)] = 0$, si $A \neq B$, nous pouvons affirmer que le potentiel (4), dérivé de la densité $\varrho(A)$ (qui vérifie la condition de Hölder) satisfait à l'équation de Poisson de la forme

$$(28)\qquad \hat{D}[V(A)] = -(n-2)\varrho(A)\iint_\Lambda \frac{d\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\Big]^{n/2}}$$

en tout point intérieur A du domaine Ω.

On peut démontrer que

$$(28')\qquad \iint_\Lambda \frac{d\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\Big]^{n/2}} = \frac{\omega_n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}|}}$$

ω_n désignant l'aire de la surface sphérique Λ:

$$(28'')\qquad \omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

3. Étude de la quasi-solution dans le cas des coefficients variables. Supposons que les coefficients $a_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ soient des fonctions déterminées dans la fermeture du domaine mesurable Ω et vérifiant la condition de Hölder

(29) $$|a_{\alpha\beta}(B)-a_{\alpha\beta}(B_1)| < k r_{BB_1}^h \quad (0 < h \leqslant 1).$$

En outre on admet que la forme quadratique $\sum a_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est définie positive dans la fermeture du domaine Ω. Soit la fonction

(30) $$w^M(A, B) = \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)\Big]^{-n/2+1}$$

où les coefficients $a^{\alpha\beta}$ correspondent au point M. Cette fonction ne sera pas, en général, une solution de l'équation (2) aux points $A(x_1, \ldots, x_n) \neq B$; elle sera dite *quasi-solution* de l'équation (2). Remarquons que la forme quadratique dans l'expression (30) vérifie, pour tout couple de points A et B du domaine Ω, les inégalités

(31) $$g r_{AB} \leqslant \Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)\Big]^{1/2} \leqslant G r_{AB},$$

g et G étant des constantes positives déterminées.

Nous allons montrer que le résultat de l'opération $\hat{D}$ sur la fonction (30), par rapport au point A,

(32) $$\hat{D}_A[w^B(A, B)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A)\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

admet une singularité comparable à celle de la fonction $1/r_{AB}^{n-h}$, si $A \to B$, donc une singularité plus faible que les dérivées secondes de la fonction $w^B(A, B)$. Cette propriété résulte immédiatement de la relation

(33) $$\hat{D}_A[w^B(A, B)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(B)\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[a_{\alpha\beta}(A)-a_{\alpha\beta}(B)]\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

En effet, la première somme est nulle, donc en appliquant l'inégalité (29) nous aurons

(34) $$|\hat{D}_A w^B(A, B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

(35) $$V(A) = \iiint_\Omega w^B(A, B)\varrho(B)\,d\tau_B$$

analogue à l'intégrale (4), que nous appelons *quasi-potentiel* de charge spatiale de densité $\varrho(B)$.

Nous allons étudier les dérivées de la fonction (35), en supposant que la fonction $\varrho(B)$ vérifie la condition de Hölder dans le domaine Ω. Pour les dérivées premières on obtient sans peine, en appliquant la méthode des cylindres, la formule

(36) $$\frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha} = \iiint_\Omega w_{x_\alpha}^B(A, B)\varrho(B)\,d\tau_B$$

puisque la dérivée sous le signe d'intégrale admet une singularité faible, comme $1/r_{AB}^{n-1}$. Pour démontrer l'existence des dérivées secondes du quasi-potentiel (35), nous appliquerons une méthode analogue à celle utilisée pour l'étude du cas des coefficients constants.

Introduisons dès lors la fonction

(37) $$\Psi^M(A, B, z) = \Big[\prod_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)+z^2\Big]^{-n/2+1}$$

où M est un point arbitraire du domaine Ω et considérons l'intégrale

(38) $$T(A, z) = \iiint_\Omega \Psi_{x_\alpha}^B(A, B, z)\varrho(B)\,d\tau_B$$

déterminée en tout point (A, z) du cylindre à $n+1$ dimensions ($A \epsilon \Omega$; z arbitraire réel). Le théorème 1 de la page 250 s'applique évidemment à l'intégrale (38) et cette intégrale tend uniformément vers la dérivée du quasi-potentiel (35):

(39) $$T(A, z) \rightrightarrows \frac{\partial V(A)}{\partial x_\alpha}, \quad \text{si} \quad z \to 0.$$

THÉORÈME 3. *Si la densité $\varrho(B)$ et les coefficients $a_{\alpha\beta}(B)$ satisfont à la condition de Hölder, les dérivées de la fonction (38) par rapport aux coordonnées du point A à l'intérieur du domaine Ω et pour $z \neq 0$ tendent uniformément, dans un voisinage suffisamment petit de chaque point intérieur A_0, vers la limite*

(40) $$T'_{x_\beta}(A, z) \rightrightarrows \Big\{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big[\iiint_\Omega w^M(A, B)\varrho(B)\,d\tau_B\Big]\Big\}_{M=A} + \iiint_\Omega\Big[\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Big(\frac{\partial^2 w^M(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big)_{M=A}\Big]\varrho(B)\,d\tau_B \quad \textit{si} \quad z \to 0.$$

Pour démontrer ce théorème, remarquons que la fonction (38) admet, si $z \neq 0$, des dérivées par rapport aux coordonnées du point A, déterminées par l'intégrale régulière

(41) $$T'_{x_\beta}(A, z) = \iiint_\Omega \Psi_{x_\alpha x_\beta}^B(A, B, z)\varrho(B)\,d\tau_B.$$

icm©

Pour déterminer la limite de cette intégrale, lorsque $z\to 0$, nous l'écrivons de la façon suivante:

$$(42)\qquad T'_{x_\beta}(A,z)=\left\{\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[\iiint\limits_{\Omega}\Psi^M_{x_\alpha}(A,B,z)\varrho(B)d\tau_B\Big]\right\}_{M=A}+ \\ +\iiint\limits_{\Omega}\big[\Psi^B_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)-\big(\Psi^M_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)\big)_{M=A}\big]\,\varrho(B)d\tau_B.$$

Or, le point M est invariable dans l'intégration, donc le premier terme de la somme (42) représente la valeur admise par la dérivée de la fonction (11) avec les coefficients constants $a^{\alpha\beta}(M)$ si nous y posons, après la dérivation, $M=A$. Par conséquent, d'après le théorème 2, si $z\to 0$ le premier terme (42) tend uniformément (dans un voisinage suffisamment petit d'un point arbitraire intérieur A_0) vers la limite

$$(43)\qquad \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big[\iiint\limits_{\Omega}w^M(A,B)\varrho(B)d\tau_B\Big]\right\}_{M=A}$$

représentant la valeur que prend la dérivée seconde du potentiel dans le cas des coefficients constants $a_{\alpha\beta}(M)$, si on y pose, après la dérivation, $M=A$

Pour étudier l'existence de la limite du second terme de la somme (42), remarquons que les dérivées secondes de la fonction (37) s'expriment par les formules suivantes:

$$(44)\qquad \begin{aligned}\Psi^B_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)&=\frac{\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}a^{\alpha i}(B)a^{\beta k}(B)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)}{\big[\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(B)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)+z^2\big]^{n/2+1}},\\ \big(\Psi^M_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)\big)_{M=A}&=\frac{\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}a^{\alpha i}(A)a^{\beta k}(A)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)}{\big[\sum_{i,k=1}^{n}a^{ik}(A)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)+z^2\big]^{n/2+1}},\end{aligned}$$

où c_{ik} désignent des coefficients numériques. D'après l'hypothèse, les coefficients $a_{\alpha\beta}(B)$ vérifient la condition de Hölder (29), donc les fonctions $a^{\alpha\beta}(B)$, étant des combinaisons rationnelles des coefficients (de diviseur non nul), vérifient aussi la condition de Hölder avec l'exposant h. Il en résulte, par un calcul élémentaire, que la différence des dérivées secondes (44) vérifie une inégalité de la forme

$$(45)\qquad \big|\Psi^B_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)-\big(\Psi^M_{x_\alpha x_\beta}(A,B,z)\big)_{M=A}\big|<\frac{\text{const}}{(gr^2_{AB}+z^2)^{(n-h)}}$$

où g est une constante positive dans les inégalités (31). En posant $z=0$ on obtient l'inégalité

$$(46)\qquad \big|w^B_{x_\alpha x_\beta}(A,B)-\big(w^M_{x_\alpha x_\beta}(A,B)\big)_{M=A}\big|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}},$$

valable pour tout couple de points différents A,B du domaine Ω.

Les différences (45), (46) des dérivées secondes admettent donc une singularité faible, si $B\to A$, $z\to 0$, par conséquent, en répétant le raisonnement du théorème 1 (p. 250) sur la fonction $w(A,z)$ à singularité faible, nous concluerons que le second terme de la somme (42) tend uniformément vers la limite

$$(47)\qquad \iiint\limits_{\Omega}\big[w^B_{x_\alpha x_\beta}(A,B)-\big(w^M_{x_\alpha x_\beta}(A,B)\big)_{M=A}\big]\varrho(B)d\tau_B \quad \text{si}\quad z\to 0.$$

En réunissant les résultats concernant les limites (43) et (47), nous arrivons à la thèse du théorème 3, c'est-à-dire nous pouvons affirmer l'existence de la limite (40).

