5. Theorems 1 and 2 imply the following one.

COROLLARY. *Let us make assumption* $A(a_1, a_2)$. *The existence of a system of functions* $t_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *defined in the interval* (a_1, a_2) *and satisfying the system* (4) *is necessary and sufficient for the existence of a function* $z(x, Y)$ *of class* C^2 *defined in a neighbourhood of the arc* $Y = \Phi(x)$, $a_1 < x < a_2$, *and satisfying equation* (1) *with condition* (2), *where* $\omega(Y)$ *is a given function of class* C^2 *in a neighbourhood of* $Y = H$ *and fulfils the relations* (C).

Remark 1. A proof of relation (16) independent of theorem 1 is included in [5].

Remark 2. Theorem 1 is formulated with the assumptions $f \in C^{1,2}$, $z \in C^2$. It holds true, however, for $f \in C^{0,2}$, $z \in C^{1,2}$.

Theorem 2 holds true for $f \in C^{l,m}$ $(2 \leqslant m \leqslant \infty,\ 0 \leqslant l \leqslant m)$, $\omega \in C^m$, $z \in C^{k,m}$, where $k = \min(l+1, m)$. It is also true for analytic f, ω, z.

Remark 3. Theorem similar to theorem 2 is also true for the equation $F(x_1, \ldots, x_n, z, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n}) = 0$, where the function $F(x_1, \ldots, x_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ is of class C^2 and satisfies the inequality

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{q_i})^2 > 0,$$

and for the initial condition given on a certain hypersurface of class C^2, which is not tangent to the characteristics. The precise formulation of this theorem is not difficult. The same applies to theorem 1.

References

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[2] J. Perausówna, *Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation* $p+f(x, y, z)q = g(x, y, z)$, Ann. Soc. Polon. Math. 12 (1933), p. 1-5.

[3] A. Pliś, *On the estimation of the existence domain for solutions of non-linear partial differential equation of the first order*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 125-129.

[4] T. Ważewski, *Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire*, Ann. Soc. Polon. Math. 12 (1933), p. 6-15.

[5] — *Sur la méthode de A. Pliś de déterminer le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 131-135.

Sur certaines propriétés des intégrales de l'équation $y' = f(x, y)$, dont le second membre est doublement périodique

par C. OLECH (Kraków)

Le but de la présente note est de démontrer quelques propriétés des intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = g(x, y),$$

où $g(x, y)$ est une fonction définie et continue sur le plan tout entier et doublement périodique, c'est-à-dire il existe deux nombres positifs u, w tels que l'identité

$$g(x, y) = g(x+pu, y+qw)$$

ait lieu pour tout couple de nombres entiers p, q. Dans la suite je supposerai que $u = w = 1$.

H. Poincaré [1] a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME P. *Si par chaque point du plan il ne passe qu'une seule intégrale* $\varphi(x)$ *de l'équation* (1), *les limites*

$$\lim_{x\to+\infty} [\varphi(x)/x], \qquad \lim_{x\to-\infty} [\varphi(x)/x]$$

existent, sont finies et égales.

En relation avec ce théorème M. T. Ważewski a considéré à son séminaire la fonction $f(x)$, définie et continue pour $x \in (-\infty, +\infty)$, jouissant de la

Propriété A. *Pour tout couple de nombres entiers* p, q *la fonction*

$$f_{p,q}(x) \overset{\text{df}}{=} f(x+p)+q$$

satisfait, pour tout x, *à l'une des relations suivantes*

$$f_{p,q}(x) > f(x) \quad \text{ou} \quad f_{p,q}(x) < f(x)$$

ou bien $f_{p,q}(x) = f(x)$.

M. T. Ważewski a aussi formulé le

THÉORÈME W. *Si la fonction* $f(x)$, *définie et continue pour* $x \in (-\infty, +\infty)$, *a la propriété* A, *les limites*

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)/x], \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x)/x]$$

existent, sont finies et égales.

Dans le cas de l'unicité, toute intégrale de l'équation (1) ayant la propriété A, le théorème W entraîne immédiatement le théorème P.

