Sur la représentation conforme d'un domaine multiplement connexe

par J. Górski (Kraków)

Introduction. Soit $E = E_1 + E_2$ la frontière d'un domaine doublement connexe D contenant le point $z = \infty$. Je suppose qu'aucun des continus E_i, $i = 1, 2$, n'est dégénéré. Considérons les systèmes de $2n$ points quelconques de l'ensemble E

$$\zeta^{(2n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_{2n}\} \tag{1}$$

et supposons que n de ces points, par exemple les points $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, appartiennent à E_1 et $\zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_{2n}$ à E_2. Je dirai que *le système* (1) *définit une répartition restreinte de la masse unité sur* E *dans le rapport* 1:1 (voir [4]). Désignons par

$$\eta^{(2n)} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n}\} \tag{2}$$

le $2n^{\text{ème}}$ système *de points extrémaux* de l'ensemble E correspondant à la distribution restreinte dans le rapport 1:1, c'est-à-dire un système de points (1) tel qu'on ait

$$\prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} |\eta_j - \eta_k| \geqslant \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} |\zeta_j - \zeta_k| \tag{3}$$

pour chaque système restreint $\zeta^{(2n)} \subset E$.

Il est connu [4] que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} |\eta_j - \eta_k|\Big]^{2/2n(2n-1)} = v(E_1, E_2), \tag{4}$$

dite *écart de l'ensemble* E existe et que $v(E_1, E_2) > 0$. Formons la suite de fonctions

$$\Big[\prod_{j=1}^{2n} |z - \eta_j|\Big]^{1/2n} = \Phi_{2n}(z). \tag{5}$$

F. Leja a posé la question suivante: La limite

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{2n}(z) \tag{6}$$

existe-t-elle pour z non $\epsilon\, E$?

Je vais donner la réponse affirmative à cette question — ainsi que quelques applications de la fonction limite.

Existence de la fonction limite. Désignons par Δ un ensemble borélien quelconque et soit $\mu_{2n} = \mu_{2n}(\Delta)$ la distribution de la masse unité sur E définie par les formules

$$\mu_{2n}(\Delta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \Delta \text{ ne contient aucun des points extrémaux (2)}, \\ k/2n \text{ si } \Delta \text{ contient } k \text{ points extrémaux.} \end{cases} \tag{7}$$

D'après (5) et (7) on a

$$\log \Phi_{2n}(z) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \log|z - \eta_j| = \int_E \log|z - \zeta|\, d\mu_{2n}.$$

Soit μ la limite d'une suite partielle $\{\mu_{2n_k}\}$ convergente extraite de la suite $\{\mu_{2n}\}$ (voir [1]). On a $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \frac{1}{2}$. Pour chaque z non $\epsilon\, E$ la limite

$$\lim_{k\to\infty} \log \Phi_{2n_k}(z) = \int \log|z - \zeta|\, d\mu \overset{\text{df}}{=} \log \Phi(z) \tag{8}$$

existe [1].

Désignons par $u(z)$ la fonction

$$u(z) = \int_E \log|z - \zeta|^{-1}\, d\mu. \tag{9}$$

On a $\log \Phi(z) = -u(z)$.

On peut démontrer[1]) la formule ($v(E_1, E_2) > 0$):

$$\log[1/v(E_1, E_2)] = \int_E\int_E \log|z - \zeta|^{-1} d\mu\, d\mu \leqslant \int_E\int_E \log|z - \zeta|^{-1} d\sigma\, d\sigma \tag{10}$$

où σ est une distribution restreinte quelconque de la masse unité sur E dans le rapport 1:1 (c'est-à-dire remplissant la condition $\sigma(E_1) = \sigma(E_2) = \frac{1}{2}$).

La convergence de la suite $\{\mu_{2n}\}$ et en même temps celle de la suite $\{\log \Phi_{2n}(z)\}$ sera établie après la démonstration de certaines propriétés de la fonction $u(z)$ (voir remarque, p. 222).

