

Travaux cités

- [1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.
 [2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 418-429.
 [3] — *Sur certaines propriétés des points extrémaux liés à un domaine plan*, ce volume, p. 32-36.
 [4] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*, ce volume, p. 147-156.

Sur la trigonométrie de Lobatchevsky

par S. STRASZEWICZ (Warszawa)

N. Lobatchevsky et J. Bolyai ont trouvé, comme on le sait, les formules de la trigonométrie hyperbolique en considérant la géométrie sur l'horisphère. Une première démonstration planimétrique de ces formules a été donnée par L. Gérard [1]. Après avoir établi les lemmes nécessaires concernant les triangles et les quadrilatères du plan hyperbolique, Gérard démontre le théorème que le rapport AD/BC des côtés d'un quadrilatère $ABCD$ rectangle en A, B, C tend vers la limite $\text{ch} AB/h$ (où h dépend du choix de l'unité de longueur), lorsque AD tend vers zéro, le côté AB restant fixe. Il en déduit la relation qui existe entre les côtés du triangle rectangle et ensuite d'autres formules. Ses démonstrations sont tout à fait élémentaires, cependant un peu longues et compliquées. H. Liebmann [2] a donné une démonstration basée sur les propriétés des arcs de l'horicycle, laissant d'ailleurs de côté la question de l'existence d'une mesure additive de ces arcs; on détermine d'abord la fonction $II(x)$ de Lobatchevsky et on en déduit les formules trigonométriques¹⁾. Deux autres méthodes ont été proposées par W. H. Young [4] et par O. Perron [3]. Young montre d'abord (en utilisant en partie les lemmes de Gérard) que les rapports des côtés d'un triangle rectangle, dont un des angles aigus reste fixe, tendent vers les fonctions trigonométriques de cet angle lorsque les côtés du triangle diminuent vers zéro. Cette démonstration, comme tout ce qui suit, est assez compliquée; on a recours aux lemmes concernant la longueur des arcs de cercle du plan hyperbolique et à plusieurs théorèmes d'analyse mathématique. Les démonstrations de Perron sont beaucoup plus simples; son point de départ est le même que celui de Young, mais il ne considère que des figures rectilignes; Perron admet l'existence de l'angle de parallélisme et n'arrive aux formules de la trigonométrie qu'après avoir déterminé préalablement la fonction $II(x)$.

Il m'a paru désirable de trouver pour les théorèmes de la trigonométrie hyperbolique des démonstrations plus simples et s'imposant d'une

¹⁾ Dans un livre tout récent de K. Borsuk et W. Szmielew sur les fondements de la géométrie [5] l'évaluation de la fonction $II(x)$ est basée sur une théorie rigoureuse du horicycle faisant usage de la notion du déficit d'une figure plane.

façon plus naturelle; c'est ce que j'ai essayé de faire dans le travail présent.

La base axiomatique est ici la même que chez Gérard, et plus restreinte que dans les autres mémoires cités. Le seul théorème de la géométrie non euclidienne dont je me sers est celui que la somme des angles du triangle est inférieure à π et je n'applique, en outre, que des théorèmes qui dérivent des axiomes I_{1,3}, II, III du système de Hilbert et de l'axiome d'Archimède; ainsi je ne fais usage ni de l'axiome de Dedekind ni de l'existence des parallèles au sens de Lobatchevsky.

1. Remarques préliminaires

1.1. UN LEMME ARITHMÉTIQUE. Soit E un ensemble de nombres positifs tel que si $x \in E$, $y \in E$ on a aussi $\frac{1}{2}x \in E$ et $x+y \in E$. Considérons la fonction

$$f(x) = g(x)/x$$

où $g(x)$ est une fonction définie pour tout $x \in E$, positive et croissante.

1° Si $f(x)$ remplit les conditions:

(α) $f(x/2) > f(x)$ pour tout $x \in E$,

(β) les inégalités $x < y$ et $f(x) > f(y)$ entraînent $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > f(y)$,

alors $f(x)$ est une fonction décroissante de x .

2° Pareillement, si $f(x)$ satisfait aux conditions:

(α^*) $f(x/2) < f(x)$ pour tout $x \in E$,

(β^*) les inégalités $x < y$ et $f(x) < f(y)$ entraînent $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < f(y)$,

alors $f(x)$ est une fonction croissante de x .

En effet, les conditions (α) et (β) étant remplies, on a d'après (α) $f(2^{-n}x) > f(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout n naturel.

Supposons qu'on ait, x appartenant à E ,

(α_1) $f(2^{-n}kx) > f(x)$

pour un nombre naturel n et pour tout nombre naturel $k < 2^n$ et soit k un nombre naturel $< 2^{n+1}$. Lorsque $k \leq 2^n$, on a alors

$$f(2^{-n-1}kx) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 2^{-n}kx\right) > f(x)$$

en vertu de (α) et de (α_1), et lorsque $k > 2^n$, on a

$$f(2^{-n-1}kx) = f\left[\frac{1}{2}(2^{-n}(k-2^n)+1)x\right] > f(x)$$

en vertu de (α_1) et de (β). On en conclut par induction que l'inégalité (α_1) subsiste pour tout $x \in E$, quels que soient les nombres naturels n et $k < 2^n$.