En démontrant le théorème W j'ai aperçu qu'il est possible d'y remplacer la propriété A par une autre, plus générale:

Propriété B. *Pour tout couple de nombres entiers p, q la fonction*

$$f_{p,q}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x+p)+q$$

satisfait pour tout x à l'une des relations $f_{p,q}(x) \geqslant f(x)$ ou $f_{p,q}(x) \leqslant f(x)$.

Cela m'a permis d'obtenir une certaine généralisation du théorème P sans l'hypothèse de l'unicité de l'équation (1).

§ 1. Je démontrerai d'abord le

Théorème 1. *Si la fonction $f(x)$ définie et continue pour $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ a la propriété B, les limites finies*

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)/x], \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)/x]$$

existent et sont égales.

Avant de passer à la démonstration, j'établirai le

Lemme 1. *Si la fonction $f(x)$, définie et continue pour $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ satisfait pour tout x à l'inégalité*

(2) $$[f(x+h)-f(x)]/h \leqslant M,$$

où M est une constante arbitraire, et h est un nombre fixe et positif, alors

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}[f(x)/x] \leqslant M, \quad \overline{\lim_{x\to+\infty}}[f(x)/x] \leqslant M.$$

Pour la démonstration nous définissons la fonction auxiliaire

$$F(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x)-Mx.$$

Pour la fonction $F(x)$ le quotient (2) ne peut pas être positif. En effet, on a

(3) $$[F(x+h)-F(x)]/h = [f(x+h)-f(x)]/h-M \leqslant 0.$$

Je dis que la fonction $F(x)$ est bornée supérieurement pour $x>0$. En effet, la fonction $F(x)$ étant continue, il existe une constante C telle que

(4) $$F(x) < C \quad \text{pour} \quad x \epsilon \langle 0, h\rangle, \quad h>0.$$

Je démontrerai que la même inégalité est vraie pour tout $x>0$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc un $\bar{x}$ tel que

(5) $$F(\bar{x}) = C$$

et l'inégalité (4) est vraie pour $x \epsilon \langle 0, \bar{x})$. En vertu de $\bar{x}>h$, $\bar{x}-h \epsilon (0, \bar{x})$ et $F(\bar{x}-h) < C$, il résulte de la dernière inégalité et de (5) que

$$[F(\bar{x})-F(\bar{x}-h)]/h > 0 \quad \text{pour} \quad \bar{x}>h>0$$

ce qui est en contradiction avec (3). L'inégalité (4) est donc vraie pour tout x positif. En divisant l'inégalité (4) par x ($x>0$), on obtient

$$f(x)/x < M+C/x \quad \text{pour} \quad x>0,$$

d'où résulte la première partie du lemme 1.

On peut démontrer tout de même l'inégalité

(6) $$F(x) > C' \quad \text{pour} \quad x<0,$$

C' étant une constante choisie de sorte que l'inégalité (6) soit vraie pour $x \epsilon \langle -h, 0\rangle$, $h>0$. En divisant l'inégalité (6) par x ($x<0$) et en tenant compte de la définition de $F(x)$, on obtient

$$f(x)/x < M+C'/x \quad \text{pour} \quad x<0,$$

d'où résulte la seconde partie du lemme 1.

Pareillement on peut démontrer le

Lemme 1'. *Si la fonction $f(x)$, définie et continue pour $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ satisfait pour tout x à l'inégalité*

$$[f(x+h)-f(x)]/h \geqslant m,$$

où m est une constante arbitraire et h est un nombre fixe et positif, on a

$$\underline{\lim_{x\to-\infty}}[f(x)/x] \geqslant m \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}[f(x)/x] \geqslant m.$$

Démonstration du théorème 1. De la propriété B il résulte l'existence d'une constante K telle que pour tout nombre entier p et tout x de l'intervalle $|x-p| \leqslant 1$, on ait

(7) $$|f(x)-f(p)| \leqslant K.$$

En effet, choisissons K de manière que l'on ait

$$|f(x)-f(0)| \leqslant K-2 \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant 1.$$

Ensuite pour tout nombre entier p on peut choisir q de manière que l'on ait

(8) $$|f_{p,\bar{q}}(x)-f(x)| \leqslant 1.$$

Pour cela il suffit de choisir q de sorte que l'on ait pour un certain x

$$f(x)-1 < f(x+p)+q < f(x)+1,$$

car il en résulte, en vertu de la propriété B, l'inégalité (8) pour tout x.