En nous appuyant sur les propriétés démontrées (39), (40), nous concluons l'existence des dérivées secondes du quasi-potentiel $V(A)$ déterminées par la formule

$$(48)\qquad \frac{\partial^2V(A)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big[\iiint\limits_{\Omega}w^M(A,B)\varrho(B)d\tau_B\Big]\right\}_{M=A}+ \\ +\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial^2w^B(A,B)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\left(\frac{\partial^2w^M(A,B)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)_{M=A}\right]\varrho(B)d\tau_B$$

en tout point intérieur A du domaine Ω. D'après la formule (48), nous obtiendrons le résultat suivant de l'operation $\hat{D}$ sur le quasi-potentiel $V(A)$:

$$(49)\qquad \hat{D}[V(A)]=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(A)\frac{\partial^2V(A)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} \\ =\left\{\hat{D}_A\Big[\iiint\limits_{\Omega}w^M(A,B)\varrho(B)d\tau_B\Big]\right\}_{M=A}+ \\ +\iiint\limits_{\Omega}\hat{D}_A\big[w^B(A,B)-\big(\hat{D}_Aw^M(AB)\big)_{M=A}\big]\varrho(B)d\tau_B.$$

D'après l'équation de Poisson (28), nous avons, comme dans le cas des coefficients constants, l'égalité

$$(50)\qquad \left\{\hat{D}_A\Big[\iiint\limits_{\Omega}w^M(A,B)\varrho(B)d\tau_B\Big]\right\}_{M=A}=-\lambda_n(A)\varrho(A)$$

où l'on a posé

$$(51)\qquad \lambda_n(A) = (n-2)\int\limits_A\int \frac{d\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\Big[\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(A)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\Big]^{n/2}} = \frac{(n-2)\,\omega_n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A)|}}$$

puisque les coefficients $a_{\alpha\beta}(A)$ de l'opération $\hat{D}$ concernent le point A et que nous substituons ce point, après la dérivation, à la place du point M dans les fonctions $a^{\alpha\beta}(M)$, figurant dans l'expression $w^M(A,B)$. Nous avons ensuite, pour la même raison

$$\big(\hat{D}_A w^M(A,B)\big)_{M=A} = 0.$$

Nous en déduisons enfin que les dérivées secondes du quasi-potentiel $V(A)$ vérifient l'équation généralisée de Poisson de la forme

$$(52)\qquad \hat{D}[V(A)] = -\lambda_n(A)\varrho(A) + \iiint\limits_{\Omega} \hat{D}_A[w^B(A,B)]\varrho(B)\,d\tau_B$$

en tout point intérieur A du domaine Ω. Remarquons que, d'après l'inégalité (46), la fonction sous le signe d'intégrale (52) admet une singularité faible

$$(53)\qquad \hat{D}_A[w^B(A,B)] < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}$$

et l'intégrale est absolument convergente.

L'inégalité (53) est en accord avec l'inégalité (34) obtenue directement. Observons que la fonction (51) est partout différente de zéro et qu'elle verifie la condition de Hölder.

Si la densité $\varrho(B)$ était bornée et intégrable dans le domaine Ω, mais ne vérifiait la condition de Hölder que dans le domaine Ω^* faisant partie du domaine Ω, alors il est facile de montrer que le quasi-potentiel $V(A)$ admetrait des dérivées secondes en tout point A à l'intérieur du domaine Ω^*.

4. Étude de la solution fondamentale. D'après E. Levi [2], nous allons trouver la solution fondamentale de l'équation $\hat{\Psi}(u) = 0$ sous la forme d'une somme $(A \neq B)$

$$(54)\qquad \Gamma(A,B) = w^B(A,B) + \iiint\limits_{\Omega'} w^M(A,M)\,\Phi(M,B)\,d\tau_M$$

de la quasi-solution et d'une intégrale étendue au domaine arbitraire borné et mesurable Ω', contenant à l'intérieur le domaine Ω avec sa surface limite. $\Phi(M,B)$ est une fonction inconnue des couples de points (M,B) du domaine prolongé Ω' et les fonctions $a_{\alpha\beta}(M)$, qui figurent dans l'expresion (54), sont prolongées en dehors du domaine Ω d'une

façon arbitraire, mais sous la condition que ces fonctions vérifient l'inégalité de Hölder (29) dans la fermeture du domaine Ω' et que la forme quadratique $\Sigma a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$ soit définie positive. Le point singulier B dans l'équation (54) est arbitrairement fixé dans le domaine Ω' et joue le rôle d'un paramètre. Dans la suite nous admettons que les coefficients $b_\alpha(A)$, $c(A)$ et leurs prolongements vérifient de même la condition de Hölder (29) dans le domaine Ω'.

En demandant que la fonction (54) vérifie l'équation

$$(55)\qquad \hat{\Psi}(u) = \hat{D}u + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0$$

en tout point intérieur A du domaine Ω' différent de B, on arrive, d'après l'équation (52), à l'équation intégrale suivante de Fredholm pour la détermination de la fonction inconnue Φ:

$$(56)\qquad \hat{\Psi}_A[w^B(A,B)] - \lambda_n(A)\Phi(A,B) + \iiint\limits_{\Omega'} \hat{\Psi}_A[w^M(A,M)]\Phi(M,B)\,d\tau_M = 0.$$

Le noyau

$$(57)\qquad \frac{1}{\lambda_n(A)}\hat{\Psi}_A[w^M(A,M)]$$

de l'équation (56) a une singularité faible, comme la fonction $1/r_{AM}^{n-h}$, si $M \to A$, donc, d'après le premier théorème de Fredholm, l'équation (56) admet une solution déterminée en tout point $A \neq B$ du domaine Ω', sous l'hypothèse que le domaine Ω et les fonctions $a_{\alpha\beta}(A)$ soient prolongés de façon que l'équation intégrale homogène, correspondant à l'équation (56), n'admettent que la solution nulle. La possibilité d'un tel prolongement n'est pas démontrée, mais il existe un autre raisonnement qui assure l'existence de la solution fondamentale, donné dans la monographie récente de C. Miranda [4]. Notamment, on ajoute à l'expression (54) de la solution fondamentale une somme de produits $\sum \alpha_\nu(A)\beta_\nu(B)$, où les dérivées secondes des fonctions $\alpha_\nu(A)$ et les fonctions $\beta_\nu(B)$ elles-mêmes vérifient la condition de Hölder de la forme (29). On arrive alors à l'équation intégrale de la forme

$$(56')\qquad \Psi_A\Big[w^B(A,B) + \sum_\nu \alpha_\nu(A)\beta_\nu(B)\Big] - \lambda_n(A)\Phi(A,B) + \iiint\limits_{\Omega'} \hat{\Psi}[w^M(A,M)]\Phi(M,B)\,d\tau_M = 0.$$

Si l'équation intégrale homogène correspondante admet des solutions non nulles, on peut toujours facilement choisir les fonctions $\alpha_\nu(A)$

et $\beta_\nu(B)$ pour que les conditions connues d'orthogonalité du troisième théorème de Fredholm soient satisfaites. De telle façon l'existence de la fonction Φ se trouve démontrée pour tout domaine Ω'. La solution de l'équation (56′) aura la forme

$$(58)\qquad \Phi(A, B) = \frac{1}{\lambda_n(A)} \hat{\Psi}_A \Big[w^B(A, B) + \sum_\nu a_\nu(A)\beta_\nu(B)\Big] + \\ + \iiint_{\Omega'} \mathfrak{M}(A, M)\hat{\Psi}_M\Big[w^B(M, B) + \sum_\nu a_\nu(M)\beta_\nu(B)\Big]d\tau_M,$$

$\mathfrak{M}(A, M)$ étant une fonction connue à singularité faible telle que $1/r_{AM}^{n-h}$. Le premier terme de la somme (58) a une singularité faible comparable à $1/r_{AB}^{n-h}$ et le second — une singularité plus faible $1/r_{AB}^{n-2h}$. Pour établir que la substitution de la fonction obtenue (58) dans la formule (54) fournira la solution fondamentale cherchée, nous allons démontrer d'important théorème suivant:

THÉORÈME 4. *La solution $\Phi(A, B)$ de l'équation intégrale (56′) vérifie la condition de Hölder de la forme*

$$(59)\qquad |\Phi(A, B) - \Phi(A_1, B)| < \frac{\text{const}}{\inf(r_{AB}^{n+1})}\cdot r_{AA_1}^{h'}$$

dans tout le domaine fermé Ω^* ($\Omega^* \subset \Omega'$) du point A, ne contenant pas le point B; h' désigne un nombre positif arbitraire inférieur à h et $\inf r_{AB}$ désigne la borne inférieure de la distance entre le point fixé B et le point variable A du domaine Ω^*.

Démonstration. Nous nous appuyerons sur l'équation intégrale (56′), en remarquant que la solution (58) est continue en tout point $A \neq B$. Commençons par l'étude du terme $\hat{\Psi}_A[w^B(A, B)]$. Il suffit d'étudier sa partie du second ordre $D_A[w^B(A, B)]$. Soient deux points arbitraires A et A_1 d'une partie fermée Ω^* du domaine Ω' ne contenant pas le point B. Nous avons alors

$$(60)\qquad \hat{D}_A[w^B(A, B)] - \hat{D}_A[w^B(A_1, B)] \\ = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [a_{\alpha\beta}(A) - a_{\alpha\beta}(A_1)]\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A_1)\left[\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\right].$$

Remarquons ensuite que les dérivées secondes de la fonction $w^B(A, B)$ par rapport aux coordonnées du point A s'expriment par la formule suivante:

$$(61)\qquad \frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}a^{\alpha i}(B)a^{\beta k}(B)(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)}{\Big[\sum\limits_{i,k=1}^{n} a^{ik}(B)(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\Big]^{n/2+1}},$$

c_{ik} étant des constantes numériques déterminées.

D'après cette expression, nous concluons que, en tout point A et A_1 du domaine arbitraire fermé Ω^*, situé dans le domaine Ω' et ne contenant pas le point B, les dérivées secondes de la fonction $w^B(A, B)$ vérifient les inégalités

$$(62)\qquad \left|\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| < \frac{c_1}{\inf(r_{AB}^n)}, \\ \left|\frac{\partial^2 w^B(A, B)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 w^B(A_1, B)}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\right| < \frac{c_2}{\inf(r_{AB}^{n+1})} r_{AA_1},$$

c_1 et c_2 étant des constantes positives déterminées, $\inf(r_{AB})$ désignant la borne inférieure de la distance entre le point B fixé et le point variable A dans le domaine Ω^*. En nous appuyant sur l'égalité (60) et les inégalités (62) nous concluons que le résultat de l'opération (59) vérifie dans le domaine Ω^* la condition de Hölder de la forme

$$(63)\qquad |\hat{D}_A[w^B(A, B)] - \hat{D}_{A_1}[w^B(A_1, B)]| < \frac{c'}{\inf(r_{AB}^{n+1})} r_{AA_1}^h,$$

c' étant une constante positive. Une inégalité de la même forme est évidemment vérifiée par l'opération $\big(1/\lambda_n(A)\big)\hat{\Psi}[w^B(A, B)]$.