Ceci établi, soient x et $y > x$ des nombres de E et n_0 un nombre naturel tel que $x > 2^{-n_0}y$. Si n est un nombre naturel $\geq n_0$, il existe un nombre naturel $k < 2^n$, tel que

$$2^{-n}ky < x \leq 2^{-n}(k+1)y.$$

On a

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{g(x)} < \frac{2^{-n}ky}{g(2^{-n}ky)} + \frac{2^{-n}y}{g(x)} = \frac{1}{f(2^{-n}ky)} + \frac{y}{2^n g(x)} < \frac{1}{f(y)} + \frac{y}{2^n g(x)}$$

et, par conséquent, puisque n est arbitraire,

$$f(x) \geq f(y).$$

Pour établir l'inégalité stricte choisissons des entiers n_1 et k_1 tels qu'on ait

$$x < 2^{-n_1}k_1y < y;$$

d'après ce qui précède, on voit qu'en effet

$$f(x) \geq f(2^{-n_1}k_1y) > f(y).$$

La démonstration de la seconde partie du lemme est tout à fait analogue.

1.2. Considérons l'équation fonctionnelle

(γ) $f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x-y)$

et soit F l'ensemble des nombres $x = 2^{-n}ka$, où a est un nombre positif fixe et n et $k \leq 2^n$ des entiers non négatifs arbitraires. Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies dans F sont des solutions de l'équation (γ) dans leur domaine d'existence, et si en outre $f_1(0) = f_2(0)$, $f_1(a) = f_2(a)$, on a

$$f_1(x) = f_2(x)$$

pour tout x de F .

On démontre facilement cette proposition par induction.

1.3. Dans la suite nous désignerons les segments de droite et les angles par les mêmes symboles que leurs mesures respectives en supposant l'unité de longueur fixée et l'angle droit mesuré par le nombre $\pi/2$.

2. Les fonctions $\varphi(p, g)$, $\psi(p, g)$ du quadrilatère trirectangle

2.1. Considérons dans le plan hyperbolique un quadrilatère trirectangle, c'est-à-dire un quadrilatère qui a trois angles droits; la somme de tous ses angles étant $< 2\pi$, le quatrième angle est aigu. Nous dési-

nerons par p , r les côtés qui joignent les sommets des angles droits, par s , q les côtés respectivement opposés à p et r , et le quadrilatère par le symbole $(p, q; r, s)$. Les longueurs r , s sont bien déterminées par p , q et inversement; les quadrilatères $(p, q; r, s)$ et $(r, s; p, q)$ sont égaux. On constate les faits suivants:

2.2. $p < s$, $r < q$.

On le prouve en faisant tourner la figure autour d'une perpendiculaire élevée au milieu de r (ou de p).

2.3. Lorsque p reste constant, r et s sont des fonctions croissantes de q .

On le voit immédiatement en divisant le quadrilatère $(p, q; r, s)$ par une perpendiculaire à r .

2.4. Lorsque q reste constant, r est une fonction décroissante et s une fonction croissante de p .

Car, en prenant sur le côté AB du quadrilatère trirectangle $ABCD$ ($AB = p$, $AD = q$) une longueur $AE = p_1 < p$ et en menant en E une perpendiculaire à AB , qui coupera CD au point F , on voit que le pied G de la perpendiculaire DG abaissée du point D sur la droite EF se trouve sur le prolongement de EF ($\sphericalangle DFG = \sphericalangle EFC$ étant aigu). Par suite $r_1 = EG > EF > BC = r$, et $s_1 = DG < DF < DC = s$.

2.5. Posons dans un quadrilatère $(p, q; r, s)$

$$q/r = \varphi(p, q), \quad s/p = \psi(p, q).$$

Les fonctions $\varphi(p, q)$, $\psi(p, q)$ sont définies pour des longueurs p , q arbitraires; on a évidemment $\varphi(p, q) > 1$, $\psi(p, q) > 1$, $\varphi(p, q) = \varphi(r, s)$, $\psi(p, q) = \varphi(r, s)$.

2.6. $\varphi(p, q)$ est une fonction croissante par rapport à p .

2.7. $\psi(p, q)$ est une fonction croissante par rapport à q .

Cela résulte de 2.4 et de 2.3.

2.8. $\psi(p, q)$ est une fonction décroissante par rapport à p .

En effet, comme $\psi(p, q) = s/p$, la longueur s croissant avec p , il suffit de prouver que les conditions (α) et (β) du lemme 1.1 sont remplies.

(a) En revenant à la figure considérée dans 2.4 prenons $p_1 = p/2$ et soit H le symétrique du point D par rapport à EG ; les points D , G , H sont en ligne droite et il vient

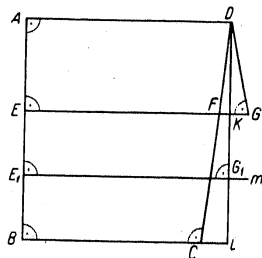


Fig. 1

$$\psi(p/2, q) = DG/AE = DH/AB > DC/AB = \psi(p, q)$$

ce qui vérifie la condition (α).