Cela posé, on peut évaluer le premier membre de l'inégalité (7) de la manière suivante:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(p)| &= |f_{p,q}(x-p)-f_{p,q}(0)|\\ &= |f_{p,q}(x-p)-f(x-p)+f(0)-f_{p,q}(0)+f(x-p)-f(0)|\\ &\leqslant |f_{p,q}(x-p)-f(x-p)|+|f(0)-f_{p,q}(0)|+|f(x-p)-f(0)|\\ &\leqslant 1+1+K-2 = K.\end{aligned}$$

L'inégalité (7) est ainsi démontrée. Il en résulte l'inégalité

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant 2K \quad \text{pour} \quad |x_1-x_2| \leqslant 1. \tag{9}$$

Je passe maintenant à l'évaluation de la différence

$$[f(x+h)-f(x)]/h-[f(h)-f(0)]/h,$$

x étant arbitraire, h fixe et positif. Je choisis p et q de telle manière que l'on ait $|x-p| \leqslant 1$ et (8). On a alors

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \left|\frac{f_{p,q}(x-p+h)-f_{p,q}(x-p)}{h}-\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|$$

$$\leqslant \frac{|f_{p,q}(x-p+h)-f(x-p+h)|+|f(x-p)-f_{p,q}(x-p)|}{h}+$$

$$+\frac{|f(x-p+h)-f(h)|+|f(0)-f(x-p)|}{h}.$$

En vertu de l'inégalité $|x-p| \leqslant 1$ et des inégalités (8) et (9), on obtient

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leqslant \frac{1+1+2K+2K}{h} = \frac{2+4K}{h}.$$

En désignant $2+4K$ par K' on obtient

$$-\frac{K'}{h}+\frac{f(h)-f(0)}{h} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{K'}{h}.$$

De cette dernière inégalité et des lemmes 1 et 1' il résulte que

$$-\frac{K'}{h}+\frac{f(h)-f(0)}{h} \leqslant \varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{K'}{h}$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante:

$$0 \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}[f(x)/x]-\varliminf_{x\to+\infty}[f(x)/x] \leqslant 2K'/h.$$

Comme K' est une constante et h peut être quelconque, on a donc

$$\varlimsup_{x\to+\infty}[f(x)/x] = \varliminf_{x\to+\infty}[f(x)/x].$$

De même on peut démontrer que

$$\varlimsup_{x\to-\infty}[f(x)/x] = \varliminf_{x\to-\infty}[f(x)/x].$$

Cela veut dire que les limites $\lim_{x\to-\infty}[f(x)/x]$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)/x]$ existent, sont finies et égales, c. q. f. d.

§ 2. Dans la suite je m'occuperai des intégrales de l'équation (1) où la fonction $g(x,y)$ est continue sur le plan tout entier et satisfait à la relation $g(x+p,y+q) \equiv g(x,y)$ pour tout couple de nombres entiers p,q[1].

Je vais énoncer maintenant une certaine généralisation du théorème P dans le cas où l'on ne suppose pas l'unicité de l'équation (1). Je vais démontrer le

THÉORÈME 2. *Si $\varphi(x)$ est une intégrale de l'équation* (1) *passant par le point (ξ,η) et telle que pour $x>\xi$ elle soit l'intégrale supérieure et pour $x<\xi$ l'intégrale inférieure par rapport au point initial (ξ,η), on a*

$$\lim_{x\to-\infty}[\varphi(x)/x] = \lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)/x] = \beta$$

où β est un nombre fini indépendant du choix du point (ξ,η).