Propriétés de la fonction $u(z)$**.** Désignons par E_μ le noyau de la masse dans la distribution μ, c'est-à-dire l'ensemble qui contient tous les points dont chaque entourage contient une masse positive. Il est clair que E_μ est fermé. Il est aussi parfait, car dans le cas contraire

$$\int_E\int_E \log|z - \zeta|^{-1} d\mu\, d\mu$$

serait égal à ∞, en contradiction avec (10) et $v(E_1, E_2) > 0$.

[1]) Je ne vais pas donner la démonstration de cette formule car elle est complètement analogue à celle qui est donnée dans mon travail [2]. Voir aussi [1], p. 46.

Je vais démontrer le théorème suivant:

La fonction $u(z)$ *est égale à une constante* K_1 *pour chaque point* $z\in E_1E_\mu$ *et elle est égale à une constante* K_2 *lorsque* $z\in E_2E_\mu$.

Pour cela je démontrerai certaines propriétés de la fonction $u(z)$.

1. *Soit* $\varepsilon>0$ *un nombre arbitraire. On ne peut pas avoir*

$$u(z)\leqslant \log[1/v(E_1,E_2)]-\varepsilon \qquad \text{pour chaque} \qquad z\in E_\mu.$$

En effet, dans le cas contraire on aurait

$$\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\mu d\mu\leqslant \log[1/v(E_1,E_2)]-\varepsilon<\log[1/v(E_1,E_2)]$$

en contradiction avec (10).

2. Il existe donc un point $z_1\in E_\mu$, soit $z_1\in E_1E_\mu$, tel que

$$u(z_1)=c_1\geqslant \log[1/v(E_1,E_2)].$$

De la semi-continuité inférieure de la fonction $u(z)$ il suit qu'il existe un entourage $O(z_1)$ de z_1 tel qu'on ait $u(z)\geqslant c_1-\varepsilon$ pour $z\in O(z_1)$.

Il n'existe pas l'ensemble $F\subset E_1$ *de capacité* >0 *tel que* $u(z)\leqslant c_1-2\varepsilon$ *pour* $z\in F$ [2]).

En effet, dans le cas contraire désignons par $\sigma=\sigma(\Delta)$ une distribution de la masse sur E telle que $\sigma=-\mu$ dans $O(z_1)$ et

$$\sigma(\Delta)=0 \quad \text{si} \quad \Delta\cdot F=0 \quad \text{ou} \quad \Delta\cdot O(z_1)=0,$$

$$\sigma[O(z_1)]=-\mu[O(z_1)]=-m,$$

$$\sigma(F)=\mu[O(z_1)]=m,$$

$$\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\sigma d\sigma<\infty.$$

Une telle distribution σ existe, car la capacité de l'ensemble F est >0.

Considérons la distribution de la masse unité définie par la formule $\mu+h\sigma$, $1\geqslant h>0$. D'après (10) on a

$$\text{(11)}\qquad \iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d(\mu+h\sigma)d(\mu+h\sigma)-\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\mu d\mu\geqslant 0.$$

[2]) Lorsque la capacité d'un ensemble F est nulle on a $\mu(F)=0$. Dans le cas contraire il existerait un point $z_0\in F$ tel qu'on aurait $u(z_0)=\infty$ (voir [1]). Alors $\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\mu d\mu=\infty$, en contradiction avec la formule (10) et l'inégalité $v(E_1,E_2)>0$.

D'autre part, cette différence est égale à

$$\begin{aligned}2h\int\limits_E u(z)d\sigma+h^2\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\sigma d\sigma\\ &=2h\Big[\int\limits_{O(z_1)}u(z)d\sigma+\int\limits_F u(z)d\sigma\Big]+h^2\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\sigma d\sigma\\ &\leqslant h^2\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\sigma d\sigma-2hm\varepsilon,\end{aligned}$$

elle est donc <0 pour h suffisamment petit, ce qui est pourtant impossible d'après (11).