(b) Supposons que pour une longueur $p_1 < p$ on ait

$$(\delta) \quad \psi(p_1, q) > \psi(p, q)$$

et reprenons la figure du 2.4. Par le milieu E_1 de EB menons une perpendiculaire m à AB et abaissons la perpendiculaire DG_1 sur m . La droite DG_1 rencontrera la droite EG en un point K et la droite BC au point L symétrique de K par rapport à E_1G_1 . Comme

$$DK > DG, \quad DL > DC \quad \text{et} \quad DG/AE > DC/AB$$

(en vertu de (δ)), nous constatons que

$$\psi\left(\frac{p+p_1}{2}, q\right) = \frac{DG_1}{AE_1} = \frac{DK+DL}{AE+AB} > \frac{DG+DC}{AE+AB} > \frac{DC}{AB} = \psi(p, q),$$

et la condition (β) se trouve aussi vérifiée.

2.9. $\varphi(p, q)$ est une fonction croissante par rapport à q .

En effet, soit $ABCD$ un $(p, q; r, s)$ où $AB = p$, $AD = q$. Prenons sur AD une longueur $AD_1 = q_1 < q$, abaissons la perpendiculaire D_1C_1 sur la droite BC et ensuite la perpendiculaire DG sur la droite D_1C_1 . Comme $BC_1 = r_1 < r$, il vient d'après 2.8

$$\varphi(p, q) = \varphi(r, s) < \varphi(CC_1, s) = DG/CC_1.$$

Or, $DG < DD_1 = q - q_1$ et $CC_1 = r - r_1$, donc

$$\varphi(p, q) = q/r < (q - q_1)/(r - r_1)$$

et par suite $q_1/r_1 < q/r$ c'est-à-dire $\varphi(p, q_1) < \varphi(p, q)$.

3. Les fonctions $C(c, a)$, $S(c, a)$ du triangle rectangle

3.1. Nous adopterons pour un triangle ABC rectangle en C les notations usuelles: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$; a et b sont déterminés par c , α et inversement. Lorsque a reste fixe, α et b sont des fonctions croissantes de c . Posons

$$b/c = C(c, a), \quad a/c = S(c, a)$$

Les fonctions $C(c, a)$ et $S(c, a)$ sont définies pour c et $a < \pi/2$ arbitraires; on a $C(c, a) < 1$, $S(c, a) < 1$, $S(c, a) = C(c, \beta)$. Lorsque c reste constant, $S(c, a)$ est une fonction croissante et $C(c, a)$ une fonction décroissante de a .

3.2. L'angle α restant fixe, $S(c, \alpha)$ est une fonction croissante de c .

Comme α croît avec c , il suffit de montrer que $S(c, \alpha)$ satisfait aux conditions (α^*) et (β^*) du lemme 1.1.

(a) Du milieu E de l'hypoténuse AB du triangle ABC abaissons la perpendiculaire EF sur AC et ensuite la perpendiculaire BG sur la droite EF . Les triangles rectangles AEF et BEG étant égaux, on a $GE = EF$; d'autre part, $GF < BC$. Il en résulte que

$$S(c/2, \alpha) = EF/AE = GF/AB < BC/AB = S(c, \alpha)$$

et la condition (α^*) se trouve vérifiée.

(b) Supposons que pour une longueur $c_1 < c$ on ait

$$(c) \quad S(c_1, \alpha) < S(c, \alpha);$$

Prenons sur l'hypoténuse $AB = c$ du triangle ABC le segment $AB_1 = c_1$. Soient: B_2 le milieu de B_1B , C_1 et C_2 les pieds des perpendiculaires abaissées des points B_1 et B_2 sur AC , enfin G et H les pieds des perpendiculaires abaissées de B et de B_1 sur la droite B_2C_2 . Les triangles rectangles BB_2G et B_1B_2H sont égaux, donc $GB_2 = B_2H$; d'autre part, $GC_2 < BC$, $HC_2 < B_1C_1$, et $B_1C_1/AB_1 < BC/AB$ (en vertu de (c)). Il en résulte que

$$S\left(\frac{c_1+c}{2}, \alpha\right) = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{GC_2+HC_2}{AB+AB_1} < \frac{BC+B_1C_1}{AB+AB_1} < \frac{BC}{AB} = S(c, \alpha),$$

ce qui exprime la condition (β^*).

3.3. L'angle α restant fixe, $C(c, \alpha)$ est une fonction décroissante de c .

En effet, soit $AB_1 = c_1 < c$ un segment pris sur l'hypoténuse $AB = c$ du triangle ABC ; abaissons la perpendiculaire B_1C_1 sur AC et la perpendiculaire B_1K sur BC . On a

$$B_1K > C_1C = b - b_1, \quad B_1B = c - c_1;$$

en tenant compte de 3.2 on obtient

$$\frac{b}{c} = C(c, \alpha) = S(c, \beta) > S(c - c_1, \beta) = \frac{B_1K}{B_1B} > \frac{b - b_1}{c - c_1}$$

et par suite $b_1/c_1 > b/c$, c'est-à-dire $C(c_1, \alpha) > C(c, \alpha)$.