---

[1]) L'équation (1) a l'interprétation suivante: Supposons donnée dans l'espace la surface du tore

$$x = (R+r\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (R+r\cos\psi)\sin\varphi, \quad z = r\sin\varphi$$

où (φ,ψ) sont des coordonnées curvilignes. Les points (φ,ψ) et $(\varphi+2p\pi, \psi+2q\pi)$ sont identiques pour tout couple de nombres entiers p,q. A chaque point on fait correspondre l'élément linéaire $G(\varphi,\psi)$ non tangent à la courbe $\varphi = \text{const}$. La courbe $\psi = \psi(\varphi)$, tangente en chaque point à l'élément linéaire qui lui correspond, satisfait à l'équation différentielle

$$d\psi/d\varphi = G(\varphi,\psi)$$

dont le deuxième membre jouit de la propriété

$$G(\varphi,\psi) \equiv G(\varphi+2p\pi, \psi+2q\pi)$$

pour p,q entiers quelconques. Le deuxième membre de l'équation (1) jouit de la même propriété, on peut donc la considérer comme une équation différentielle définie sur la surface du tore. Pour cela il suffit de changer les coordonnées du point sur la surface du tore

$$x = \varphi/2\pi, \quad y = \psi/2\pi.$$

Pareillement, on a le

Théorème 2'. *Si ψ est une intégrale de l'équation* (1) *passant par le point* (ξ, η) *et telle que pour $x > \xi$ elle soit l'intégrale inférieure, et pour $x < \xi$ l'intégrale supérieure, on a*

$$\lim_{x\to-\infty} [\psi(x)/x] = \lim_{x\to+\infty} [\psi(x)/x] = a$$

où a est un nombre fini, indépendant du choix du point (ξ, η).

Les nombres a, β sont des constantes caractéristiques de l'équation (1).

Je désignerai l'intégrale intervenant dans le théorème 2 par $\varphi(x, \xi, \eta)$ en l'appelant l'intégrale du type φ. De même, je désignerai l'intégrale intervenant dans le théorème 2' par $\psi(x, \xi, \eta)$ et je l'appellerai l'intégrale du type ψ (Fig. 1).

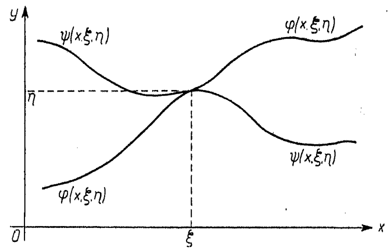

Fig. 1

Afin d'établir le théorème 2 il faut montrer que

$$(10)\qquad \lim_{x\to-\infty} [\varphi(x, \xi, \eta)/x] = \lim_{x\to+\infty} [\varphi(x, \xi, \eta)/x] = \beta$$

β étant fini et indépendant du choix du point (ξ, η). Je vais prouver que la fonction $\varphi(x, \xi, \eta)$ a deux propriétés (propriétés 1 et 2, ci-après), dont il résulte la propriété B et, en vertu du théorème 1, les formules (10).

Propriété 1. *Pour deux points quelconques $P_1(\xi_1, \eta_1)$ et $P_2(\xi_2, \eta_2)$ où $\xi_1 \leqslant \xi_2$ un seul des deux cas suivants est possible:*

$$(11)\qquad \varphi(x, \xi_1, \eta_1) \geqslant \varphi(x, \xi_2, \eta_2) \quad \textit{pour tout } x,$$

ou bien

$$\varphi(x, \xi_1, \eta_1) \leqslant \varphi(x, \xi_2, \eta_2) \quad \textit{pour tout } x.$$

Dans la démonstration je distingue deux cas.

Premier cas. Je suppose qu'il existe un $\bar{x} \in (\xi_1, \xi_2)$ tel que

$$\varphi(\bar{x}, \xi_1, \eta_1) \geqslant \varphi(\bar{x}, \xi_2, \eta_2).$$

L'intégrale $\varphi(x, \xi_1, \eta_1)$ étant l'intégrale supérieure pour $x \geqslant \bar{x}$, et l'intégrale $\varphi(x, \xi_2, \eta_2)$ étant l'intégrale inférieure pour $x \leqslant \bar{x}$, la dernière inégalité est vraie pour tout x.