Passons à l'étude de l'intégrale dans l'équation (56′). Il suffit de la faire pour la partie de cette intégrale qui contient les dérivées du second ordre; écrivons donc ($A \neq B$)

$$(64)\qquad I(A) = \iiint_{\Omega'} \hat{D}_A[w^M(A, M)]\Phi(M, B)d\tau_M \\ = \iiint_{\Omega'} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [a_{\alpha\beta}(A) - a_{\alpha\beta}(M)]\frac{\partial^2 w^M(A, M)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Phi(M, B)d\tau_M.$$

Soient deux points arbitraires A et A_1 de la partie fermée Ω^* du domaine Ω' ne contenant pas le point B et soit la sphère K de centre A et de rayon $2r_{AA_1}$. Décomposons l'intégrale (64) en trois termes:

$$(65)\qquad I(A) = I^{K'}(A) + I^{\bar{\Omega}^*}(A) + I^{\bar{\Omega}'}(A), \\ I(A_1) = I^{K'}(A_1) + I^{\bar{\Omega}^*}(A_1) + I^{\bar{\Omega}'}(A_1),$$

étendus à la partie K' du domaine Ω' située à l'intérieur de la sphère K, à la partie $\overline{\Omega}^*$ du domaine Ω^* extérieure à la sphère K et à la partie restante $\overline{\Omega}'$. Il suffit d'étudier le cas

$$r_{AA_1} \leqslant \tfrac{1}{4} \inf r_{AB}\,; \tag{65'}$$

avec cette hypothèse la distance entre le point fixe B et la surface de la sphère K ne sera pas inférieure au nombre $\frac{1}{2}\inf r_{AB}$. D'après la limitation connue

$$|\hat{D}_A[w^M(A, M)]| < \frac{c}{r_{AM}^{n-h}}$$

nous aurons

$$\begin{gathered} |I^{K'}(A)| < \sup|\Phi|\, c \int\limits_0^{2r_{AA_1}} \frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^{n-h}} = \frac{2^h \omega_n c}{h} \sup|\Phi| r_{AA_1}^h, \\ |I^{K'}(A_1)| < \sup|\Phi|\, c \int\limits_0^{3r_{AA_1}} \frac{\omega_n r^{n-1}}{r^{n-h}}\,dr = \frac{3^h \omega_n c}{h} \sup|\Phi| r_{AA_1}^h, \end{gathered} \tag{66}$$

ω_n désigne la surface de la sphère de rayon unité, $\sup|\Phi|$ — la borne supérieure de la fonction $|\Phi|$ dans le domaine fermé Ω^*, le point B étant fixé, Pour étudier la différence des seconds termes des sommes (65) écrivons. d'après (64)

$$\begin{aligned} I^{\overline{\Omega}^*}(A) - I^{\overline{\Omega}^*}(A_1) &= \iiint\limits_{\overline{\Omega}^*} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [a_{\alpha\beta}(A) - a_{\alpha\beta}(A_1)] \frac{\partial^2 w^M(A, M)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Phi(M, B)\, d\tau_M + \\ &\quad + \iiint\limits_{\overline{\Omega}^*} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [a_{\alpha\beta}(A_1) - a_{\alpha\beta}(M)] \left[\frac{\partial^2 w^M(A, M)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{\partial^2 w^M(A_1, M)}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\right] \Phi(M, B)\, d\tau_M, \end{aligned} \tag{67}$$

$(x'_1, \ldots, x'_n)$ étant les coordonnées du point A_1.

Or, en s'appuyant de même sur l'égalité (62) et en y remplaçant B par M, on a

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^2 w^M(A, M)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| < \frac{c'_1}{r_{AM}^n}, \\ \left|\frac{\partial^2 w^M(A, M)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 w^M(A_1 M)}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\right| < \frac{c'_2}{r_{A'M}^{n+1}} r_{AA_1}, \end{gathered} \tag{68}$$

c'_1 et c'_2 étant des constantes positives déterminées, A' désignant un point du segment AA_1.

En tenant compte de l'inégalité $r_{A'M} > \frac{1}{2} r_{AM}$ nous obtenons donc la limitation suivante:

$$\begin{aligned} &|I^{\overline{\Omega}^*}(A) - I^{\overline{\Omega}^*}(A_1)| \\ &\quad < c''_1 \sup|\Phi| r_{AA_1}^h \int\limits_{2r_{AA_1}}^{L} \frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^n} + c''_2 \sup|\Phi| r_{AA_1} \int\limits_{2r_{AA_1}}^{L} \frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^{n+1-h}} \\ &\quad = \left[c''_1 r_{AA_1}^h \log\frac{L}{2r_{AA_1}} + \frac{1}{1-h} c''_2 (2^{h-1} r_{AA_1}^h - L^{h-1} r_{AA_1})\right] \omega_n \sup|\Phi| \end{aligned}$$

d'où

$$|I^{\overline{\Omega}^*}(A) - I^{\overline{\Omega}^*}(A_1)| < c_3 \sup|\Phi| \cdot r_{AA_1}^{h'}, \tag{69}$$

h' désignant un nombre positif arbitraire, inférieur à h, c_3 — une constante positive, L — le diamètre du domaine Ω'.

Il reste à étudier la différence des troisièmes termes dans les sommes (65). Considérons donc une sphère Q de centre A et de rayon $\frac{1}{2} r_{AB}$; d'après (65'), cette sphère contient la sphère K. Soient $\overline{\Omega}'_i$, $\overline{\Omega}'_e$ les deux parties du domaine $\overline{\Omega}'$, situées à l'intérieur resp. à l'extérieur de la sphère Q. On étudiera la différence entre les intégrales $I^{\overline{\Omega}'_i}$ étendues au domaine intérieur $\overline{\Omega}'_i$ de la même façon que la différence (69) et on arrivera à l'inégalité analogue

$$|I^{\overline{\Omega}'_i}(A) - I^{\overline{\Omega}'_i}(A_1)| < c_4 \sup|\Phi| \cdot r_{AA_1}^{h'} \tag{70}$$

où la borne supérieure de la fonction $|\Phi|$ dans le domaine $\overline{\Omega}'_i$ vérifie l'inégalité

$$\sup|\Phi(A, B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}. \tag{71}$$

Pour étudier la différence des intégrales, étendues au domaine $\overline{\Omega}'_e$ contenant le point B, nous nous appuyerons de même sur la décomposition de la forme (67) et sur les inégalités (68), (71). De telle façon nous aurons

$$|I^{\overline{\Omega}'_e}(A) - I^{\overline{\Omega}'_e}(A_1)| < \text{const} \cdot \left[r_{AA_1}^h \iiint\limits_{\overline{\Omega}'_e} \frac{d\tau_M}{r_{AM}^n r_{MB}^{n-h}} + r_{AA_1} \iiint\limits_{\overline{\Omega}'_e} \frac{d\tau_M}{r_{AM}^{n+1-h} r_{MB}^{n-h}}\right].$$

Il en résulte

$$|I^{\overline{\Omega}'_e}(A) - I^{\overline{\Omega}'_e}(A_1)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n+1}} \cdot r_{AA_1}^{h'}. \tag{72}$$

En rapprochant les résultats (66), (69), (70) et (72), nous arriverons à la thèse (59) du théorème 4. Nous en concluons, d'après l'étude des secondes dérivées du quasi-potentiel, que la formule (54), où l'on a (58), représente la solution fondamentale $\Gamma(A,B)$ de l'équation $\Psi(u)=0$ dans le domaine Ω'.

Écrivons la solution fondamentale trouvée sous la forme

$$\Gamma(A,B)=w^B(A,B)+\overset{*}{w}(A,B) \tag{73}$$

en négligeant le terme régulier et en posant

$$\overset{*}{w}(A,B)=\iiint\limits_{\Omega'} w^M(A,M)\Phi(M,B)\,d\tau_M. \tag{74}$$

Le premier terme de la somme (73) admet une singularité comparable à $1/r_{AB}^{n-2}$ et le second terme — une singularité plus faible; nous avons en effet, d'après la limitation de la fonction $\Phi(M,B)$:

$$|\overset{*}{w}(A,B)|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2-h}}. \tag{75}$$

La fonction $\overset{*}{w}$ a des dérivées premières en tout point $A\neq B$:

$$\overset{*}{w}(A,B)=\iiint\limits_{\Omega'} w_{x_a}^M(A,M)\Phi(M,B)\,d\tau_M$$

et ces dérivées admettent la limitation à singularité faible

$$|\overset{*}{w}{}'_{x_a}(A,B)|<\text{const}\cdot\iiint\limits_{\Omega'}\frac{d\tau_M}{r_{AM}^{n-1}r_{MB}^{n-h}}<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-1-h}}. \tag{76}$$

5. Potentiel généralisé de charge spatiale.

DÉFINITION. Nous appelons *potentiel généralisé de charge spatiale, relativement à l'équation* (1), l'intégrale

$$W(A)=\iiint\limits_{\Omega}\Gamma(A,B)\varrho(B)\,d\tau_B \tag{77}$$

où $\varrho(B)$ — dite *densité de la charge* — est une fonction bornée et intégrable dans le domaine Ω.

THÉORÈME 5. *Si la densité $\varrho(B)$ est bornée et intégrable dans le domaine Ω, le potentiel* (77) *de charge spatiale admet en tout point $A\in\Omega$ des dérivées premières continues données par la formule*

$$W_{x_a}(A)=\iiint\limits_{\Omega}\Gamma_{x_a}(A,B)\varrho(B)\,d\tau_B. \tag{78}$$

La démonstration du théorème est la même que pour le quasi-potentiel, d'après la limitation à singularité faible (76). Le théorème suivant exprime les propriétés des dérivées secondes du potentiel (77).

THÉORÈME 6. *Si la densité ϱ vérifie dans le domaine Ω la condition de Hölder, le potentiel* (77) *admet, en tout point intérieur $A(x_1,\ldots,x_n)$ du domaine Ω, des dérivées secondes continues vérifiant l'équation généralisée de Poisson*

$$\hat{\Psi}[W(A)]=-\lambda_n(A)\varrho(A). \tag{79}$$

Démonstration. D'après la formule (73), écrivons le potentiel (77) sous la forme d'une somme

$$W(A)=V(A)+W_1(A) \tag{80}$$

de deux quasi-potentiels: le premier

$$V(A)=\iiint\limits_{\Omega} w^B(A,B)\varrho(B)\,d\tau_B \tag{81}$$

de dénsité $\varrho(B)$ donnée et le second

$$W_1(A)=\iiint\limits_{\Omega'(M)} w^M(A,M)\varrho_1(M)\,d\tau_M \tag{82}$$

de densité $\varrho_1(M)$, donnée par la formule

$$\varrho_1(M)=\iiint\limits_{\Omega(B)}\Phi(M,B)\varrho(B)\,d\tau_B. \tag{82'}$$