3. Alors, on a presque partout dans E_1 (c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble de capacité nulle contenu dans E_1)

$$u(z)\geqslant c_1\geqslant \log[1/v(E_1,E_2)].$$

Désignons par K_1 la borne supérieure de $u(z)$ dans E_1E_μ. Pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un point $z_1\in E_1E_\mu$ tel que $u(z_1)>K_1-\varepsilon$. *Alors* $u(z)\geqslant K_1-\varepsilon$ *presque partout dans* E_1. Puisque ε est arbitrairement petit et $u(z)\leqslant K_1$ dans E_1E_μ, on a $u(z)=K_1\geqslant \log[1/v(E_1,E_2)]$ presque partout dans E_1E_μ.

4. *Lorsque* $K_1=\log[1/v(E_1,E_2)]$, *on a* $u(z)=\log[1/v(E_1,E_2)]$ *presque partout dans* E_2.

En effet, on ne peut avoir constamment $u(z)\leqslant \log[1/v(E_1,E_2)]-\varepsilon$ dans E_2E_μ car on aurait

$$\int\limits_E u(z)d\mu<\log[1/v(E_1,E_2)]$$

en contradiction avec (10). Il existe donc un point $z_2\in E_2E_\mu$ où $u(z_2)\geqslant$ $\geqslant\log[1/v(E_1,E_2)]$. Il résulte de la semi-continuité inférieure de la fonction $u(z)$ qu'il existe un voisinage $O(z_2)$ du point z_2 tel que

$$u(z)>\log[1/v(E_1,E_2)]-\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad z\in O(z_2).$$

De même que dans le N° 2 on voit qu'il n'existe pas l'ensemble $G\in E_2$ de capacité >0 dans lequel on aurait $u(z)\leqslant\log[1/v(E_1,E_2)]-2\varepsilon$ Alors $u(z)\geqslant\log[1/v(E_1,E_2)]$ presque partout dans E_2. Puisque $u(z)$ ne peut être $>\log[1/v(E_1,E_2)]$ en aucun point $\in E_2E_\mu$ (sinon on aurait

$$\iint\limits_{EE}\log|z-\zeta|^{-1}d\mu d\mu>\log[1/v(E_1,E_2)]$$

en contradiction avec (10)) on a $u(z)=\log[1/v(E_1,E_2)]$ presque partout dans E_2E_μ. Il résulte du principe du maximum que $u(z)\leqslant\log[1/v(E_1,E_2)]$ partout, donc $u(z)=\log[1/v(E_1,E_2)]$ presque partout dans $E=E_1+E_2$. Dans ce cas la répartition de la masse unité sur E est *libre (équilibre électrostatique)* et on a $E_\mu=E$, $u(z)=\log[1/v(E_1,E_2)]$ pour chaque $z\in E$ (voir [1]).

5. *Lorsque* $K_1 > \log[1/v(E_1, E_2)]$, *on a* $u(z) = \mathrm{const} < \log[1/v(E_1, E_2)]$ *presque partout dans* $E_2 E_\mu$.

En effet, il ne peut pas exister de point $z_2 \epsilon E_2 E_\mu$ où l'on aurait $u(z_2) = c_2 \geqslant \log[1/v(E_1, E_2)]$, car dans le cas contraire on peut démontrer, comme dans le N° 2, qu'on aurait $u(z) \geqslant c_2 \geqslant \log[1/v(E_1, E_2)]$ presque partout dans E_2. Mais ceci est impossible d'après l'inégalité $K_1 > \log[1/v(E_1, E_2)]$ et (10).

