Sur un système d'inégalités intégrales

par Z. OPIAL (Kraków)

Nous allons considérer le système d'équations différentielles

$$(1)\qquad y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont les seconds membres sont définis et continus dans un domaine ouvert Ω de variables $x, y_1, \ldots, y_n$. Les théorèmes que nous démontrons dans cette note établissent une certaine relation d'inégalité entre les intégrales du système (1) et les fonctions continues $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ satisfaisant au système d'inégalités intégrales

$$(2)\qquad \varphi_i(x) \leqslant \eta_i + \int_\xi^x f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \xi \leqslant x \leqslant \xi + a)$$

où le point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ appartient au domaine Ω et a est une constante positive.

Le théorème I donne une telle relation dans l'hypothèse de la croissance des fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$[1]. Il se pose le problème de savoir dans quelle mesure cette hypothèse de la croissance est essentielle pour la validité de ce théorème. Le théorème II constitue la réponse à ce problème, qui a été posé par M. T. Ważewski.

Dans le cas de l'équation $y' = f(x, y)$ (c'est-à-dire pour $n = 1$) le théorème I a été établi par B. Viswanatham [2]. La démonstration de B. Viswanatham s'appuie sur la méthode des approximations successives. La nôtre est fondée sur un autre principe.

§ 1. Théorème I. *Si les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont croissantes au sens large par rapport à l'ensemble des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ continues satisfaisant au système d'inégalités (2) satisfont aux inégalités*

$$(3)\qquad \varphi_i(x) \leqslant \psi_i(x) \qquad (\xi \leqslant x,\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Cela veut dire que pour $\bar{y}_1 \leqslant y_1, \ldots, \bar{y}_n \leqslant y_n$ on a $f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \leqslant f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

où nous avons désigné par $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ l'intégrale supérieure à droite du système (1) issue du point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$[2]. Les inégalités sont vraies à droite de ξ dans l'intervalle d'existence de toutes les fonctions qui y interviennent.

Démonstration. En désignant par $\psi_1(x, \varepsilon), \psi_2(x, \varepsilon), \ldots, \psi_n(x, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ l'intégrale supérieure à droite du système (1) issue du point $(\xi, \eta_1 + \varepsilon, \ldots, \eta_n + \varepsilon)$ on a:

$$(4)\qquad \psi_i(x, \varepsilon) = \eta_i + \varepsilon + \int_\xi^x f_i\big(x, \psi_1(x, \varepsilon), \ldots, \psi_n(x, \varepsilon)\big)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Des inégalités (2) et des identités (4) on obtient par soustraction membre à membre

$$(5)\qquad \varphi_i(x) - \psi_i(x, \varepsilon) \leqslant -\varepsilon + \int_\xi^x \big[f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots\big) - f_i\big(x, \psi_1(x, \varepsilon), \ldots\big)\big]\,dx$$

d'où, en particulier

$$(6)\qquad \varphi_i(\xi) - \psi_i(\xi, \varepsilon) \leqslant -\varepsilon < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous allons démontrer que

$$(7)\qquad \varphi_i(x) - \psi_i(x, \varepsilon) < 0 \quad \text{pour} \quad \xi < x \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Admettons le contraire. Il existe évidemment un $x_0 > \xi$ tel que pour un certain indice k

$$(8)\qquad \varphi_k(x_0) - \psi_k(x_0, \varepsilon) = 0$$

et que les inégalités (7) ont lieu dans l'intervalle $\langle \xi, x_0)$ tout entier. Par suite, on a dans cet intervalle, en vertu de la croissance de la fonction $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$,

$$f_k\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \leqslant f_k\big(x, \psi_1(x, \varepsilon), \ldots, \psi_n(x, \varepsilon)\big)$$

d'où, en posant dans (5) $x = x_0$ on obtient

$$\varphi_k(x_0) - \psi_k(x_0, \varepsilon) \leqslant -\varepsilon + \int_\xi^{x_0} \big[f_k\big(x, \varphi_1(x), \ldots\big) - f_k\big(x, \psi_1(x, \varepsilon), \ldots\big)\big]\,dx$$

et par suite $\varphi_k(x_0) - \psi_k(x_0, \varepsilon) \leqslant -\varepsilon$ ce qui est impossible en raison de la relation (8).