4. La fonction $\varphi(x)$

4.1. La fonction $\varphi(p, q)$ étant > 1 et croissant avec q , il existe une limite

$$\lim_{q \rightarrow 0} \varphi(p, q) = \varphi(p),$$

quelle que soit la longueur p et l'on a $1 \leq \varphi(p) < \varphi(p, q)$. Nous conviendrons, en outre, que $\varphi(0) = 1$.

4.2. $\varphi(x)$ est une fonction non décroissante de x .

En effet, lorsque $0 < y < x$, on a pour un q quelconque (2.6)

$$\varphi(y, q) < \varphi(x, q)$$

et par suite $\varphi(y) \leq \varphi(x)$.

De plus, $\varphi(0) = 1 \leq \varphi(x)$ pour tout x .

4.3. Lorsque $x \geq y$, on a

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(x-y).$$

Il suffit, évidemment, de considérer le cas où $y > 0$; supposons d'abord que $y < x$. Prenons sur une droite des points K, L, M, N tels qu'on ait $KL = x$, $LM = LN = y$, $KM = x+y$, $KN = x-y$ et menons par ces points respectivement les demi-droites k, l, m, n perpendiculaires à la droite KM et situées d'un même côté de cette droite. D'un point K_1 pris sur k et différent de K abaissons la perpendiculaire K_1M_1 sur m et la perpendiculaire K_1L_1 sur l ; le point d'intersection L_2 de K_1M_1 avec l se trouve (l'angle LL_2M_1 étant aigu) entre L et L_1 . Abaissons ensuite la perpendiculaire L_2N_1 sur n ; les quadrilatères LL_2M_1M et LL_2N_1N sont symétriques par rapport à LL_2 ; par suite $NN_1 = MM_1$ et $\sphericalangle N_1L_2L = \sphericalangle M_1L_2L = \sphericalangle K_1L_2L_1$. La demi-droite L_2N_1 passe par l'intérieur de l'angle obtus LL_2K_1 ; ne pouvant rencontrer la droite KM , cette demi-droite coupe le segment KK_1 en un point K_2 entre K et K_1 . Abaissons enfin la perpendiculaire K_2L_3 sur l ; le point L_3 tombe entre L et L_2 .

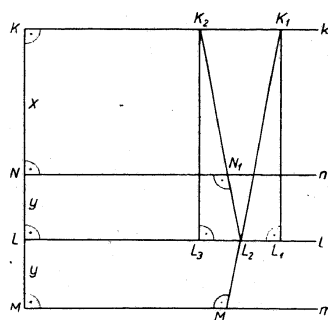


Fig. 2

Dans le quadrilatère birectangle $K_1K_2L_3L_1$ l'angle $K_1K_2L_3$ est obtus, donc $K_2L_3 < K_1L_1$; il s'ensuit que dans les triangles rectangles $K_2L_2L_3$ et $K_1L_2L_1$, ayant des angles égaux au sommet L_2 , on a $L_3L_2 < L_2L_1$, $K_2L_2 < K_1L_2$ et par suite d'après 3.3 $L_3L_2/K_2L_2 > L_2L_1/K_1L_2$, d'où il vient

$$1 < L_3L_1/L_3L_2 < K_1L_2/K_2L_2.$$

De la figure ainsi construite on tire

$$\begin{aligned} \frac{KK_1}{MM_1} &= \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{LL_1}{MM_1} = \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{LL_2}{MM_1} + \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{L_2L_1}{MM_1} \\ &= \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{LL_2}{MM_1} + \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{L_2L_1}{L_3L_2} \cdot \frac{LL_2 - LL_3}{MM_1} \\ &= \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{LL_2}{MM_1} \left(1 + \frac{L_2L_1}{L_3L_2} \right) - \frac{KK_1}{LL_1} \cdot \frac{LL_3}{KK_2} \cdot \frac{KK_2}{NN_1} \cdot \frac{L_2L_1}{L_3L_2}; \end{aligned}$$

d'après les notations adoptées on a donc

$$\begin{aligned} \varphi(x+y, KK_1) &= \varphi(x, KK_1)\varphi(y, LL_2) \left(1 + \frac{L_2L_1}{L_3L_2} \right) - \\ &\quad - \varphi(x, KK_1) \frac{1}{\varphi(x, KK_2)} \varphi(x-y, KK_2) \frac{L_2L_1}{L_3L_2}. \end{aligned}$$

Faisons tendre KK_1 vers zéro; il en sera de même de KK_2 et de LL_2 . Les longueurs K_2L_2 et K_1L_2 tendent alors vers la même limite x , par suite le rapport L_2L_1/L_3L_2 tend vers l'unité. On déduit donc de la relation précédente qu'en effet