Nous démontrerons que la fonction (82') vérifie la condition de Hölder dans le domaine Ω, sous la seule hypothèse que la fonction ϱ est bornée et intégrable. D'après l'équation intégrale (56), vérifiée par la fonction Φ, nous pouvons écrire la fonction (82') sous la forme

$$\begin{aligned}\varrho_1(M)={}&\iiint\limits_{\Omega(B)}\lambda_n^{-1}(M)\hat{\Psi}_M[w^B(M,B)]\varrho(B)\,d\tau_B-\\&-\iiint\limits_{\Omega'(C)}\lambda_n^{-1}(M)\hat{\Psi}_M[w^C(M,C)]\varrho_1(C)\,d\tau_C\end{aligned} \tag{82''}$$

en tenant compte des singularités faibles des fonctions figurant dans les intégrales. Nous voyons que les deux intégrales précédentes sont analogues à l'intégrale étudiée (64), à condition de remplacer la fonction Φ par les fonctions $\varrho(B)$, $\varrho_1(C)$ d'un point variable. Donc, en répétant le raisonnement concernant l'intégrale (64) et en nous appuyant sur la continuité évidente de la fonction ϱ_1 dans le domaine Ω', nous voyons que la fonction (82'') vérifie dans le domaine Ω' la condition de Hölder de la forme

$$|\varrho_1(M)-\varrho_1(M_1)|<\text{const}\cdot\sup(\varrho,\varrho_1)\cdot r_{MM_1}^{h'}\quad(0<h'<h), \tag{82'''}$$

$\sup(\varrho, \varrho_1)$ désignant la plus grande des bornes supérieures des fonctions $|\varrho(B)|$ et $|\varrho_1(C)|$. En nous appuyant sur la propriété démontrée et sur le résultat (52) concernant le quasi-potentiel, nous pouvons affirmer que la fonction (82) admet des dérivées secondes vérifiant à l'intérieur du domaine Ω l'équation

$$\hat{\Psi}[W_1(A)] = -\lambda_n(A)\varrho_1(A) + \iiint\limits_{\Omega'(M)} \hat{\Psi}_A[w^M(A, M)]\varrho_1(M)\,d\tau_M. \tag{83}$$

Nous aurons donc, en supposant maintenant que la densité $\varrho(B)$ vérifie la condition de Hölder,

$$\hat{\Psi}[W(A)] = \hat{\Psi}_A\Big[\iiint\limits_{\Omega} w^B(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B\Big] + \hat{\Psi}[W_1(A)]$$

$$= -\lambda_n(A)\,\varrho(A) + \iiint\limits_{\Omega(B)} \hat{\Psi}_A[w^B(A, B)\varrho(B)]\,d\tau_B -$$

$$-\lambda_n(A)\,\varrho_1(A) + \iiint\limits_{\Omega'(M)} \hat{\Psi}_A[w^M(A, M)\varrho_1(M)]\,d\tau_M,$$

A étant un point à l'intérieur du domaine Ω. En substituant ici l'expression (82'), nous aurons ensuite

$$\hat{\Psi}[W(A)] = -\lambda_n(A)\,\varrho(A) + \tag{84}$$
$$+ \iiint\limits_{\Omega'(M)} \Big\{\hat{\Psi}_A[w^B(A, B)] - \lambda_n(A)\,\Phi(A, B) +$$
$$+ \iiint\limits_{\Omega'(M)} \hat{\Psi}_A[w^M(A, M)]\,\Phi(M, B)\,d\tau_M\Big\}\,d\tau_B,$$

donc, d'après l'équation intégrale (56), nous arriverons à la thèse (79) du théorème 6.

Si la densité $\varrho(B)$ était bornée et intégrable dans le domaine Ω, mais ne vérifiait la condition de Hölder que dans une partie Ω^* du domaine Ω, alors il est facile à montrer que l'équation (79) serait vraie en tout point intérieur A du domaine Ω^*.

Nous démontrerons encore la propriété suivante des dérivées du potentiel de charge spatiale (81), dont nous aurons besoin dans l'étude des problèmes aux limites.

Théorème 7. *Si la densité $\varrho(B)$ de la charge spatiale est une fonction bornée et intégrable dans le domaine Ω, les dérivées du potentiel de charge spatiale* (81) *vérifient dans le domaine Ω la condition de Hölder de la forme*

$$|W'_{x_a}(A) - W'_{x_a}(A_1)| \leqslant c M_a M_\varrho r^\delta_{AA_1} \qquad (0 < \delta < 1), \tag{85}$$

δ étant un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, M_ϱ — la borne supérieure de la fonction $|\varrho(B)|$, M_a — la borne supérieure d'ensemble de valeurs $|a^{\alpha\beta}(B)|$, c — une constante positive, indépendante de ϱ.

Démonstration. Le potentiel (81) est la somme de deux intégrales:

$$W(A) = \iiint\limits_{\Omega} w^B(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B + \iiint\limits_{\Omega} \overset{*}{w}(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B. \tag{86}$$

Or, d'après la propriété (76), la seconde admet des dérivées secondes par rapport aux coordonnées du point A, bornées dans le domaine Ω. Donc les dérivées de la seconde des intégrales (86) vérifient la condition de Lipschitz dans le domaine Ω. Il reste à étudier les dérivées de la première intégrale

$$V_{x_a}(A) = \iiint\limits_{\Omega} w^B_{x_a}(A, B)\,\varrho(B)\,d\tau_B \tag{87}$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega} \frac{(n-2)\sum\limits_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(B)(x_\beta - \xi_\beta)}{[\vartheta(A, B)]^n}\,\varrho(B)\,d\tau_B$$

où nous avons posé

$$\vartheta(A, B) = \sqrt{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c^{\alpha\beta}(B)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)}\,. \tag{88}$$

Considérons deux points arbitraires A et A_1 à l'intérieur du domaine Ω et soit une sphère K de centre A et de rayon $2r_{AA_1}$. Désignons par K' l'ensemble de tous les points du domaine Ω situés à l'intérieur de la sphère K et par $\Omega - K'$ l'ensemble des points extérieurs. Décomposons l'intégrale (87) et l'intégrale analogue au point A_1 en deux parties

$$V_{x_a}(A) = V^{K'}_{x_a}(A) + V^{\Omega-K'}_{x_a}(A), \qquad V_{x_a}(A_1) = V^{K'}_{x_a}(A) + V^{\Omega-K'}_{x_a}(A_1), \tag{89}$$

et remarquons que la métrique (88) vérifie les inégalités (31). Nous pouvons donc écrire

$$|V^{K'}_{x_a}(A)| < \frac{n(n-2)\,M_a M_\varrho}{g^n} \iiint\limits_{K} \frac{d\tau_B}{r^{n-1}_{AB}} = \frac{2n(n-2)M_a M_\varrho}{g^n}\,\omega_n r_{AA_1}, \tag{90}$$

$$|V^{K'}_{x_a}(A_1)| < \frac{3n(n-2)\,M_a M_\varrho}{g^n}\,\omega_n r_{AA_1},$$

M_a désignant la borne supérieure d'ensemble de valeurs $|a^{\alpha\beta}(B)|$.

Étudions maintenant la différence

$$V^{\Omega-K'}_{x_a}(A) - V^{\Omega-K'}_{x_a}(A_1) = -\iiint\limits_{\Omega-K'} \frac{(n-2)\sum\limits_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(B)(x_\beta - x'_\beta)}{[\vartheta(A, B)]^n}\,\varrho(B)\,d\tau_B - \tag{91}$$

$$-\iiint\limits_{\Omega-K'} (n-2)\sum_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(B)(x'_\beta - \xi_\beta)\Big\{\frac{1}{[\vartheta(A, B)]^n} - \frac{1}{[\vartheta(A_1, B)]^n}\Big\}\varrho(B)\,d\tau_B$$

x'_β désignant la coordonnée du point A_1.

En appliquant le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\left|\frac{1}{[\vartheta(A,B)]^n}-\frac{1}{[\vartheta(A_1,B)]^n}\right|\leqslant\frac{(n-2)n^2M_a r_{A*B}}{[\vartheta(A^*,B)]^{n+2}}r_{AA_1},$$

A^* étant un point à l'intérieur du segment AA_1. En nous appuyant sur les inégalités (31) et en remarquant que les points B du domaine $\Omega-K'$ vérifient les inégalités $\frac{1}{2}\leqslant r_{A*B}/r_{AB}\leqslant\frac{3}{2}$ nous pouvons écrire, d'après (91),

$$(92)\qquad |V_{x_a}^{\Omega-K'}(A)-V_{x_a}^{\Omega-K'}(A_1)|$$
$$\leqslant\frac{n(n-2)M_aM_\varrho}{g^n}\left[1+\frac{9\cdot 2^n n^2(n-2)M_a}{g^2}\right]r_{AA_1}\iiint\limits_{\Omega-K'}\frac{d\tau_B}{r_{AB}^n}.$$

L'intégrale obtenue étant comparable à $|\log r_{AA_1}|$, nous arrivons, en rapprochant les inégalités (90) et (92), à la thèse (85) de notre théorème.

6. Potentiel généralisé de simple couche. On appelle *potentiel généralisé de simple couche de densité* $\mu(Q)$, étalée sur la surface S, l'intégrale de surface suivante:

$$(93)\qquad u(A)=\iint\limits_S\Gamma(A,Q)\mu(Q)d\sigma_Q.$$

Cette fonction vérifie l'équation (1): $\hat{\Psi}[u(A)]=0$ en tout point A à l'intérieur du domaine Ω limité par la surface fermée S. D'après l'expression (73) de la solution fondamentale, nous pouvons écrire le potentiel sous la forme d'une somme

$$(94)\qquad u(A)=\iint\limits_S w^Q(A,Q)\mu(Q)d\sigma_Q+\iint\limits_S\overset{*}{w}(A,Q)\mu(Q)d\sigma_Q.$$

En supposant que la densité $\mu(Q)$ est continue, étudions la *dérivée transversale* du potentiel, c'est-à-dire l'expression

$$(95)\qquad \frac{du(A)}{dT_P}=\sum_{a,\beta=1}^n a_{a\beta}(A)\cos(N_P,x_\beta)\frac{\partial u(A)}{\partial x_a}$$

si le point intérieur A tend sur la normale vers le point P de la surface S. On a désigné par (N_P,x_β) l'angle que fait la normale intérieure à la surface S au point P avec l'axe de la coordonnée x_β.