Deuxième cas. Je suppose que pour tout $x \in \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$

$$\varphi(x, \xi_1, \eta_1) < \varphi(x, \xi_2, \eta_2).$$

Puisque $\varphi(x, \xi_2, \eta_2)$ est l'intégrale supérieure pour $x \geqslant \xi_2$ et $\varphi(\xi_2, \xi_1, \eta_1) < \varphi(\xi_2, \xi_2, \eta_2)$ on a donc

$$\varphi(x, \xi_1, \eta_1) \leqslant \varphi(x, \xi_2, \eta_2) \quad \text{pour} \quad x \geqslant \xi_2.$$

De même, puisque $\varphi(x, \xi_1, \eta_1)$ est l'intégrale inférieure pour $x \leqslant \xi_1$ et $\varphi(\xi_1, \xi_1, \eta_1) < \varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_2)$ on a donc

$$\varphi(x, \xi_1, \eta_1) \leqslant \varphi(x, \xi_2, \eta_2) \quad \text{pour} \quad x \leqslant \xi_1.$$

Cette dernière inégalité est donc vraie pour tout x, c. q. f. d.

Propriété 2. *Pour tout couple de nombres entiers p, q on a l'identité*:

$$(12)\qquad \varphi(x-p, \xi, \eta)+q \equiv \varphi(x, \xi+p, \eta+q).$$

(Par une translation d'un nombre entier d'unités dans la direction de l'axe x ou de l'axe y de l'intégrale du type φ on obtient de nouveau une intégrale du type φ.)

Démonstration. La fonction $\varphi(x-p, \xi, \eta)+q$ est l'intégrale de l'équation (1) passant par le point $(\xi+p, \eta+q)$. En effet

$$[\varphi(x-p, \xi, \eta)+q]' = \varphi'(x-p, \xi, \eta) = g\big(x-p, \varphi(x-p, \xi, \eta)\big)$$

et comme la fonction $g(x, y)$ est doublement périodique, on obtient

$$[\varphi(x-p, \xi, \eta)+q]' = g\big(x, \varphi(x-p, \xi, \eta)+q\big).$$

Ensuite, on a

$$\varphi(\xi+p-p, \xi, \eta)+q = \varphi(\xi, \xi, \eta)+q = \eta+q.$$

En vertu de la définition de la fonction $\varphi(x, \xi+p, \eta+q)$ on a

$$\varphi(x-p, \xi, \eta)+q \leqslant \varphi(x, \xi+p, \eta+q) \quad \text{pour} \quad x \geqslant \xi+p.$$

Supposons que pour un certain $\bar{x}$ on ait l'inégalité forte

$$\varphi(\bar{x}-p, \xi, \eta)+q < \varphi(\bar{x}, \xi+p, \eta+q) \quad \text{où} \quad \bar{x} > \xi+p.$$

Dans ce cas l'inégalité

$$\varphi(\bar{\bar{x}}, \xi, \eta) < \varphi(\bar{\bar{x}}+p, \xi+p, \eta+q)-q \quad \text{où} \quad \bar{\bar{x}} = \bar{x}-p > \xi,$$

serait aussi vraie, contrairement à la définition de la fonction $\varphi(x, \xi, \eta)$, $\varphi(x+p, \xi+p, \eta+q)-q$ étant l'intégrale passant par le point (ξ, η). L'identité (12) est donc vraie pour $x \geqslant \xi+p$. De même, on peut démontrer qu'elle est vraie pour $x \leqslant \xi+p$.

Des propriétés 1 et 2 il résulte la propriété B. En effet, la fonction

$$\varphi_{p,q}(x, \xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} \varphi(x+p, \xi, \eta)+q$$

est, en vertu de la propriété 2, l'intégrale du type φ et de la propriété 1 on obtient, pour tout x,

$$\varphi_{p,q}(x,\xi,\eta) \geqslant \varphi(x,\xi,\eta) \quad \text{ou} \quad \varphi_{p,q}(x,\xi,\eta) \leqslant \varphi(x,\xi,\eta),$$

