Remarque sur un système d'inégalités intégrales

par T. WAŻEWSKI (Kraków)

§ 1. Le but de la présente note est de démontrer que l'on peut immédiatement ramener un théorème sur un système d'inégalités intégrales dû à M. Z. Opial (cf. [3]) ainsi qu'un cas particulier de ce théorème, démontré antérieurement par M. B. Viswanatham (cf. [4]), à un théorème sur un système d'inégalités différentielles que j'ai établi dans un travail antérieur [5]. Cette réduction réussit grâce à un artifice consistant en l'introduction de certaines fonctions auxiliaires $p_i(x)$ (cf. (4.1)). Cet artifice repose, au fond, sur le même principe que M. R. Bellman (cf. [1], lemme 1 à la page 644) a appliqué pour démontrer que l'inégalité intégrale de la forme

$$(1.1)\qquad |G(x)| \leqslant M\Big(1+N\int_0^x |G(t)|\,|h(t)|\,dt\Big) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < a$$

(où M et N sont des constantes non négatives) entraîne l'inégalité

$$(1.2)\qquad G(x) \leqslant M\exp\Big(NM\int_0^x |h(t)|\,dt\Big) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < a.$$

Il est bien facile de prouver que ce lemme de M. Bellman peut être considéré comme une conséquence immédiate des théorèmes cités de M. Viswanatham et de M. Opial (cf. remarque 1 du § 5).

§ 2. Considérons le système d'équations différentielles

$$(2.1)\qquad y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Relativement à ce système nous admettons l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE H. *Les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont continues et croissantes par rapport à $y_1, \ldots, y_n$ dans un ensemble ouvert W de points $x, y_1, \ldots, y_n$. Cela veut dire que si l'on a, pour deux points $(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ appartenant à W*

$$y_i \leqslant \bar{y}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

alors $f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Voici l'énoncé du théorème en question de M. Opial [3].

THÉORÈME I. *Admettons l'hypothèse* H *relativement aux fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ et soit $P = (\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ un point appartenant à W. Soit*

$$(2.2)\qquad y_i = k_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'intégrale supérieure du système (2.1) *issue du point P* [1]) *et supposons qu'elle soit déterminée dans l'intervalle D*

$$(2.3)\qquad \xi \leqslant x < a \quad (\textit{intervalle } D)$$

On a

$$(2.4)\qquad k_i(\xi) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que les fonctions

$$y_i = g_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soient continues dans l'intervalle (2.3) *et qu'elles satisfassent, dans cet intervalle, au système d'inégalités intégrales*

$$(2.5)\qquad g_i(x) \leqslant \eta_i + \int_\xi^x f_i\big(t, g_1(t), \ldots, g_n(t)\big)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, on a dans l'intervalle D les inégalités

$$(2.6)\qquad g_i(x) \leqslant k_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D).$$

§ 3. Dans un travail antérieur (cf. [5], p. 124) j'ai démontré un théorème sur les inégalités différentielles dont un cas particulier est le théorème suivant:

THÉORÈME B. *En admettant l'hypothèse* H *supposons que*

$$(3.1)\qquad p_i'(x) \leqslant f_i\big(x, p_1(x), \ldots, p_n(x)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D),$$

$$(3.2)\qquad p_i(\xi) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, on a les inégalités

$$(3.3)\qquad p_i(x) \leqslant k_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D)$$

où $y_i = k_i(x)$ désigne l'intégrale supérieure du système (2.1) *satisfaisant à la condition initiale* (2.4).

§ 4. Démonstration du théorème I par la méthode des inégalités différentielles. Posons

$$(4.1)\qquad p_i(x) = \eta_i + \int_\xi^x f_i\big(t, g_1(t), \ldots, g_n(t)\big)\,dt.$$

[1]) Une telle intégrale existe (cf. [2], Satz 5, et [5]).