Les inégalités (7) ont donc lieu à droite de ξ dans l'intervalle d'existence des fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \psi_1(x, \varepsilon), \ldots$; ε tendant vers zéro, les fonctions $\psi_i(x, \varepsilon)$ tendent vers $\psi_i(x)$ (voir [1], Satz 10, p. 83) et c'est

[2]) L'existence de cette intégrale résulte des hypothèses de notre théorème (Ważewski [3]).

ainsi qu'à partir des inégalités (7) on obtiendra les inégalités (3). Elles auront lieu dans l'intervalle d'existence des fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \psi_1(x), \ldots$ ce qui résulte du théorème suivant:

Pour tout intervalle contenu dans l'intervalle d'existence de l'intégrale $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ on peut choisir un $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ toutes les intégrales $\psi_1(x, \varepsilon), \ldots, \psi_n(x, \varepsilon)$ y soient définies (voir [1], Satz 10, p. 83).

§ 2. THÉORÈME II. *Si pour tout point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ du domaine Ω et tout système $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ de fonctions continues satisfaisant dans un intervalle situé à droite de ξ, au système d'inégalités* (2) *il existe un $\delta > 0$ et une intégrale $\alpha_1(x), \ldots$ du système* (1) *passant par le point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ telle que dans l'intervalle $\langle \xi, \xi+\delta \rangle$ aient lieu les inégalités*

$$\varphi_i(x) \leqslant \alpha_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

alors

(I) *les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont localement croissantes au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément,*

(II) *les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont croissantes au sens large par rapport à la variable y_i dans un voisinage suffisamment petit de tout point du domaine Ω.*

Remarque. On pourrait bien formuler ces deux thèses en une seule. Nous les avons séparées car cela facilitera la démonstration du théorème.

Démonstration de la thèse (I). Nous nous appuyerons sur le théorème suivant (voir [3], p. 128, lemme 2):

Si pour toute intégrale $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$ du système (1) *et tout point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ du domaine Ω tel que $\beta_i(\xi) \leqslant \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il existe une intégrale $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ du système* (1) *passant par le point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ et un $\delta > 0$ tels que dans l'intervalle $\langle \xi, \xi+\delta \rangle$ aient lieu les inégalités $\beta_i(x) \leqslant \alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, alors les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont localement croissantes au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément.*

Prenons une intégrale quelconque $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$ du système (1) pour laquelle $\beta_i(\xi) \leqslant \eta_i$. On a

$$\beta_i(x) = \beta_i(\xi) + \int_\xi^x f_i\big(x, \beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)\big)\,dx$$

et aussi

$$\beta_i(x) \leqslant \eta_i + \int_\xi^x f_i\big(x, \beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)\big)\,dx,$$

c'est-à-dire l'intégrale $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$ satisfait au système d'inégalités (2). Il existe alors, en vertu de l'hypothèse de notre théorème, un $\delta > 0$ et une intégrale $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ passant par le point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ tels que $\beta_i(x) \leqslant \alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $x \in \langle \xi, \xi+\delta \rangle$. L'hypothèse du Théorème II implique donc celle du théorème auxiliaire cité. Il s'ensuit que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont croissantes au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$.

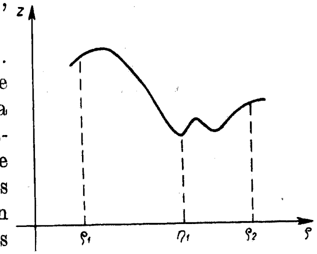

Fig. 1

Démonstration de la thèse (II). Pour la démonstration par l'absurde supposons que pour un certain indice i la fonction $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ ne soit pas localement croissante par rapport à la variable y_i; sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que ce soit la fonction $f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$. Cela veut dire que dans un voisinage suffisamment petit d'un certain point du domaine Ω il existe deux points $(\xi, \varrho_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $(\xi, \varrho_2, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ $(\varrho_1 < \varrho_2)$ tels que

1° le segment qui les joint appartienne entièrement au domaine Ω,

2° $f_1(\xi, \varrho_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) > f_1(\xi, \varrho_2, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Il existe alors dans l'intervalle $(\varrho_1, \varrho_2\rangle$ (comparer le diagramme de la fonction $z = f_1(\xi, \varrho, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ dans la figure 1) un η_1, tel que

$$f_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) < f_1(\xi, \varrho, \eta_2, \ldots) \qquad \text{pour} \qquad \varrho \in \langle \varrho_1, \eta_1)$$