ce qui signifie que la fonction $\varphi(x,\xi,\eta)$ a la propriété B. L'existence des limites finies (10) résulte donc du théorème 1. Pour achever la démonstration il faut encore démontrer que β ne dépend pas du choix du point initial. Pour cela désignons par β la limite de la fonction $\varphi(x,0,0)/x$ pour $x \to +\infty$. Pour un point (ξ,η) quelconque je choisis un nombre entier r de sorte que

$$r < \varphi(0,\xi,\eta) < r+2.$$

De la propriété B et de l'inégalité précédente il résulte que pour tout x

$$\varphi(x,0,0)+r \leqslant \varphi(x,\xi,\eta) \leqslant \varphi(x,0,0)+r+2$$

d'où, en divisant par x $(x>0)$ on obtient

$$\big(\varphi(x,0,0)+r\big)/x \leqslant \big(\varphi(x,\xi,\eta)\big)/x \leqslant \big(\varphi(x,0,0)+r+2\big)/x.$$

Il en résulte que $\lim[\varphi(x,\xi,\eta)/x] = \beta$ pour tout point (ξ,η). On peut démontrer tout de même le théorème 2'.

§ 3. Soit $\delta(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1) passant par le point (ξ,η). Alors on a l'inégalité suivante

$$\alpha \leqslant \varliminf_{x\to+\infty}[\delta(x)/x] \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}[\delta(x)/x] \leqslant \beta.$$

Elle résulte immédiatement de l'inégalité

$$\psi(x,\xi,\eta) \leqslant \delta(x) \leqslant \varphi(x,\xi,\eta) \quad \text{pour} \quad x>\xi.$$

En admettant que $\alpha<\beta$ je démontrerai le théorème suivant:

THÉORÈME 3. 1. *Pour tout nombre λ, $\lambda\in(\alpha,\beta)$ et pour tout point (ξ,η) il existe une intégrale de l'équation* (1) *$\omega(x)$ passant par le point (ξ,η) et telle que*

$$\lim_{x\to-\infty}[\omega(x)/x] = \lim_{x\to+\infty}[\omega(x)/x] = \lambda.$$

2. *Il existe une telle intégrale $\sigma(x)$, passant par le point (ξ,η), pour laquelle la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sigma(x)/x]$ n'existe pas.*

Je vais d'abord construire l'intégrale $\omega(x)$ pour $x\geqslant\xi$. Du point (ξ,η) je mène la droite $y=\eta+\lambda(x-\xi)$ (Fig. 2). Il existe un h positif, le même pour tout point (ξ,η), tel que pour $x\geqslant\xi+h$ la droite $y=\eta+\lambda(x-\xi)$ soit située entre les intégrales $\psi(x,\xi,\eta)$ et $\varphi(x,\xi,\eta)$.

Des théorèmes 2 et 2' et de l'inégalité $\alpha<\lambda<\beta$ il résulte qu'il existe un h positif tel que l'inégalité

$$\psi(x,0,0)+N_1+2+\lambda \leqslant \lambda x \leqslant \varphi(x,0,0)+N_2+\lambda+2 \tag{13}$$

ait lieu pour tout $x>h$, N_1 et N_2 étant deux nombres entiers satisfaisant aux relations

$$N_1 > \max_{x\in\langle0,1\rangle}|\psi(x,0,0)|, \qquad N_2 > \max_{x\in\langle0,1\rangle}|\varphi(x,0,0)|.$$

Prenant un point (ξ,η) quelconque, je choisis les nombres entiers p,q de sorte que

$$0\leqslant\xi-p<1, \quad 0\leqslant\eta+q<1.$$

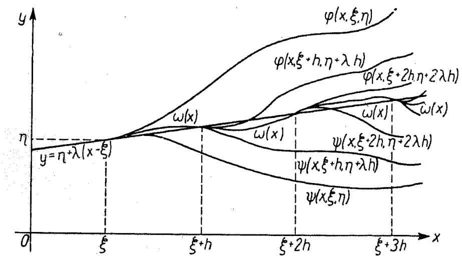

Fig. 2

De la propriété B, dont jouissent les intégrales $\psi(x,\xi,\eta)$, $\varphi(x,\xi,\eta)$ et la droite $y=\eta+\lambda(x-\xi)$, et des définitions des nombres N_1, N_2, p et q on obtient, pour tout x, les inégalités suivantes:

$$|\psi_{p,q}(x,\xi,\eta)-\psi(x,0,0)| \leqslant N_1+1, \qquad |\varphi_{p,q}(x,\xi,\eta)-\varphi(x,0,0)| \leqslant N_2+1,$$
$$|\eta+q+\lambda(x-\xi+p)-\lambda x| \leqslant \lambda+1.$$