En posant

$$(96)\qquad \vartheta(A,B)=\sqrt{\sum_{a,\beta=1}^n a^{a\beta}(B)(x_a-\xi_a)(x_\beta-\xi_\beta)}$$

nous aurons

$$(97)\qquad \frac{dw^Q(A,Q)}{dT_P}=-(n-2)\frac{\sum\limits_{a,\beta=1}^n a_{a\beta}(A)\cos(N_P,x_\beta)\left[\sum\limits_{\gamma=1}^n a^{a\gamma}(Q)(x_\gamma-\xi_\gamma)\right]}{[\vartheta(A,Q)]^n}$$
$$=(n-2)\frac{r_{AQ}\cos(N_P,\overrightarrow{AQ})}{[\vartheta(A,Q)]^{n/2}}-$$
$$-(n-2)\sum_{a,\beta=1}^n a_{a\beta}(A)\cos(N_P,x_\beta)\frac{\sum\limits_{\gamma=1}^n[a^{a\gamma}(Q)-a^{a\gamma}(A)](x_\gamma-\xi_\gamma)}{[\vartheta(A,Q)]^n}.$$

où $(N_P,\overrightarrow{AQ})$ désigne l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ et la normale N_P au point P. Nous en concluons, d'après l'inégalité de Hölder supposée vérifiée pour les coefficients $a_{a\beta}(A)$ et la propriété des dérivées (76) de la fonction $\overset{*}{w}$, que la dérivée transversale du potentiel (94) s'exprime par une somme d'intégrales de la forme

$$(98)\qquad \frac{du(A)}{dT_P}=(n-2)\iint\limits_S\frac{r_{AQ}\cos(N_P,\overrightarrow{AQ})}{[\vartheta(A,Q)]^n}\mu(Q)d\sigma_Q+\iint\limits_S\frac{F(A,P,Q)d\sigma_Q}{[\vartheta(A,Q)]^{n-1-h}},$$

$F(A,P,Q)$ étant bornée.

On suppose encore que la surface fermée S vérifie les conditions connues de Liapounoff; soit h_1 l'exposant dans l'inégalité

$$(99)\qquad \delta(P,P_1)<\text{const}\cdot r_{PP_1}^{h_1}\qquad(0<h_1\leqslant 1)$$

relative à l'angle $\delta(P,P_1)$ entre les deux normales à la surface S aux deux points arbitraires P et P_1. Sous cette hypothèse, on étudie la première intégrale (98) d'une façon analogue à l'intégrale connue

$$\iint\limits_S\frac{\cos(N_P,\overrightarrow{AQ})}{r_{AQ}^{n-1}}\mu(Q)d\sigma_Q$$

dans la théorie classique du potentiel et on arrive à la propriété limite suivante:

$$\lim_{A\to P}(n-2)\iint\limits_S\frac{r_{AQ}\cos(N_P,\overrightarrow{AQ})}{[\vartheta(A,Q)]^n}\mu(Q)d\sigma_Q$$
$$=-\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\mu(P)+(n-2)\iint\limits_S\frac{r_{PQ}\cos(N_P,\overrightarrow{PQ})}{[\vartheta(P,Q)]^n}\mu(Q)d\sigma_Q.$$

La seconde intégrale (98) tend évidemment vers sa valeur au point P, si $A \to P$. Il en résulte que la dérivée transversale (95) du potentiel (93) a la propriété limite suivante:

$$\lim_{A\to P}\frac{du(A)}{dT_P} = -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\mu(P)+\int_S\!\!\int\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}\mu(Q)\,d\sigma_Q \tag{100}$$

où

$$\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P)\cos(N_P, x_\beta)\frac{\partial\Gamma(P,Q)}{\partial x_\alpha} \tag{101}$$

désigne la dérivée transversale de la fonction $\Gamma(P,Q)$ au point $P\neq Q$; x_α est la coordonnée du point P. Nous allons vérifier que la dérivée transversale (101) admet une singularité faible, relativement à l'intégrale de surface (100).

Écrivons donc

$$\begin{aligned}\frac{dw^Q(P,Q)}{dT_P} &= -(n-2)\frac{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P)\cos(N_P,x_\beta)\left[\sum\limits_{\gamma=1}^{n} a^{\alpha\gamma}(Q)(x_\gamma-\xi_\gamma)\right]}{[\vartheta(P,Q)]^n}\\ &= (n-2)\frac{r_{PQ}\cos\nu_{PQ}}{[\vartheta(P,Q)]^n} - \\ &\quad -(n-2)\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P)\cos(N_P,x_\beta)\frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{n}[a^{\alpha\gamma}(Q)-a^{\alpha\gamma}(P)](x_\gamma-\xi_\gamma)}{[\vartheta(P,Q)]^n},\end{aligned} \tag{102}$$

ν_{PQ} désignant l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{r_{PQ}}$ et la normale intérieure au point P. Or, d'après la condition de Liapounoff, supposée remplie pour la surface S, nous avons l'inégalité

$$|\cos\nu_{PQ}| < \text{const}\cdot r_{PQ}^{h_1}, \tag{103}$$

en outre la fonction $\vartheta(A,B)$ vérifie dans le domaine Ω' les inégalités

$$g' r_{AB} \leqslant \vartheta(A,B) \leqslant G' r_{AB}, \tag{104}$$

g' et G' étant des constantes positives déterminées.

En appliquant encore les inégalités de Hölder (29) à l'expression (102), nous en concluons que la dérivée transversale (102) vérifie une inégalité de la forme

$$\left|\frac{dw^Q(P,Q)}{dT_P}\right| < \frac{\text{const}}{r_{PQ}^{n-1-h^*}}, \tag{105}$$

h^* étant le plus petit des deux nombres h, h_1. Il en résulte, d'après la formule (73) et les inégalités (76), que la dérivée transversale (101) vérifie l'inégalité

$$\left|\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}\right| < \frac{k}{r_{PQ}^{n-1-h^*}} \tag{106}$$

pour tout couple (P,Q) de points différents de la surface S, k étant une constante positive. La dérivée (101) admet donc une singularité faible, relativement à la surface S, et l'intégrale dans la relation (100) est absolument convergente.

Remarquons que la dérivée transversale (101) ne diffère que d'un facteur, en général variable, de la dérivée dans la direction de la conormale au point P, c'est-à-dire de la direction conjuguée au plan tangent en P par rapport à la quadrique $\sum a_{\alpha,\beta}X_\alpha X_\beta = \text{const.}$ L'usage de la dérivée transversale est préférable à cause de la simplicité du raisonnement et des formules.

Citons encore les propriétés suivantes des intégrales concernant le potentiel de simple couche, que nous utiliserons dans l'étude des problèmes aux limites:

THÉORÈME 8. *Si la fonction $\varphi(Q)$, déterminées sur la surface S, est bornée et intégrable, les intégrales de surface*

$$J_1(P) = \int_S\!\!\int \Gamma(P,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q, \qquad J_2(P) = \int_S\!\!\int \frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}\varphi(Q)\,d\sigma_Q, \tag{107}$$

vérifient les conditions de Hölder de la forme

$$|J_1(P)-J_1(P_1)| < k_1 M_\varphi r_{PP_1}^{\delta}, \qquad |J_2(P)-J_2(P_1)| < k_2 M_\varphi r_{PP_1}^{h'}, \tag{108}$$

δ étant un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité, h' — un nombre positif arbitraire, inférieur au plus petit des deux nombres h, h_1 et M_φ désignant la borne supérieure de la fonction $|\varphi(P)|$.

La démonstration relative à la première intégrale $J_1(P)$ est semblable à celle du théorème de la page 266, concernant le potentiel de la charge spatiale. La démonstration de la propriété (108) pour l'intégrale $J_2(P)$ n'est pas facile, mais nous ne la donnons pas ici, en remarquant seulement qu'elle est analogue au raisonnement que nous avons développé pour l'intégrale

$$\int_S\!\!\int \frac{\cos\nu_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}}\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

dans notre travail [5].

8. Premier problème aux limites. Soit l'équation elliptique générale

$$(109)\qquad \hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \\ + c(x_1, \ldots, x_n)u = F(x_1, \ldots, x_n, u).$$

On suppose

1° que les coefficients $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$ sont des fonctions déterminées dans la fermeture $\Omega+S$ du domaine borné Ω, limité par la surface S et qu'ils vérifient la condition de Hölder avec l'exposant h;

2° que la fonction $F(A, u)$ est déterminée dans la région fermée

$$(110)\qquad A(x_1, \ldots, x_n) \epsilon\, \Omega+S, \qquad |u| \leqslant R,$$

et vérifie la condition de Hölder

$$|F(A, u) - F(A_1, u_1)| < \text{const} \cdot (r_{AA_1}^{h_2} + |u-u_1|^{h_2}) \qquad (0 < h_2 \leqslant 1);$$

3° que la surface fermée S vérifie les conditions de Liapounoff avec l'exposant h_1.

Nous allons résoudre le problème de la recherche d'une fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfait à l'équation elliptique (109) en tout point intérieur $A(x_1, \ldots, x_n)$ du domaine Ω et vérifie la relation

$$(111)\qquad \frac{du}{dT_P} + g(P)u(P) = \Phi[P, u(P)]$$

entre la valeur limite de la dérivée transversale du/dT_P et la valeur limite $u(P)$ de la fonction $u(A)$ elle-même, en tout point P de la surface S.

Admettons, d'une manière générale, que les fonctions $g(P)$ et $\Phi(P, u)$ soient déterminées et continues sur la surface S resp. dans la région fermée

$$(112)\qquad P \epsilon S, \qquad |u| \leqslant R.$$

Le problème posé est une généralisation du problème non linéaire de Neumann posé et étudié pour l'équation de Laplace par T. Carlemann et L. Lichtenstein [3] par les moyens de l'analyse classique.

Pour résoudre le problème aux limites (111) relatif à l'équation (109), considérons l'équation intégrale

$$(113)\qquad u(A) = \iiint_{\Omega} \frac{\Gamma(A, B)}{\lambda_n(B)} F[B, u(B)]\, d\tau_B + \iint_S \Gamma(A, Q)\varphi(Q)\, d\sigma_Q$$

où le membre droit est la somme du potentiel généralisé de charge spatiale et du potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q)$.

Si la fonction continue $u(A)$ vérifie l'équation intégrale (113) en tout point $A \epsilon \Omega+S$, φ étant une fonction continue, elle admet des dérivées premières à l'intérieur du domaine Ω et par conséquent la fonction $F_1(B) = F[B, u(B)]$ vérifie la condition de Hölder dans tout domaine fermé Ω_1, situé à l'intérieur du domaine Ω. Il en résulte, d'après les propriétés citées des potentiels généralisés, que cette fonction vérifie alors l'équation différentielle (109): $\hat{\Psi}[u(A)] = F(A, u)$ en tout point intérieur A du domaine Ω.

Nous allons profiter de l'indétermination de la fonction inconnue $\varphi(Q)$ en demandant que la condition limite (111) soit remplie par la fonction (113) en tout point P de la surface S.