(il suffit de prendre comme η_1, la plus petite valeur de ϱ qui réalise le minimum absolu de la fonction $f_1(\xi, \varrho, \eta_2, \ldots)$ envisagée dans l'intervalle $\langle \varrho_1, \varrho_2\rangle$. De la croissance (déjà démontrée) des fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément il résulte que pour tout point du domaine Ω il existe une intégrale supérieure à droite du système (1) passant par ce point (Ważewski [3], Théorème I, p. 122). Désignons par $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ l'intégrale supérieure à droite issue du point $(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ défini ci-dessus. Nous allons construire un système $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ de fonctions continues qui satisferont aux inégalités (2), sans satisfaire pourtant aux inégalités

$$\varphi_i(x) \leqslant \psi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans aucun voisinage du point ξ, quelque petit qu'il soit.

C'est ainsi que nous achèverons la démonstration de la thèse (II), car pour le système ainsi construit de fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ l'intégrale supérieure à droite $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ ne peut être l'intégrale intervenant dans l'hypothèse du théorème II. Mais si une intégrale

$a_1(x), \ldots, a_n(x)$ du système (1) passant par le point $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ satisfait aux inégalités (9)

$$\varphi_i(x) \leqslant a_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ \xi \leqslant x \leqslant \xi + \delta)$$

l'intégrale supérieure à droite le fait aussi. Pour le système de fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ il n'existerait donc aucune intégrale du système (1) satisfaisant dans un intervalle suffisamment petit aux inégalités (9) ce qui est contraire à notre hypothèse.

Construction du système de fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$

Soit $K[\xi \leqslant x \leqslant \xi+h, \eta_1 - h \leqslant y_1 \leqslant \eta_1 + h, \ldots, \eta_n - h \leqslant y_n \leqslant \eta_n + h]$, $h > 0$, un parallélépipède appartenant entièrement au domaine Ω. En vertu de la continuité des fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ il existe un M tel qu'on ait dans ce parallélépipède

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ M \geqslant 1). \tag{10}$$

Dans l'intervalle $\langle \xi, \xi + h/M \rangle$ nous définissons les fonctions $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots, \varphi_n(x)$ par les formules

$$\varphi_i(x) = \eta_i - M(x - \xi) \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{11}$$

Nous allons démontrer que les fonctions $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ satisferont aux inégalités (2) indépendamment de la définition de la fonction $\varphi_1(x)$, pourvu que

$$-h \leqslant \varphi_1(x) - \eta_1 \leqslant h. \tag{12}$$

En effet, on peut écrire les identités (11) de la manière suivante:

$$\varphi_i(x) = \eta_i + \int_\xi^x (-M)\,dx \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Mais, en vertu des définitions des fonctions $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ et de la condition (12) la courbe $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ envisagée dans l'intervalle $\langle \xi, \xi + h/M \rangle$ appartient au parallélépipède K. On a donc

$$-M \leqslant f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ x \in \langle \xi, \xi + h/M \rangle)$$

et par suite

$$\varphi_i(x) \leqslant \eta_i + \int_\xi^x f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)\,dx \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

c'est-à-dire les fonctions $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ satisfont aux inégalités (2). Dans la construction de la fonction $\varphi_1(x)$ nous nous appuyerons sur le lemme suivant dont la démonstration sera donnée au § 3:

LEMME I. Hypothèses. *Soient $G(x, y)$, $F(x, y)$ deux fonctions définies et continues dans un domaine plan ω. Soit (x_0, y_0) un point de ce domaine tel que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0)$ et que l'inégalité*

$$F(x_0, y_0) < G(x_0, y) \tag{13}$$

ait lieu dans un intervalle suffisamment petit $\langle y_0 - r, y_0 \rangle$, $r > 0$. Soit $T_1 \langle x_0, x_0 + l, y_0 - l, y_0 + l \rangle$ un rectangle appartenant au domaine ω. En choisissant M $(0 < M < +\infty)$ suffisamment grand on aura dans ce rectangle les inégalités

$$|G(x, y)| \leqslant M \quad \text{et} \quad |F(x, y)| \leqslant M. \tag{14}$$

Supposons de plus que $0 < l < r$. Désignons par T_0 le rectangle $\langle x_0, x_0 + h, y_0 - l, y_0 + l \rangle$ où $h = \min[l, l/M]$. Désignons par $\psi(x)$ une intégrale arbitraire de l'équation $y' = F(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0).