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(x-y).$$

Lorsque $x = y$, la démonstration reste la même, avec la seule modification que les points N et N_1 coïncident alors avec K et K_2 , par suite $KK_2/NN_1 = 1$ et l'égalité en question prend la forme

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x)^2 - 1.$$

4.4. THÉORÈME 1.

$$\varphi(x) = \text{ch}(x/h), \text{ où } h = 1/\text{ar ch } \varphi(1).$$

En effet, $\varphi(x)$ et $\text{ch}(x/h)$ sont des solutions de l'équation fonctionnelle (γ) satisfaisant aux conditions $\varphi(0) = \text{ch } 0$ et $\varphi(1) = \text{ch}(1/h)$; on vérifie par induction que $\varphi(2^n) = \text{ch}(2^n/h)$. Donc, d'après 1.2,

$$\varphi(k/2^n) = \text{ch}(k/2^n h),$$

où k et n sont des entiers non négatifs arbitraires. Puisque $\varphi(x)$ est une fonction monotone et $\text{ch}(x/h)$ une fonction continue, l'égalité $\varphi(x) = \text{ch}(x/h)$ subsiste dans tout le domaine d'existence de $\varphi(x)$.

4.5. Dans tout quadrilatère trirectangle (p, q, r, s)

$$\text{ch}(r/h) < \psi(p, q) < \text{ch}(q/h).$$

En effet, on a d'abord [4.1]

$$\text{ch}(r/h) < \varphi(r, s) = \psi(p, q).$$

Considérons ensuite un quadrilatère trirectangle ($p_1, q_1; r_1, s_1$), où $r_1 = q, s_1 < p$; nous aurons $p_1 < s_1 < p, q_1 > r_1 = q$ et en vertu de 2.7 et de 2.8 il vient

$$\psi(p, q) < \psi(p_1, q) < \psi(p_1, q_1) = \varphi(r_1, s_1) = \varphi(q, s_1).$$

Lorsque s_1 diminue ($r_1 = q$ restant fixe), p_1 diminue aussi, $\psi(p_1, q)$ augmente (2.8), $\varphi(q, s_1)$ diminue (2.9) et il résulte de la relation précédente que

$$\psi(p, q) < \lim_{p_1 \rightarrow 0} \psi(p_1, q) \leq \lim_{s_1 \rightarrow 0} \varphi(q, s_1) = \text{ch}(q/h).$$

4.6. A tout $\varepsilon > 0$ on peut assigner un $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$1 < \psi(p, q) < 1 + \varepsilon,$$

quelle que soit la longueur p , pourvu que q soit inférieur à δ .

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité $1 < \psi(p, q) < \text{ch}(q/h)$.

Remarque. Lorsque p tend vers zéro (q restant fixe), r tend vers q et l'inégalité 4.5 donne $\lim_{p \rightarrow 0} \psi(p, q) = \text{ch}(q/h)$; on voit aussi que

$\lim_{q \rightarrow 0} \psi(p, q) = 1, \lim_{p \rightarrow 0} \varphi(p, q) = 1$. D'ailleurs, ces relations n'interviendront pas dans la suite.

5. Les fonctions $O(x)$ et $S(x)$

5.1. Soit c une longueur et x un angle aigu. Les fonctions $O(c, x)$ et $S(c, x)$ étant positives, inférieures à 1 et monotones par rapport à c , les limites

$$C(x) = \lim_{c \rightarrow 0} O(c, x), \quad S(x) = \lim_{c \rightarrow 0} S(c, x)$$

existent et l'on a (3.2 et 3.3)

$$O(c, x) < O(x) \leq 1, \quad S(x) < S(c, x) < 1.$$

Nous poserons en outre

$$C(0) = S(\frac{1}{2}\pi) = 1, \quad C(\frac{1}{2}\pi) = S(0) = 0.$$

5.2. On a $S(x) = O(\frac{1}{2}\pi - x)$.

Il suffit, évidemment, de considérer le cas où $0 < x < \pi/2$. Soit ABC un triangle rectangle dont l'hypoténuse $AB = c$, et $\sphericalangle BAC = x$. Menons par le point A une perpendiculaire m à AC et abaissons la perpendiculaire BD sur m . Comme $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\pi - x$, il vient

$$S(c, x) = BC/AB = (BC/AD)(AD/AB) = \psi(AD, DB)C(c, \frac{1}{2}\pi - x).$$

Si c tend vers 0, il en est de même de DB et l'on obtient en vertu de 4.6 la relation demandée.

Remarquons qu'on a, par conséquent, $C(x) < 1$ pour tout $x > 0$.

5.3. Lorsque $0 \leq x < y \leq \frac{1}{2}\pi$ on a

$$C(x) \geq C(y), \quad S(x) \leq S(y).$$

Chacune de ces inégalités impliquant l'autre (5.2), il suffit de démontrer la première; comme $C(\frac{1}{2}\pi) < C(x) < C(0)$, nous n'avons qu'à considérer le cas où $0 < x < y < \frac{1}{2}\pi$.