En nous appuyant sur la propriété limite (100) nous arrivons à l'équation intégrale suivante:

$$(114)\qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right]\varphi(Q)\, d\sigma_Q \\ = \iiint_{\Omega}\left[\frac{d\Gamma(P, B)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, B)\right]\frac{F[B, u(B)]}{\lambda_n(B)}\, d\tau_B + \\ + \Phi\left\{P, -\iiint_{\Omega}\frac{\Gamma(P, B)}{\lambda_n(B)} F[B, u(B)]\, d\tau_B + \iint_S \Gamma(P, Q)\varphi(Q)\, d\sigma_Q\right\}.$$

Le problème proposé est donc ramené à la résolution du système de deux équations intégrales (113) et (114) à deux fonctions inconnues $u(A)$, $\varphi(P)$, dont la première a pour région la domaine Ω et la seconde a pour région la surface S.

Nous supposons encore que l'équation intégrale homogène

$$(115)\qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right]\varphi(Q)\, d\sigma_Q = 0$$

correspondant à la condition limite homogène

$$\frac{dv}{dT_P} + g(P)v_P = 0$$

n'admet que la solution nulle $\varphi(P) = 0$.

Le système d'équations intégrales (113), (114) est insoluble par la méthode classique des approximations successives, à cause des hypothèses générales concernant les fonctions F et Φ. Nous résoudrons donc ce système par l'application du théorème topologique de J. Schauder [6] sur le point invariant d'une transformation dans l'espace de Banach:

„toute transformation continue d'un ensemble convexe, borné, fermé et contenu dans un espace de Banach, en un sous-ensemble compact a au moins un point invariant". Dans ce but, considérons un espace T composé de tous les couples de fonctions réelles $[u(A), \varphi(P)]$ continues, définies resp. dans le domaine $\Omega+S$ et sur la surface S. Cet espace sera complet, linéaire et normé, donc il sera un espace de Banach, si nous adopterons les définitions connues suivantes de la distance:

$$\delta(U, V) = \sup|u(A)-\overset{*}{u}(A)|+\sup|\varphi(P)-\overset{*}{\varphi}(P)| \tag{116}$$

des deux points $U[u(A), \varphi(P)]$ et $V[\overset{*}{u}(A), \overset{*}{\varphi}(P)]$, de la norme

$$\|U\| = \sup|u(A)|+\sup|\varphi(P)| \tag{117}$$

et des opérations linéaires

$$\begin{gathered}[u(A), \varphi(P)]+[\overset{*}{u}(A), \overset{*}{\varphi}(P)] = [u+\overset{*}{u}, \varphi+\overset{*}{\varphi}],\\ \lambda[u(A), \varphi(P)] = [\lambda u(A), \lambda\varphi(P)],\end{gathered} \tag{118}$$

λ étant un nombre réel quelconque.

Remarquons maintenant que, d'après (73), (75), on a l'inégalité suivante:

$$\iiint_\Omega \left|\frac{\Gamma(A,B)}{\lambda_n(B)}\right| d\tau_B \leqslant \text{const}\cdot\iiint_\Omega \frac{d\tau_B}{r_{AB}^{n-2}} \leqslant \text{const}\cdot\int_0^L \frac{\omega_n r^{n-1}dr}{r^{n-2}} = C'L^2, \tag{119}$$

ω_n désignant l'aire de la surface sphérique à n dimensions de rayon unité, L — le diamètre du domaine Ω, C' — une constante positive déterminée.

Supposons qu'on ait

$$M_F C' L^2 < R \tag{120}$$

où M_F désigne la borne supérieure de la fonction $|F(A, u)|$. Considérons maintenant dans l'espace T un ensemble E, composé de tous les points $U[u(A), \varphi(P)]$ vérifiant les inégalités

$$|u(A)| \leqslant R, \qquad |\varphi(P)| \leqslant \frac{R}{s} - \frac{M_F C' L^2}{s} \tag{121}$$

où s désigne la borne supérieure de l'intégrale de surface

$$\iint_S |\Gamma(A, Q)|\, d\sigma_Q \leqslant s \tag{122}$$

dans le domaine Ω. L'ensemble E est évidemment fermé et il est, en outre, convexe. En effet, si deux points U et V d'espace T satisfont aux inégalités (121), alors les points $(1-\gamma)U+\gamma V$ satisfont aussi aux inégalités (121) pour toute valeur γ dans l'intervalle (0,1).

Pour résoudre le système d'équations intégrales (113), (114), transformons l'ensemble E à l'aide de deux relations fonctionnelles suivantes:

$$\begin{aligned} v(A) &= -\iiint_\Omega \frac{\Gamma(A,B)}{\lambda_n(B)} F[B, u(B)]\, d\tau_B + \iint_S \Gamma(A, Q)\varphi(Q)\, d\sigma_Q, \\ &-\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\psi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right]\psi(Q)\, d\sigma_Q = \\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{d\Gamma(P, B)}{dT_P} + \Gamma(P, B)g(P)\right]\frac{F[B, u(B)]}{\lambda_n(B)}\, d\tau_B + \\ &+ \Phi\left\{P, -\iiint_\Omega \frac{\Gamma(P, B)}{\lambda_n(B)} F[B, u(B)]\, d\tau_B + \iint_S \Gamma(P, Q)\varphi(Q)\, d\sigma_Q\right\}. \end{aligned} \tag{123}$$

D'après l'hypothèse relative à l'équation intégrale homogène (115), l'équation intégrale de Fredholm à singularité faible

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\psi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right]\psi(Q)\, d\sigma_Q = f(P) \tag{124}$$

admet une solution déterminée $\psi(P)$ correspondant à la fonction donnée arbitraire et continue $f(P)$ sur la surface S. Il en résulte que les relations (123) font correspondre à tout point (u, φ) de l'ensemble E un point déterminé (v, ψ) de l'espace T. Cherchons les conditions pour que l'ensemble transformé E' de l'ensemble E fasse partie de cet ensemble. Remarquons donc que, d'après la formule connue de Fredholm, il existe une constante positive $\varkappa$, ne dépendant que de la surface S, des coefficients $a_{\alpha\beta}$, b_α, c et de la fonction g, telle que toute solution de l'équation (124) vérifie l'inégalité

$$|\psi(P)| \leqslant \varkappa M_f \tag{125}$$

où M_f désigne la borne supérieure de la fonction $|f(P)|$

$$|f(P)| \leqslant M_f. \tag{126}$$

Or nous avons, d'après (106),

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{1}{\lambda_n(B)}\left|\frac{d\Gamma(P, B)}{dT_P}\right| d\tau_B &< \text{const}\cdot\iiint_\Omega \frac{d\tau_B}{r_{PB}^{n-1-h^*}} \\ &\leqslant \text{const}\cdot\int_0^L r^{h^*}dr = k'L^{h^*+1},\end{aligned} \tag{127}$$

k' étant une constante positive, en outre on a toujours, d'après l'inégalité (121), $|v(A)| \leqslant R$.

Le point transformé (v, ψ) appartiendra donc à l'ensemble E, si nous admettons que les bornes supérieures M_F, M_Φ, M_g, L vérifient l'inégalité

$$(128)\qquad \varkappa(k'L^{h^*+1}+CM_gL^2)\,M_F+\varkappa M_\Phi \leqslant \frac{R}{s}-M_FC's^{-1}L^2$$

outre l'inégalité (120), M_g désigne la borne supérieure de la fonction $|g(P)|$.

La transformation (123) est évidemment *continue* dans l'espace T. En effet, soit une suite de points $\{U_n(u_n, \varphi_n)\}$ de l'ensemble E, tendant vers le point $U(u, \varphi)$ de cet ensemble. D'après la définition de la distance, les suites fonctionnelles $\{u_n(A)\}$ et $\{\varphi_n(P)\}$ tendent uniformément vers $u(A)$ resp. $\varphi(P)$. Il en résulte immédiatement que les suites de fonctions $v_n(A)$ et $\psi_n(P)$, qui se correspondent par les relations (123), tendent vers les fonctions $v(A)$ et $\psi(P)$ qui correspondent aux fonctions limites $u(A)$ et $\varphi(F)$.

Il reste à démontrer que l'ensemble transformé E' est *compact*.

Or les fonctions $v(A)$, $\psi(P)$ composantes des points de l'ensemble E' sont équibornées, d'après les inégalités (121). Ensuite, d'après les théorèmes, des pages 266, 271, toutes les intégrales qui figurent dans les relations (123) vérifient les inégalités de Hölder avec les coefficients fixés pour l'ensemble E'. Il en résulte que toutes les fonctions transformées $v(A)$, $\psi(P)$ obéissent à la même estimation de continuité: $|v(A)-v(A_1)|<\varepsilon$, $|\psi(P)-\psi(P_1)|<\varepsilon$, si $r_{AA_1}<\eta$, $r_{PP_1}<\eta$, η ne dépendant que de ε. Cela veut dire que les fonctions équibornées $v(A)$ et $\psi(P)$ sont équicontinues. Nous en concluons, d'après le théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble transformé E' est compact.

Toutes les conditions réquises pour l'application du théorème cité de J. Schauder étant vérifiées, il en résulte l'existence au moins d'un point $[\overset{*}{u}(A), \overset{*}{\varphi}(P)]$ de l'ensemble E, invariant relativement à la transformation (123), donc l'existence d'une solution $[\overset{*}{u}(A), \overset{*}{\varphi}(P)]$ du système d'équations intégrales (113) et (114). La fonction obtenue $\overset{*}{u}(A)$ est une solution du problème proposé, puisqu'elle vérifie la condition limite (111) et l'équation différentielle (109) en tout point intérieur A du domaine Ω, d'après le raisonnement de la page 273. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Si les fonctions $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c, F$ vérifient les conditions 1°, 2° et 3° de la page 272, si la fonction $F(A,u)$ et les fonctions continues données $g(P)$, $\Phi(P,u)$ dans la relation (111) vérifient les inégalités (120), (128), enfin si l'équation homogène (115) n'admet que la solution nulle, alors il existe, à l'intérieur du domaine Ω, au moins une solution de l'équation différentielle (109) qui vérifie la condition (111) en tout point de la surface limite S.*

9. Second problème aux limites. Soit maintenant l'équation elliptique de la forme plus générale

$$(129)\qquad \Psi(u)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n}b_\alpha(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+$$
$$+c(x_1,\dots,x_n)u=F\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_u}\right).$$

Nous admettons pour les coefficients $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$ et pour la surface S les mêmes hypothèses que précédemment. Quant à la fonction $F(A, u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ nous supposons qu'elle est définie dans la région fermée

$$(130)\qquad A\,\epsilon\,\Omega+S,\quad |u_\nu|\leqslant R\quad (\nu=0,1,\dots,n),$$

et qu'elle vérifie la condition de Hölder de la forme

$$(131)\qquad |F(A,u_0,u_1,\dots,u_n)-F(\bar A,\bar u_0,\bar u_1,\dots,\bar u_n)|$$
$$\leqslant \mathrm{const}\,(r^\gamma_{A\bar A}+\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu-\bar u_\nu|^\gamma)\quad (0<\gamma\leqslant 1).$$

Nous nous proposons de résoudre le problème de la détermination d'une fonction $u(A)$ qui vérifie l'équation (129) en tout point intérieur $A\,\epsilon\,\Omega$ et qui satisfait à la condition aux limites

$$(132)\qquad \frac{du}{dT_P}+g(P)u(P)=\Phi[P,u(P)]$$

en tout point P de la surface S. On admet maintenant l'hypothèse moins générale, que les fonctions $g(P)$ et $\Phi(P,u)$ vérifient la condition de Hölder de la forme

$$(133)\qquad \begin{aligned}&|g(P)-g(P_1)|<k_g r^\mu_{PP_1},\\ &|\Phi(P,u)-\Phi(P_1,u_1)|<k_\Phi[r^{\mu_1}_{PP_1}+|u-u_1|^{\mu_2}]\end{aligned}$$

si $P\,\epsilon\,\Omega$, $P_1\,\epsilon\,\Omega$, $|u|\leqslant R$, $|u_1|\leqslant R$.