En vertu de (2.5) on a

(4.2) $$g_i(x) \leqslant p_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D),$$

(4.3) $$g_i(\xi) \leqslant p_i(\xi) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $f_i(t, g_1(t), \ldots, g_n(t))$ étant continues pour $t \in D$, on a

(4.4) $$p_i'(x) = f_i(x, g_1(x), \ldots, g_n(x)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D).$$

Les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ étant croissant par rapport à $y_1, \ldots, y_n$ (cf. l'hypothèse H) on déduit de (4.4) et (4.2) le système d'inégalités différentielles

(4.5) $$p_i'(x) \leqslant f_i(x, p_1(x), \ldots, p_n(x)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x \in D),$$

auquel on peut appliquer le théorème B cité au § 3. On obtiendra ainsi, en vertu de (4.3), (4.5) et (2.4), les inégalités (3.3) qui, rapprochées des inégalités (4.2), conduisent aux inégalités (2.6), c. q. f. d.

§ 5. Remarque 1. Le théorème I est en particulier vrai pour $n = 1$. Dans ce cas chacun des systèmes (2.1), (2.5) et (2.6) pris séparément se réduit à une relation. Posons en particulier

$$f_1(x, y_1) = NM|h(x)|y_1, \quad \xi = 0, \quad \eta_1 = M, \quad g_1(x) = |G(x)|.$$

L'inégalité (1.1) intervenant dans le lemme de M. Bellman prend la forme

$$g_1(x) \leqslant \eta_1 + \int_\xi^x f_1(t, g_1(t))\,dt.$$

L'intégrale supérieure $y_1 = k_1(x)$ de l'équation $y_1' = f(x, y_1) = NM|h(x)|y_1$ pour laquelle $g_1(\xi) = \eta_1 = M$ est de la forme $k_1(x) = M \exp\left(NM\int_0^x |h(t)|\,dt\right)$.

En vertu du théorème I on obtient l'inégalité $g_1(x) \leqslant k_1(x)$ pour $0 \leqslant x < a$ et cette inégalité coïncide évidemment avec l'inégalité (1.2).

Travaux cités

[1] R. Bellman, *The stability of solutions of linear differential equations*, Duke Math. Journ. 10 (1943), p. 643.

[2] E. Kamke, *Zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen II*, Acta Mathematica 58 (1932), p. 57-85.

[3] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, ce volume, p. 200-209.

[4] B. Viswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences, Sect. A - N - 5 (1952), p. 335.

[5] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Wave propagation in a stratified medium

by E. J. Scott (Urbana, Illinois)

In a recent article[1]) the problem of propagation of heat in a bar consisting of many parts having different thermal properties was analyzed. Equally as important in the applications is the consideration of wave propagation in a medium composed of material having different physical characteristics. Examples of such media are: (1) a transmission line consisting of segments each of which is made of a different metal, (2) a taut string having parts of various densities, and (3) contiguous slabs of different materials.

To be specific, let us suppose that a dissipationless transmission line consists of n parts $x_{k-1} < x < x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n,\ x_0 = 0)$ having the corresponding line constants a_k. We shall consider the following boundary value problem:

(1) $$\frac{\partial^2 V_k}{\partial t^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad x_0 = 0, \quad t > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

(2) $$V_1(0, t) = G(t), \quad V_n(x_n, t) = H(t), \quad t > 0;$$

(3) $$V_k(x_k, t) = V_{k+1}(x_k, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

(4) $$\frac{\partial V_k(x_k, t)}{\partial x} = \frac{\partial V_{k+1}(x_k, t)}{\partial x} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

(5) $$V_k(x, 0) = F_k(x), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad x_0 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

(6) $$\frac{\partial V_k(x, 0)}{\partial t} = \varphi_k(x), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad x_0 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Conditions (2) are the boundary conditions, (3) and (4) are the continuity conditions, and (5) as well as (6), the initial conditions.

We shall employ the Laplace transform to effect a solution. To that end, let $L_t\{V_k(x, t)\} = v_k(x, p)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Then, taking the Laplace transform of (1), we obtain

(7) $$p^2 v_k(x, p) - pV_k(x, 0) - \partial V_k(x, 0)/\partial t = a_k^2 d^2 v_k(x, p)/dx^2,$$
$$x_{k-1} < x < x_k, \quad x_0 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

[1]) V. Vodička, *Conduction de la chaleur dans une barre formée de plusiers parties en materiaux différents*, Prace Mat. Fiz. 48 (1952), p. 45-52.