Désignons par K_2 la borne supérieure de la fonction $u(z)$ dans $E_2 E_\mu$. On ne peut avoir $K_2 = \log[1/v(E_1, E_2)]$, car dans ce cas il existerait un point $z_2 \epsilon E_2 E_\mu$ où $u(z_2) = c_2 > \log[1/v(E_1, E_2)] - \varepsilon$. Alors (voir N° 2) on aurait $u(z) \geqslant \log[1/v(E_1, E_2)]$ presque partout dans E_2. Mais $u(z) = K_1 > \log[1/v(E_1, E_2)]$ sur E_1, donc

$$\int_E u(z)\,d\mu > \log[1/v(E_1, E_2)]$$

en contradiction avec (10).

On a donc $K_2 < \log[1/v(E_1, E_2)]$. On peut démontrer tout à fait comme dans le N° 3 que $u(z) = K_2 < \log[1/v(E_1, E_2)]$ presque partout dans $E_2 E_\mu$.

6. *On a* $E_1 = E_1 E_\mu$. Dans le cas contraire il existerait un point $z_0 \epsilon E_1$ tel que $z_0 \,\mathrm{non}\, \epsilon\, E_1 E_\mu$. D'après le principe du maximum $u(z_0)$ ne peut être $\geqslant K_1$, donc $u(z_0) < K_1$. Puisque E_μ est fermé, il existerait un voisinage $O(z_0)$ du point z_0 dans lequel $u(z) < K_1$. E_1 est un continu, donc la capacité de l'ensemble $E_1 O(z_0)$ est > 0. On aurait $u(z) < K_1$ pour $z \epsilon E_1 O(z_0)$. Mais ceci est impossible, car $u(z) \geqslant K_1$ presque partout dans E_1 (voir [3]).

Remarque. *La suite* $\{\mu_{2n}\}$ *est convergente.*

En effet, soient μ_1 et μ_2 deux limites partielles de la suite $\{\mu_{2n}\}$. D'après (10), on aurait

$$\int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\mu_1 d\mu_1 - \int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\mu_2 d\mu_2 = 0.$$

En posant $\mu_1 = \mu_2 + \tau$ on obtient

$$0 = 2\int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\mu_2 d\tau + \int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\tau\, d\tau$$
$$\geqslant 2[K_1\tau(E_1) + K_2\tau(E_2)] + \int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\tau\, d\tau.$$

Mais $\tau(E_1) = \tau(E_2) = 0$, donc

$$\int_E\int_E \log|z-\zeta|^{-1} d\tau\, d\tau \leqslant 0,$$

d'où il résulte $\tau \equiv 0$ (voir [1]).

Construction de la fonction $\Psi(z)$. Considérons la suite de fonctions

$$\Psi_{2n}(z) = e^{i\theta_n}\Big[\prod_{j=1}^{2n}(z-r_j)\Big]^{1/2n} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{12}$$

où Θ_n sont des nombres réels choisis de manière qu'on ait en un point arbitrairement fixé z_0 non ϵE

$$\Psi_{2n}(z_0) > 0. \tag{13}$$

La suite $\Psi_{2n}(z)$ est convergente au point z_0 (d'après (13), (8) et la remarque à la page 222) donc la suite (12) est uniformément convergente dans chaque ensemble fermé contenu dans D. Désignons la fonction limite par $\Psi(z)$.

Lorsque le point $z \epsilon D$ décrit une courbe fermée simple contenant dans son intérieur l'ensemble E_1, E_2 étant situé à l'extérieur de cette courbe, les fonctions (12) se multiplient par le facteur $\exp(2\pi i n/2n) = -1$. De même, quand le point $z \epsilon D$ décrit une courbe contenant l'ensemble E_2 (mais ne conténant pas E_1), les fonctions (12) se multiplient par -1. Ainsi lorsque z décrit une courbe fermée simple contenant l'ensemble $E = E_1 + E_2$ dans son intérieur, les fonctions (12) restent invariables.