Nous résoudrons aussi le problème proposé par l'application du théorème topologique de J. Schauder, mais d'une façon modifiée. Considérons dès lors une équation intégro-différentielle

$$(134)\qquad u(A)=\iiint_\Omega\frac{\Gamma(A,B)}{\lambda_n(B)}F\left[B,u(B),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]d\tau_B+$$
$$+\iint_S\Gamma(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

à deux fonctions inconnues $u(A)$, $\varphi(Q)$; $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ désignent les coordonnées du point B. En demandant que la somme des potentiels (134) vérifie la condition aux limites (132), on obtient, d'après (100), une équation intégro-différentielle de la forme suivante:

$$(135)\quad -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) + \iint\limits_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

$$= \iiint\limits_\Omega \left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,B)\right]\frac{1}{\lambda_n(B)} F\left[B, u(B), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] d\tau_B +$$

$$+ \Phi\left\{P, -\iiint\limits_\Omega \frac{\Gamma(P,B)}{\lambda_n(B)} F\left[B, u(B), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] d\tau_B + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_S \Gamma(P,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q\right\}.$$

Le problème posé est donc ramené à la résolution du système de deux équations intégro-différentielles (134), (135) à deux fonctions inconnues: $u(A)$ dans le domaine Ω et $\varphi(P)$ sur la surface S.

Pour résoudre le système d'équations (134), (135), considérons le système suivant de $n+2$ équations intégrales:

$$u(A) = -\iiint\limits_\Omega \Gamma(A,B)\frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B +$$

$$+ \iint\limits_S \Gamma(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q,$$

$$u_\nu(A) = -\iiint\limits_\Omega \Gamma'_{x_\nu}(A,B)\frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B +$$

$$(136)\quad + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\iint\limits_S \Gamma(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q\right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) + \iint\limits_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

$$= \iiint\limits_\Omega \left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,B)\right]\frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B +$$

$$+ \Phi\left\{P, -\iiint\limits_\Omega \frac{\Gamma(P,B)}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_S \Gamma(P,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q\right\}$$

à $n+2$ fonctions inconnues

$$(137)\quad u(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P).$$

Pour résoudre le système (136), considérons l'espace fonctionnel T composé de tous les systèmes de suites $U[u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P)]$ de $n+1$ fonctions continues $u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A)$ définies dans l'ensemble $\Omega+S$ et de toutes fonctions continues $\varphi(P)$ définies sur la surface S. On définit comme d'habitude la distance

$$(138)\quad \delta(U, \overline{U}) = \sum_{\nu=0}^{n} \sup|u_\nu(A) - \overline{u}_\nu(A)| + \sup|\overline{\varphi}(P) - \varphi(P)|$$

de deux points $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$, $\overline{U}[\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n, \overline{\varphi}]$ et les opérations linéaires:

$$U + \overline{U} = [u_0+\overline{u}_0, u_1+\overline{u}_1, \ldots, u_n+\overline{u}_n, \varphi+\overline{\varphi}], \quad \lambda U = [\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_n, \lambda\varphi].$$

L'espace T sera un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace T l'ensemble E de tous les points $U[u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P)]$ dont les composantes $u_\nu(A)$ vérifient l'inégalité

$$(139)\quad |u_\nu(A)| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

et dont la composante $\varphi(P)$ vérifie l'inégalité

$$(140)\quad |\varphi(P)| \leqslant \varrho$$

et la condition de Hölder de la forme

$$(141)\quad |\varphi(P) - \varphi(P_1)| \leqslant K_\varphi r_{PP_1}^{\mu^*}.$$

Nous admettons que les symboles M_F, C', L, s ont la même signification qu'à la page 274 et nous supposons que l'inégalité (120) est satisfaite. Pour l'exposant μ^* de Hölder dans l'inégalité (141) nous choisissons le plus petit des nombres suivantes:

$$(142)\quad \mu^* = \inf(h', \mu, \mu_1, \mu_2).$$

Le coefficient K_φ dans l'inégalité (141) a une valeur positive choisie arbitrairement et ϱ est fixé arbitrairement dans l'intervalle

$$(142')\quad 0 < \varrho \leqslant \frac{R}{s} - M_F C' L^2 s^{-1}.$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble E est fermé et convexe.

En tenant compte de la forme des équations intégrales (136), transformons l'ensemble E par les relations suivantes:

$$v_0(A) = -\iiint_{\Omega} \frac{\Gamma(A,B)}{\lambda_n(B)} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B + \iint_S \Gamma(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q,$$

$$v_\nu(A) = -\iiint_{\Omega} \Gamma'_{x_\nu}(A,B)\frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B + \iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

(143)

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\psi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,Q)\right]\psi(Q)\,d\sigma_Q$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,B)\right]\frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u_0(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B +$$

$$+ \Phi\left\{P, -\iiint_{\Omega} \frac{\Gamma(P,B)}{\lambda_n(B)} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B + \iint_S \Gamma(P,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q\right\}$$

en supposant que l'équation intégrale homogène (115) n'admet que la solution nulle. D'après l'hypothèse (141) sur la fonction $\varphi(P)$ et la théorie analogue à la théorie classique du potentiel de simple couche, l'intégrale de surface

(144) $$\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

tend uniformément vers des valeurs limites déterminées, si le point intérieur A tend vers un point arbitraire P de la surface S. Donc les relations (143) font correspondre à tout point $U[u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P)]$ de l'ensemble E un point déterminé $U'[v_0(A), v_1(A), \ldots, v_n(A), \psi(P)]$ de l'espace T. La transformation (143) est évidemment continue dans l'espace T.

Cherchons la condition pour que tout point transformé U' appartienne à l'ensemble E. Remarquons qu'on a

(145) $$\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q = \varphi(P)\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\,d\sigma_Q + \iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,d\sigma_Q,$$

P étant le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $A \epsilon \Omega$. Or la première des intégrales à droite est bornée dans Ω:

$$\left|\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\,d\sigma_Q\right| < C_1,$$

C_1 étant une constante positive déterminée. La seconde intégrale vérifie, d'après (141), l'inégalité

$$\left|\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)[\varphi(Q)-\varphi(P)]\,d\sigma_Q\right| < K_\varphi \iint_S \frac{\text{const}}{r_{AQ}^{n-1}} \cdot r_{PQ}^{\mu^*}\,d\sigma_Q < C_2 K_\varphi$$

et elle est absolument convergente si $A \to P$. Il existe donc des constantes positives C_1 et C_2, indépendantes de la fonction φ, telles que l'inégalité

(146) $$\left|\iint_S \Gamma'_{x_\nu}(A,Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q\right| \leqslant C_1\varrho + C_2 K_\varphi$$

soit vraie en tout point $A \epsilon \Omega$ pour toute fonction $\varphi(Q)$ vérifiant les conditions (140) et (141). En nous appuyant sur la limitation

$$\iiint_{\Omega} \lambda_n^{-1}(B)\,|\Gamma'_{x_\nu}(A,B)|\,d\tau_B \leqslant C'' L^{h+1},$$

sur les limitations des intégrales (119), (122), (127) et la limitation (125) de la solution de l'équation de Fredholm (124), nous concluons que la condition suffisante pour que les fonctions continues transformées $v_\nu(A)$ et ψ vérifient les inégalités

(147) $$|v_\nu(A)| \leqslant R, \quad |\psi(P)| \leqslant \varrho \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

s'exprime par les inégalités suivantes:

(148) $$C'' L^{h+1} M_F + C_1\varrho + C_2 K_\varphi \leqslant R, \quad (k' L^{h^*+1} + C' L^2 M_g) M_F + M_\Phi \leqslant \varrho/\varkappa.$$

Passons à l'étude de la condition de Hölder pour la fonction ψ. Citons d'abord le théorème auxiliaire suivant:

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Si la fonction $f(B)$ est continue dans le domaine $\Omega+S$, la fonction*

$$J_3(P) = \iiint_{\Omega} \frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} f(B)\,d\tau_B,$$

déterminée sur la surface S, vérifie la condition de Hölder de la forme

(149) $$|J_3(P) - J_3(P_1)| \leqslant k_3 M_f r_{PP_1}^{\bar h};$$

l'exposant $\bar h$ désigne le plus petit des deux exposants h, h_1, si $h+h_1 < 2$, ou bien un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité si $h = h_1 = 1$, M_f

est la borne supérieure de la fonction $|f(B)|$ et k_3 une constante positive indépendante de la fonction $f(B)$.

La démonstration du théorème, que nous omettrons, résulte d'une façon immédiate de la formule

$$\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(P)\cos(N_P, x_\beta)\frac{\partial\Gamma(P,B)}{\partial x_\alpha}$$

et du théorème (85) de la page 266.