Or, on a dans ce cas pour un c quelconque (3.1)

$$C(c, x) > C(c, y),$$

d'où résulte notre proposition par le passage à la limite $c \rightarrow 0$.

5.4. Les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ sont continues.

Il suffit de montrer que $C(x)$ et $S(x)$ sont continues à droite, la continuité à droite d'une de ces fonctions impliquant (en vertu de 5.2) la continuité à gauche de l'autre.

Soit x un angle aigu, ε un nombre positif et c une longueur telle qu'on ait

$$(*) \quad C(c, x) > C(x) - \varepsilon/2, \quad S(c, x) < S(x) + \varepsilon/2.$$

Considérons un triangle rectangle ABC , dont l'hypoténuse $AB = c$ et $\sphericalangle BAC = x$. Sur le prolongement de CB au delà de B prenons un point D tel que

$$(**) \quad BD/AB < \varepsilon/2,$$

et soit δ le nombre qui mesure l'angle DAB . Si $0 < h < \delta$, la demi-droite issue de A du même côté de AC que AB et faisant avec AC l'angle $x+h$ tombe dans l'intérieur de l'angle DAB et rencontre par conséquent le segment BD en un point intérieur B_1 . On aura alors en vertu de 5.1, 5.3, (*) et (**)

$$\begin{aligned} |C(x+h) - C(x)| &= C(x) - C(x+h) < AC/AB + \varepsilon/2 - AC/AB_1 \\ &< (AC/AB_1)(BB_1/AB) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S(x+h) - S(x)| &= S(x+h) - S(x) < B_1C/AB_1 - BC/AB + \varepsilon/2 \\ &< BB_1/AB + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ sont donc continues à droite pour tout angle x aigu. Leur continuité pour $x = 0$ résulte de la remarque que si, dans la figure considérée tout à l'heure, on fait tendre x vers zéro, AC

restant fixe, on voit que $AC/AB \rightarrow 1$, $BC/AB \rightarrow 0$, et comme d'après 5.1 $AC/AB < C(x)$, $BC/AB > S(x)$, il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1 = C(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0 = S(0).$$

5.5. α étant un angle aigu et c une longueur, on a

$$\lim_{(c, x) \rightarrow (+0, \alpha-0)} C(c, x) = C(\alpha), \quad \lim_{(c, x) \rightarrow (+0, \alpha-0)} S(c, x) = S(\alpha).$$

Soit, en effet, ε un nombre positif; il existe (5.1) un $\delta_1 > 0$ tel que l'inégalité $c < \delta_1$ entraîne les inégalités

$$C(c, \alpha) > C(\alpha) - \varepsilon, \quad S(c, \alpha) < S(\alpha) + \varepsilon;$$

on aura alors (3.1) pour tout angle $x < \alpha$

$$C(c, x) > C(\alpha) - \varepsilon, \quad S(c, x) < S(\alpha) + \varepsilon.$$

D'autre part (5.4), il existe un $\delta_2 > 0$ tel que l'inégalité $0 < \alpha - x < \delta_2$ entraîne les inégalités

$$C(x) < C(\alpha) + \varepsilon, \quad S(x) > S(\alpha) - \varepsilon$$

et par suite (en vertu de 5.1) les inégalités

$$C(c, x) < C(\alpha) + \varepsilon, \quad S(c, x) > S(\alpha) - \varepsilon.$$

On voit donc que

$$|C(c, x) - C(\alpha)| < \varepsilon, \quad |S(c, x) - S(\alpha)| < \varepsilon$$

pourvu que $c < \delta$ et $0 < \alpha - x < \delta$ où $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, c. q. f. d.

5.6. Lorsque $x \geq y \geq 0$ et $x+y \leq \frac{1}{2}\pi$ on a

$$C(x+y) = 2C(x)C(y) - C(x-y).$$

Lorsque $y = 0$, la proposition est évidente, soit donc $y > 0$; supposons d'abord que $x > y$ et $x+y < \frac{1}{2}\pi$.

La figure dont nous allons nous servir étant tout à fait analogue à celle de 4.3, nous en abrègerons la description. Soient k, l, m, n des demi-droites issues d'un même point O et telles que $\sphericalangle(k, l) = x$, $\sphericalangle(l, m) = \sphericalangle(l, n) = y$, $\sphericalangle(k, m) = x+y$, $\sphericalangle(k, n) = x-y$; K un point pris sur k et différent de O ; M et L les pieds des perpendiculaires abaissées de K respectivement sur m et sur l ; L_1 — le point où KM coupe le segment OL , N — le pied de la perpendiculaire abaissée de L_1 sur n ; K_1 — le point d'intersection de la droite L_1N avec le segment OK ; enfin L_2 le pied de la perpendiculaire abaissée de K_1 sur l ; L_2 tombe entre O et L_1 . Le point N étant symétrique de M par rapport à l , on a $ON = OM$, $\sphericalangle OL_1N = \sphericalangle OL_1M = \sphericalangle KL_1L$.