Thèse. *Il existe une fonction continue $\varphi(x)$ définie dans un voisinage à droite du point x_0 telle que*

C$_1$. $\varphi(x_0) = y_0$;

C$_2$. $\varphi(x) \leqslant y_0 + \int_{x_0}^x G\big(x, \varphi(x)\big)\,dx$;

C$_3$. *son diagramme appartienne au rectangle T_0;*

C$_4$. *l'inégalité $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ ne soit remplie dans aucun voisinage du point x_0.*

A l'aide de ce lemme on peut construire la fonction cherchée $\varphi_1(x)$. En effet, posons

$$F(x, y) = f_1\big(x, y, \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big), \quad G(x, y) = f_1\big(x, y, \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)\big),$$
$$x_0 = \xi, \quad y_0 = \eta_1, \quad \psi(x) = \psi_1(x).$$

Les hypothèses du lemme sont alors verifiées. En particulier,

$$F(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0, \psi_2(x_0), \ldots), \quad G(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0, \varphi_2(x_0), \ldots).$$

Mais $\varphi_i(x_0) = \varphi_i(\xi) = \eta_i$ et $\psi_i(x_0) = \psi_i(\xi) = \eta_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, on a donc $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0)$. On peut poser $\psi_1(x) = \psi(x)$ puisqu'on a $\psi_1'(x) = f_1(x, \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots) = F\big(x, \psi_1(x)\big)$.

En posant $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ désigne la fonction intervenant dans la thèse de ce lemme) on obtient la fonction cherchée $\varphi_1(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\varphi_1(x) \leqslant \eta_1 + \int_\xi^x G\big(x, \varphi_1(x)\big)\,dx,$$

c'est-à-dire à l'inégalité

$$\varphi_1(x) \leqslant \eta_1 + \int_\xi^x f_1\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)\,dx.$$

En complétant par $\varphi_1(x)$ le système déjà défini des fonctions $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ on obtient le système $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ satisfaisant aux inégalités (2), bien que l'inégalité $\varphi_1(x) \leqslant \psi_1(x)$ ne soit remplie dans aucun voisinage du point ξ.

§ 3. Avant de passer à la démonstration du lemme I formulé ci-dessus nous en démontrerons un autre

LEMME II. *Soit $\varepsilon(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$ telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et $\varepsilon(x) > 0$ pour $x_0 < x \leqslant x_0+h$* (fig. 2) *et soit N un nombre positif. Il existe alors une suite décroissante tendant vers x_0 d'intervalles disjoints $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ appartenant à l'intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$ et tels que pour toute fonction mesurable $f(x)$ dont la valeur absolue est bornée par N dans l'ensemble $\sum \Delta_\nu$ et égale à 0 dans l'ensemble $\langle x_0, x_0+h\rangle - \sum \Delta_\nu$, on ait*

$$\Big|\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x)|\,dx \leqslant \varepsilon(x).$$

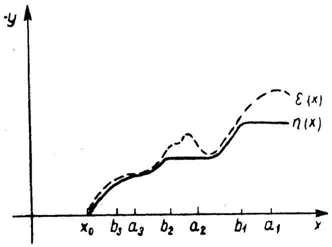

Fig. 2

Posons

$$\eta(x) = \min_{x \leqslant u \leqslant x_0+h} \varepsilon(u).$$

On obtient ainsi une fonction $\eta(x)$ croissante au sens large et telle que

$$(15) \qquad 0 < \eta(x) \leqslant \varepsilon(x) \quad \text{pour} \quad x \in (x_0, x_0+h\rangle; \qquad \eta(x_0) = 0.$$

Choisissons arbitrairement une suite $a_1, a_2, \ldots$ décroissante, tendant vers x_0 de points de l'intervalle $(x_0, x_0+h\rangle$ tels que $\eta(a_1) > \eta(a_2) > \ldots$ et $a_1 = x_0+h$. On voit aisément que, la fonction $\eta(x)$ étant croissante, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\eta(a_\nu) - \eta(a_{\nu+1})]$$

doit être convergente. Prenons maintenant b_ν entre $a_{\nu+1}$ et a_ν de telle manière que

$$(16) \qquad N(a_\nu - b_\nu) < \eta(a_{\nu+1}) - \eta(a_{\nu+2})$$

et posons $\Delta_\nu = \langle b_\nu, a_\nu\rangle$.