En nous appuyant sur la continuité des fonctions $u_\nu(A)$ et $\psi(P)$, sur les théorèmes (85), (108), (149) et sur la propriété (133) supposée remplie pour les fonctions $g(P)$, $\Phi(P, u)$, nous concluons, d'après la dernière des relations (143), que la fonction $\psi(P)$ vérifie l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}|\lambda_n(P)\psi(P)-\lambda_n(P_1)\psi(P_1)| \\ &\leqslant (k_2 r_{PP_1}^{h'} + k_g s r_{PP_1}^{\mu} + k_1 M_g r_{PP_1}^{\delta})\varrho + (k_3 r_{PP_1}^{\bar{h}} + M_g C'' L^{h+1} r_{PP_1})\sup(\lambda_n^{-1}) M_F + \\ &\quad + C' L^2 k_g M_F r_{PP_1}^{\mu} + k_\Phi r_{PP_1}^{\mu_1} + k_\Phi[(C'' L^{h+1} M_F)^{\mu_2} + (C_1\varrho + C_2 K_\varphi)^{\mu_2}] r_{PP_1}^{\mu_2}.\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction transformée $\psi(P)$ vérifie la condition de Hölder de la forme

$$\begin{aligned}(150)\quad |\psi(P)-\psi(P_1)| \leqslant 2\{&(k_2+\tfrac{1}{2}k_\lambda+k_g s+k_1 M_g)\sup(\lambda_n^{-1})\varrho + \\ &+(k_3+M_g C'' L^{h+1})\sup(\lambda_n^{-2}) M_F + [C' L^2 k_g M_F + k_\Phi + \\ &+k_\Phi (C'' L^{h+1} M_F)^{\mu_2} + k_\Phi (C_1\varrho + C_2 K_\varphi)^{\mu_2}]\sup(\lambda_n^{-1})\} \Lambda r_{PP_1}^{\mu^*}\end{aligned}$$

où k_λ désigne le coefficient de Hölder dans l'inégalité $|\lambda_n(P)-\lambda_n(P_1)| \leqslant k_\lambda r_{PP_1}^{\mu^*}$ et Λ le plus grand des quatre nombres $L^{h'-\mu^*}$, $L^{\mu-\mu^*}$, $L^{\mu_1-\mu^*}$, $L^{\mu_2-\mu^*}$.

Nous en concluons que le point transformé $U'[v_0(A), v_1(A), \ldots, v_n(A), \psi(P)]$ appartiendra à l'ensemble E si les constantes données du problème vérifient les inégalités (148) et, en outre, l'inégalité

$$\begin{aligned}(151)\quad 2\Lambda\{&(k_2+\tfrac{1}{2}k_\lambda+k_g s+k_1 M_g) m_\lambda \varrho + (k_3+M_g C'' L^{h+1}) m_\lambda^2 M_F + \\ &+[C' L k_g M_F + k_\Phi + k_\Phi (C'' L^{h+1} M_F)^{\mu_2} + k_\Phi (C_1\varrho + C_2 K_\varphi)^{\mu_2}] m_\lambda\} \leqslant K_\varphi\end{aligned}$$

où l'on a posé $m_\lambda = \sup|\lambda_n^{-1}(A)|$.

Il reste à démontrer que l'ensemble transformé E est compact.

Remarquons donc que les fonctions $v_0(A)$ et $\psi(P)$, correspondant à tous les points de l'ensemble E, vérifient les inégalités de Hölder avec les mêmes coefficients pour tout l'ensemble E, par conséquent ces fonctions sont équicontinues.

Pour démontrer que les fonctions $v_1(A), \ldots, v_n(A)$ données par les formules (143) sont équicontinues, remarquons d'abord que d'après le

théorème (85) les intégrales de volume dans ces formules sont équicontinues. Il reste donc à prouver que les fonctions

$$(152)\qquad F_\nu(A) = \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, Q)\varphi(Q)\,d\sigma_Q$$

correspondant aux fonctions φ, vérifiant les inégalités (140), (141) sont équicontinues. Remarquons que, d'après la décomposition (145) et les propriétés (140), (141), les fonctions $F_\nu(A)$ tendent vers des fonctions limites $F_\nu(P)$ équicontinues sur la surface S, c'est-à-dire qu'au nombre positif arbitraire ε on peut faire correspondre un nombre η' tel qu'on ait

$$(153)\qquad |F_\nu(P)-F_\nu(P_1)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad r_{PP_1} < \eta'$$

pour tout l'ensemble E. La convergence des fonctions $F_\nu(A)$ vers les valeurs $F_\nu(P)$ étant uniforme, on peut ensuite trouver pour ε une surface S_ε, située à l'intérieur du domaine Ω assez proche de la surface S pour qu'on ait

$$(154)\qquad |F_\nu(A)-F_\nu(A_1)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad r_{AA_1'} < \eta'$$

pour l'ensemble des points Ω_ε situées entre les surfaces S, S_ε et sur ces surfaces elles-mêmes. Or les intégrales (152) ont des dérivées dans le domaine $\Omega - \Omega_\varepsilon$ et il existe un nombre supérieur aux valeurs absolues de ces dérivées pour tout l'ensemble E, donc on peut faire correspondre au nombre ε un nombre η'' tel qu'on ait $|F_\nu(A)-F_\nu(A_1)| < \varepsilon$, si $r_{AA_1} < \eta''$ simultanément pour tous les points dans l'ensemble E.

Toute fonction $F_\nu(A)$ correspondant aux points de l'ensemble E, vérifie donc l'inégalité $|F_\nu(A)-F_\nu(A_1)| < \varepsilon$, si $r_{AA_1} < \inf(\eta', \eta'')$ et ces fonctions sont équicontinues.

Il en résulte, d'après le théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble transformé E' est compact.

Toutes les conditions du théorème cité de Schauder étant satisfaites, nous en concluons l'existence dans l'ensemble E d'un point U^* invariant relativement à la transformation fonctionnelle (143), donc l'existence d'un système de fonctions $\overset{*}{u}(A), \overset{*}{u}_1(A), \ldots, \overset{*}{u}_n(A), \overset{*}{\varphi}(P)$ qui vérifient le système d'équations intégrales (136). Or, nous avons évidemment

$$\overset{*}{u}_\nu(A) = \frac{\partial \overset{*}{u}(A)}{\partial x_\nu}$$

donc les fonctions $\overset{*}{u}(A), \overset{*}{\varphi}(P)$ satisfont au système d'équations intégro-différentielles (134), (135). Remarquons ensuite que, d'après le théorème

icm©

(84), les fonctions $u_\nu(A)$ satisfont à la condition de Hölder et par conséquent la fonction composée

$$F_1(B) = \frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]$$

satisfait aussi à cette condition; il en résulte, d'après la propriété du potentiel généralisé de charge spatiale, que la fonction $\overset{*}{u}(A)$ vérifie l'équation différentielle donnée (129) en tout point intérieur A du domaine Ω. D'après l'équation (135), cette fonction vérifie aussi la condition limite (132) en tout point P de la surface S, donc elle est la solution cherchée du problème proposé. Par conséquent nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Si les fonctions* $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$, *vérifient les conditions* 1°, 2°, 3° *de la page* 272, *la fonction* $F(A, u_0, \ldots, u_n)$ *et les fonctions données* $g(P), \Phi(P, u)$ *vérifient les conditions de Hölder* (131), (133) *et les inégalités* (120), (148), (151), *enfin si l'équation* (115) *n'admet que la solution nulle, alors il existe au moins une fonction* $u(A)$ *qui vérifie l'équation différentielle* (129) *en tout point intérieur* A *du domaine* Ω *et la condition limite* (132) *en tout point* P *de la surface* S *limitant le domaine* Ω.

Observons que le choix de la constante de Hölder K_φ pour la fonction φ est arbitraire et le choix de la constante ϱ est arbitraire dans l'intervalle (142'). Il est donc naturel de profiter de cette circonstance et de choisir les constantes K_φ et ϱ de façon que les deux inégalités (148), (151) soient satisfaites simultanément. Ce choix n'est pas toujours possible, à moins que les bornes supérieures M_F, M_Φ, k_Φ ne soient suffisamment petites relativement aux autres constantes données du problème.

Travaux cités

[1] M. Gevrey, *Détermination et emploi des fonctions de Green*, Journal de Mathématiques, Paris 1930.

[2] E. Levi, *Sulle equazioni totalemente ellittiche*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo 24 (1907), p. 275-317.

[3] L. Lichtenstein, *Nichtlineare Integralgleichungen*, Berlin 1931.

[4] C. Miranda, *Sul equazioni di tipo ellittico*, Napoli 1955.

[5] W. Pogorzelski, *Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications*, Annales Polonici Mathematici 3(1), p. 46-75.

[6] J. Schauder, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

[7] W. Sternberg, *Über die lineaire elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Mathematische Zeitschrift 21 (1924), p. 286-311.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Bemerkungen über die Bruchteile von $p\alpha$

von S. Hartman (Wrocław) und S. Knapowski (Poznań)

Auf dem Grenzgebiet zwischen der Primzahlenlehre und der Theorie der diophantischen Approximationen tauchen Probleme auf, welche die Verteilung von $p\alpha \pmod 1$ (p durchläuft die Primzahlfolge) oder den Approximationsgrad einer gegebenen Irrationalzahl durch Brüche mit Primzahlnennern betreffen. Darauf beziehen sich Sätze 1 und 2. Herr V. Jarník, dem wir dieselben zur Kenntnis gebracht haben, hat in einer brieflichen Mitteilung aus einem Satz von I. M. Winogradow ([4], S. 177) folgenden Schluß gezogen:

(*) *Für jedes irrationale* α *und jedes* $\varepsilon > 0$ *hat die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{r}{p}\right| < \frac{1}{p^{6/5-\varepsilon}}$$

unendlich viele Lösungen in primen p *und ganzen* r.

Mann kann den erreichbaren Approximationsgrad von α durch Brüche r/p in Zusammenhang mit der Weltkonstanten von Linnik bringen [3]. Diese Konstante c ist dadurch bestimmt, daß in jeder arithmetischen Progression $b+jq$ ($j = 1, 2, \ldots$; $0 < b < q$; $(b, q) = 1$) eine Primzahl $p < q^c$ vorkommt. Der Wert von c ist unbekannt. Man weiß nur, daß wenn die sogenannte verallgemeinerte Riemannsche Hypothese zurecht besteht, dann der asymptotische Wert von c für $q \to \infty$ gleich 2 ist ([1], S. 58). Deshalb ist vielleicht trotz (*) auch folgender Satz von einigem Interesse:

SATZ 1. *Läßt die Zahl* α *die Approximation* $1/q^{c+1}$ *zu, so hat die Ungleichung*

(1)
$$\left|\alpha - \frac{r}{p}\right| < \frac{2}{p^{1+1/c}}$$

unendlich viele Lösungen in primen p *und ganzen* r.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen q und a, für welche

(2)
$$|\alpha - a/q| < q^{-c-1}, \quad (a, q) = 1.$$

Wir bezeichnen mit x_0 und y_0 die ganzzahlige Lösung der Gleichung

(3)
$$ax - qy = 1$$