On constate que

$$\begin{aligned} \frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK_1} &= \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL_1}{OK} + \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL_1}{OK_1} \\ &= \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL - L_1L}{OK} + \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL_2 + L_2L_1}{OK_1} \\ &= \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL}{OK} + \frac{OM}{OL_1} \cdot \frac{OL_2}{OK_1} + \frac{OM}{OL_1} \left(\frac{L_2L_1}{K_1L_2} \cdot \frac{K_1L_2}{OK_1} - \frac{L_1L}{KL} \cdot \frac{KL}{OK} \right) \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, z désignant le nombre qui mesure les angles OL_1N et KL_1L ,

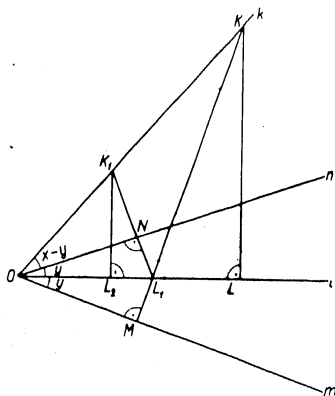


Fig. 3

$$C(OK, x+y) + C(OK_1, x-y) = C(OL_1, y)C(OK, x) + C(OL_1, y)C(OK_1, x) + C(OL_1, y) \left[\frac{C(K_1L_1, z)}{S(K_1L_1, z)} S(OK_1, x) - \frac{C(KL_1, z)}{S(KL_1, z)} S(OK, x) \right].$$

Faisons tendre OK vers zéro; OK_1 et OL_1 tendent alors aussi vers zéro, z tend vers $\frac{1}{2}\pi - y^1$; par suite, l'expression entre crochets tend (en vertu de 5.5) vers zéro. On obtient de la relation précédente l'égalité

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)C(y)$$

qu'il fallait démontrer.

¹⁾ Pour mettre cela en évidence il suffit de remarquer, que si l'on divise le triangle OML_1 par la perpendiculaire PQ à OM au milieu P de OM , le déficit du triangle OPQ est plus petit que la moitié du déficit de OML_1 , les triangles OPQ et PQM étant égaux.

Si $x = y < \frac{1}{2}\pi$ le raisonnement reste le même, mais il faut remplacer ON/OK_1 par 1, le point K_1 coïncidant dans ce cas avec N .

Enfin, si $x \geq y$, $x+y = \frac{1}{2}\pi$ on a, d'après ce qui précède,

$$C \left[\frac{2^n - 1}{2^n} (x+y) \right] = 2C \left(\frac{2^n - 1}{2^n} x \right) C \left(\frac{2^n - 1}{2^n} y \right) - C \left[\frac{2^n - 1}{2^n} (x-y) \right]$$

pour tout n naturel. En faisant tendre n vers ∞ , on arrive en vertu de la continuité de $C(x)$ au résultat demandé.

5.7. THÉOREME 2. $C(x) = \cos x, S(x) = \sin x$.

En effet, $C(x)$ et $\cos x$ satisfaisant pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ à l'équation fonctionnelle (γ) et aux conditions $C(0) = \cos 0, C(\frac{1}{2}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi)$, il vient d'après 1.2

$$C \left(\frac{k}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{k}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

pour tout couple d'entiers n et $k \leq 2^n$ non négatifs. Puisque $C(x)$ et $\cos x$ sont continues, on a $C(x) = \cos x$ dans tout le domaine d'existence de $C(x)$. Par conséquent

$$S(x) = C(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x.$$

6. Relations entre les éléments du triangle rectangle

6.1. THÉOREME 3. Dans un triangle ABC rectangle en C les côtés $BC = a, AC = b$ et les angles $\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta$ vérifient les relations

$$\operatorname{ch}(a/h) = \cos \alpha / \sin \beta, \quad \operatorname{ch}(b/h) = \cos \beta / \sin \alpha$$

où $h = 1/\operatorname{ar ch} \varphi(1)$ est une constante déterminée par le choix du segment unité.

Afin d'établir ce théorème, prenons sur le prolongement de AC un segment CM et ensuite sur le prolongement de CB un segment BN assez petit pour que le point B_1 , où MN rencontre le prolongement de AB , satisfasse à la condition $BB_1 < AB$. L'angle AB_1M étant plus grand que $\sphericalangle B_1BN = \beta$, une demi-droite issue du point B_1 et faisant avec B_1A l'angle β passe par l'intérieur de l'angle AB_1M et ne pouvant couper la droite BC rencontre par conséquent le segment CM au point intérieur D . Prenons $B_1A_1 = BA$ sur la demi-droite B_1A ; le point A_1 se trouve entre A et B . Une demi-droite issue du point A_1 et faisant avec A_1B_1 l'angle α passe par l'intérieur du triangle AB_1M , coupe donc le segment B_1D au point intérieur C_1 et le segment BC au point intérieur D_1 . Le triangle $A_1B_1C_1$ ainsi construit étant égal au triangle ABC , on a $A_1C_1 = AC, B_1C_1 = BC, \sphericalangle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}\pi$. Du milieu S de BB_1 abaissons la perpen-

diculaire SK sur la droite BC et la perpendiculaire SL sur la droite B_1C_1 ; les angles B_1BN , BB_1D et N étant aigus, le point K se trouve entre B et N et le point L entre B_1 et C_1 . Les triangles rectangles BSK et B_1SL sont égaux, on en conclut que K , S et L sont en ligne droite. On obtient ainsi des quadrilatères trirectangleux $LKCD$ et KLC_1D_1 ayant des angles aigus aux sommets D et D_1 .