Les fonctions $[\Psi_{2n}(z)]^2$ sont analytiques, uniformes, arbitrairement prolongeables dans D, donc la fonction limite

$$[\Psi(z)]^2 \tag{14}$$

est analytique (le point ∞ exclu) et uniforme dans D. D'après (8) et les propriétés 3, 4, 5, le module $|\Psi(z)|^2$ de la fonction (14) tend vers des limites constantes lorsque $z \epsilon D$ tend vers un point $z_0 \epsilon E_\mu$,

$$|\Psi(z)|^2 \to e^{-2K_1} \quad \text{lorsque} \quad z \to z_0 \epsilon E_1,$$
$$|\Psi(z)|^2 \to e^{-2K_2} \quad \text{lorsque} \quad z \to z_0 \epsilon E_2 E_\mu.$$

Lorsque $K_1 = K_2 = \log[1/v(E_1, E_2)]$ la fonction $[\Psi(z)]^2$ donne la représentation conforme du domaine D sur l'extérieur du cercle $|w| = e^{-2K_1}$ doublement couvert.

Lorsque $K_1 \neq K_2$ la fonction $[\Psi(z)]^2$ effectue la représentation conforme du domaine D_μ dont la frontière est égale à E_μ sur une surface riemannienne composée de l'extérieur de deux cercles centrés de rayons différents.

Remarque. Dans le cas où E est somme de $m > 2$ continus tous les raisonnements peuvent être facilement modifiés et on obtient des résultats analogues.

Travaux cités

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.

[2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 418-429.

[3] — *Sur certaines propriétés des points extrémaux liés à un domaine plan*, ce volume, p. 32-36.

[4] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*, ce volume, p. 147-156.

Sur la trigonométrie de Lobatchevsky

par S. Straszewicz (Warszawa)

N. Lobatchevsky et J. Bolyai ont trouvé, comme on le sait, les formules de la trigonométrie hyperbolique en considérant la géométrie sur l'horisphère. Une première démonstration planimétrique de ces formules a été donnée par L. Gérard [1]. Après avoir établi les lemmes nécessaires concernant les triangles et les quadrilatères du plan hyperbolique, Gérard démontre le théorème que le rapport AD/BC des côtés d'un quadrilatère $ABCD$ rectangle en A, B, C tend vers la limite $\mathrm{ch}AB/h$ (où h dépend du choix de l'unité de longueur), lorsque AD tend vers zéro, le côté AB restant fixe. Il en déduit la relation qui existe entre les côtés du triangle rectangle et ensuite d'autres formules. Ses démonstrations sont tout à fait élémentaires, cependant un peu longues et compliquées. H. Liebmann [2] a donné une démonstration basée sur les propriétés des arcs de l'horicycle, laissant d'ailleurs de côté la question de l'existence d'une mesure additive de ces arcs; on détermine d'abord la fonction $\Pi(x)$ de Lobatchevsky et on en déduit les formules trigonométriques[1]). Deux autres méthodes ont été proposées par W. H. Young [4] et par O. Perron [3]. Young montre d'abord (en utilisant en partie les lemmes de Gérard) que les rapports des côtés d'un triangle rectangle, dont un des angles aigus reste fixe, tendent vers les fonctions trigonométriques de cet angle lorsque les côtés du triangle diminuent vers zéro. Cette démonstration, comme tout ce qui suit, est assez compliquée; on a recours aux lemmes concernant la longueur des arcs de cercle du plan hyperbolique et à plusieurs théorèmes d'analyse mathématique. Les démonstrations de Perron sont beaucoup plus simples; son point de départ est le même que celui de Young, mais il ne considère que des figures rectilignes; Perron admet l'existence de l'angle de parallélisme et n'arrive aux formules de la trigonométrie qu'après avoir déterminé préalablement la fonction $\Pi(x)$.

Il m'a paru désirable de trouver pour les théorèmes de la trigonométrie hyperbolique des démonstrations plus simples et s'imposant d'une

[1]) Dans un livre tout récent de K. Borsuk et W. Szmielew sur les fondements de la géomètrie [5] l'évaluation de la fonction $\Pi(x)$ est basée sur une théorie rigoureuse du horicycle faisant usage de la notion du déficit d'une figure plane.