Pour tout point x de l'intervalle $(x_0, x_0+h\rangle$ on peut trouver un indice k tel que $a_{k+1} \leqslant x \leqslant a_k$. On a donc pour toute fonction mesurable $f(x)$ remplissant les conditions de notre lemme

$$\Big|\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x)|\,dx \leqslant \sum_{\nu=k}^{\infty} \int_{b_\nu}^{a_\nu} N\,dx = \sum_{\nu=k}^{\infty} N(a_\nu - b_\nu).$$

En vertu de (16) on a donc

$$\Big|\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Big| \leqslant \sum_{\nu=k}^{\infty} [\eta(a_{\nu+1}) - \eta(a_{\nu+2})] = \eta(a_{k+1}) \leqslant \eta(x)$$

et par suite, en raison de (15)

$$\Big|\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Big| \leqslant \varepsilon(x).$$

Démonstration du lemme I formulé au § 2. Nous démontrerons d'abord qu'en vertu des hypothèses du lemme I il existe une fonction continue $\sigma(x)$ telle que

C_5. $\sigma(x) \leqslant \psi(x)$ *et* $\sigma(x_0) = \psi(x_0) = y_0$;

C_6. $G\big(x, \sigma(x)\big) > F\big(x, \psi(x)\big)$ *dans un intervalle* $(x_0, x_0+h\rangle$;

C_7. *le diagramme de $\sigma(x)$ appartienne au rectangle T_0.*

En effet, on a l'inégalité $F\big(x_0, \psi(x_0)\big) < G(x_0, y_0 - l)$. En vertu de la continuité des fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ et $\psi(x)$ on aura l'inégalité $F\big(x, \psi(x)\big) < G(x, y_0 - l)$ dans un intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$ où h est une constante positive suffisamment petite. De même il existe un rectangle $AC_1E_1D_1$ situé au-dessous de la courbe $y = \psi(x)$ (fig. 3) dans lequel on a $F\big(x, \psi(x)\big) < G(x, y)$. Pareillement il existe un rectangle $AC_2E_2D_2$ (nous choisissons D_2 à gauche de D_1), situé au-dessous de la courbe $y = \psi(x)$, dans lequel on a la même inégalité. Construisons une suite infinie de tels rectangles de telle manière que la suite $D_1, D_2, \ldots$ tende vers A, que la suite $C_1, C_2, \ldots$ tende vers B et qu'on ait dans chacun de ces rectangles $F\big(x, \psi(x)\big) < G(x, y)$. La ligne polygonale $D_0D_1F_1F_2\ldots$ constitue le diagramme de la fonction cherchée $\sigma(x)$. Il est situé dans la somme des rectangles ainsi construits, on a donc

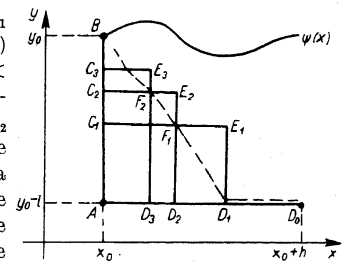

Fig. 3

$$(17) \qquad F\big(x, \psi(x)\big) < G\big(x, \sigma(x)\big) \quad \text{pour} \quad x \in (x_0, x_0+h\rangle.$$

En posant $\sigma(x_0) = y_0$ on obtient, en vertu de la propriété évidente que

$$\lim_{x \to x_0} \sigma(x) = y_0,$$

la fonction $\sigma(x)$ continue dans l'intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$ et satisfaisant aux conditions C_5-C_7.

Nous avons désigné par $\psi(x)$ l'intégrale de l'équation $y' = F(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0). On a donc

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F\big(x, \psi(x)\big)\,dx.$$

En posant

$$\lambda(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} G\big(x, \sigma(x)\big)\,dx$$

on obtient, en vertu de la condition C_5 et de l'inégalité (17), $\sigma(x) \leqslant \psi(x) < < \lambda(x)$ pour $x \in (x_0, x_0+h\rangle$.