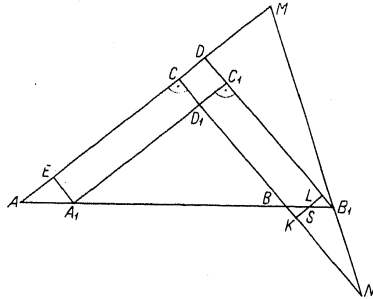


Fig. 4

Abaissons enfin la perpendiculaire A_1E sur AC (E tombe entre A et C) et considérons les segments AE , CD , D_1C_1 .

On a $AE + EC = A_1D_1 + D_1C_1$; les angles en E et C étant droits, il s'ensuit que $A_1D_1 > EC$, par suite $D_1C_1 < AE$. D'autre part, l'angle EA_1C_1 est obtus, car $\sphericalangle EA_1C_1 + \sphericalangle EA_1A + \sphericalangle C_1A_1B = \pi$, tandis que $\sphericalangle EA_1A + \sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle EA_1A + \sphericalangle EA_1A_1 < \frac{1}{2}\pi$; il en résulte que la longueur A_1C_1 est inférieure à la distance du point E de la droite C_1D , donc, *a fortiori*, $A_1C_1 = AC < ED$ et $AE < CD$.

Ainsi $D_1C_1 < AE < CD$ d'où $D_1C_1/KL < AE/KL < CD/KL$.

Or

$$\frac{AE}{KL} = \frac{AE}{AA_1} \cdot \frac{BB_1}{KL} = \frac{AE}{AA_1} \cdot \frac{BS}{KS} = C(AA_1, a) \frac{1}{S(BS, \beta)}.$$

Ensuite, en tenant compte de 4.5, on a

$$\frac{D_1C_1}{KL} = \psi(KL, KD_1) > \text{ch} \frac{LC_1}{h} = \text{ch} \frac{BC - BK}{h}$$

et

$$\frac{CD}{KL} = \psi(KL, LD) < \text{ch} \frac{LD}{h} < \text{ch} \frac{BC + BB_1 + CD}{h}.$$

Il résulte de ces relations que

$$\text{ch} \frac{a - BK}{h} < \frac{C(AA_1, a)}{S(BS, \beta)} < \text{ch} \frac{a + BB_1 + CD}{h}.$$

Faisons tendre CM vers zéro; les longueurs CD , BB_1 , AA_1 , BK , BS tendent alors aussi vers zéro et de l'inégalité précédente on déduit

$$\text{ch}(a/h) = \cos a / \sin \beta, \quad \text{c. q. f. d.}$$

6.2. Menons dans un triangle ABC rectangle en C la hauteur CD et appliquons aux triangles ACD et BCD le théorème 3. En éliminant CD , AD , $DB = c - AD$, $\sphericalangle ACD$ et $\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle ACD$ des quatre équations ainsi obtenues on arrive à la formule

$$\text{ch}(c/h) = \text{ctg} a \text{ ctg} \beta,$$

ce qui donne avec les formules

$$\text{ch}(a/h) = \cos a / \sin \beta, \quad \text{ch}(b/h) = \cos \beta / \sin a$$

un système complet de relations indépendantes entre les éléments du triangle rectangle.

6.3. Lorsque dans un triangle rectangle ABC le côté AC augmente indéfiniment, le côté BC restant fixe, l'angle BAC tend vers zéro, tandis que l'angle ABC augmente. La mesure β de l'angle ABC tend donc vers une limite ω , qu'on calculera d'après le théorème 3 au moyen de la formule $\text{ch}(a/h) = 1/\sin \omega$; on trouve

$$\omega = 2 \text{ arc } \text{tg} e^{-a/h} = \Pi(a)$$

c'est-à-dire on obtient la fonction de Lobatchevsky. Si l'on admet l'existence d'un angle qui aurait pour mesure le nombre $\Pi(a)$, la formule précédente détermine l'angle de parallélisme correspondant à la longueur a .

Travaux cités

- [1] L. Gérard, *Sur la géométrie non euclidienne*, thèse de doctorat, Paris 1892.
- [2] H. Liebmann, *Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie*, Leipziger Berichte 59 (1907), p. 187-210.
- [3] O. Perron, *Neuer Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Trigonometrie*, Mathematische Annalen 119 (1943), p. 247-265.
- [4] W. H. Young, *On the analytical basis of non-euclidean geometry*, Amer. Journ. of Math. 33 (1911), p. 249-286.
- [5] K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy Geometrii*, Warszawa 1955.