Posons maintenant

(18) $$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}[\lambda(x) - \psi(x)] \quad \text{pour} \quad x \in \langle x_0, x_0+h\rangle.$$

Pour cette fonction $\varepsilon(x)$ et pour $N = 2M$ nous construisons la suite d'intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ intervenant dans l'énoncé du lemme II. Définissons maintenant la fonction cherchée $\varphi(x)$ de la manière suivante (fig. 4):

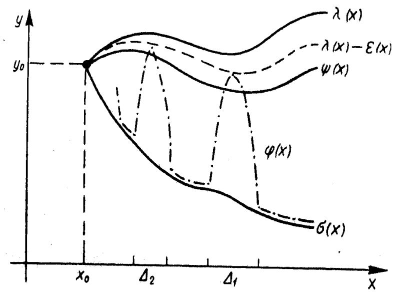

Fig. 4

(α) $\varphi(x) = \sigma(x)$ dans l'ensemble $\langle x_0, x_0+h\rangle - \sum \Delta_\nu$,

(β) dans l'intervalle Δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ posons $\varphi(a_\nu) = \sigma(a_\nu)$, $\varphi(b_\nu) = \sigma(b_\nu)$,

$$\varphi\left(\frac{a_\nu+b_\nu}{2}\right) = \psi\left(\frac{a_\nu+b_\nu}{2}\right) + \varepsilon\left(\frac{a_\nu+b_\nu}{2}\right).$$

Pour d'autres x définissons $\varphi(x)$ de façon qu'elle soit continue et qu'on ait

(19) $$\sigma(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x) + \varepsilon(x),$$

(γ) $\varphi(x_0) = y_0$.

On voit aisément que la fonction $\varphi(x)$ ainsi définie satisfait aux inégalités (19) dans l'intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$ tout entier.

Il reste à démontrer que cette fonction $\varphi(x)$ remplit la condition C_2, c'est-à-dire qu'on a dans l'intervalle $\langle x_0, x_0+h\rangle$

$$\varphi(x) \leqslant y_0 + \int_{x_0}^{x} G\big(x, \varphi(x)\big)\,dx.$$

Nous démontrerons d'abord que l'on y a l'inégalité

(20) $$y_0 + \int_{x_0}^{x} G\big(x, \varphi(x)\big)\,dx \geqslant \lambda(x) - \varepsilon(x),$$

c'est-à-dire que

(21) $$\int_{x_0}^{x} \big[G\big(x, \varphi(x)\big) - G\big(x, \sigma(x)\big)\big]\,dx \geqslant -\varepsilon(x).$$

Or, on a $G\big(x, \varphi(x)\big) - G\big(x, \sigma(x)\big) \equiv 0$ dans l'ensemble $\langle x_0, x_0+h\rangle - \sum \Delta_\nu$ et, en raison de (14), $\big|G\big(x, \varphi(x)\big) - G\big(x, \sigma(x)\big)\big| \leqslant 2M$ dans l'ensemble $\sum \Delta_\nu$. Du lemme II il résulte donc que

$$\left|\int_{x_0}^{x} \big[G\big(x, \varphi(x)\big) - G\big(x, \sigma(x)\big)\big]\,dx\right| \leqslant \varepsilon(x)$$

et, par suite, les relations (21) et (20) ont lieu.

D'autre part, en raison de (18) et (19) on a $\varphi(x) \leqslant \psi(x) + \varepsilon(x) = = \lambda(x) - \varepsilon(x)$ d'où, en tenant compte de la relation (20), on obtient

$$\varphi(x) \leqslant y_0 + \int_{x_0}^{x} G\big(x, \varphi(x)\big)\,dx \quad \text{pour} \quad x \in \langle x_0, x_0+h\rangle.$$

La propriété C_2 intervenant dans le lemme I se trouve ainsi établie. On peut aussi aisément démontrer que la fonction $\varphi(x)$ vérifie les propriétés C_1 et C_2 de ce lemme.

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II*, Acta Mathematica 58 (1932), p. 57-85.

[2] B. Viswanatham, *On the asymptotic behaviour of the solutions of non-linear differential equations*, Proc. of the Indian Acad. of Sciences. Sect. A. N 5 (1952), p. 335-341.

[3] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 23 (1950), p. 112-166.