De ces relations et de l'inégalité (13) il résulte que

$$\psi_{p,q}(x,\xi,\eta) \leqslant \eta+q+\lambda(x-\xi+p) \leqslant \varphi_{p,q}(x,\xi,\eta)$$

pour $x>\xi-p+h\geqslant h$, ce qui équivaut, en vertu de la définition des $\psi_{p,q}$ et $\varphi_{p,q}$, à l'inégalité

$$\psi(x,\xi,\eta) \leqslant \eta+\lambda(x-\xi) \leqslant \varphi(x,\xi,\eta) \quad \text{pour} \quad x>\xi+h.$$

Du point de la droite $y=\eta+\lambda(x-\xi)$ d'abscisse $\xi+h$ je mène maintenant à gauche une intégrale située entre les intégrales $\varphi(x,\xi,\eta)$ et $\psi(x,\xi,\eta)$. Elle passera nécessairement par le point (ξ,η). Dans l'intervalle $\langle\xi,\xi+h\rangle$ je pose $\omega(x)$ égale à cette intégrale. Ensuite du point

$(\xi+2h, \eta+2h\lambda)$ je mène à gauche une intégrale située entre les intégrales $\varphi(x, \xi+h, \eta+h\lambda)$ et $\psi(x, \xi+h, \eta+h\lambda)$. Elle passera par le point $(\xi+h, \eta+h)$. Dans l'intervalle $\langle \xi+h, \xi+2h\rangle$ je prends $\omega(x)$ égale à cette intégrale. Enfin, dans les intervalles $\langle \xi+(n-1)h, \xi+nh\rangle$ je prends pour la fonction $\omega(x)$ les intégrales menées des points $(\xi+nh, \eta+nh\lambda)$ et situées entre les intégrales $\varphi\big(x, \xi+(n-1)h, \eta+(n-1)\lambda h\big)$ et $\psi(x, -, -)$. On peut construire tout de même l'intégrale cherchée $\omega(x)$ pour $x \leqslant \xi$ de telle manière que pour $x=\xi-nh$ on ait $\omega(x)=\eta-nh$ (n naturel). Pour l'intégrale ainsi construite on a l'inégalité suivante

$$|\omega(x)-\omega(\xi+\eta h)| \leqslant M \quad \text{pour} \quad |x-\xi-nh| < h$$

et M suffisamment grand. On peut la démontrer de la même manière que l'inégalité (7). En profitant de cette inégalité on peut évaluer le quotient $\omega(x)/x$ de la manière suivante:

$$\frac{\omega(\xi+nh)-M}{\xi+nh} \leqslant \frac{\omega(x)}{x} \leqslant \frac{\omega\big(\xi+(n-1)h\big)+M}{\xi+(n-1)h}$$

où n est un nombre entier, choisi de telle sorte qu'on ait

$$0 < \xi+(n-1)h \leqslant x \leqslant \xi+nh.$$

Lorsque $x\to\infty$, on a aussi $n\to\infty$; on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(\xi+nh)}{\xi+nh} = \lim_{n\to\infty}\frac{\eta+nh\lambda-M}{\xi+nh} = \lambda$$

et, de même

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\omega\big(\xi+(n-1)h\big)+M}{\xi+(n-1)h} = \lambda.$$

On a donc

$$\lim_{x\to\infty}[\omega(x)/x] = \lambda.$$

On peut démontrer pareillement que $\lim\limits_{x\to-\infty}[\omega(x)/x]=\lambda$.

Pour la construction de l'intégrale $\sigma(x)$ j'observerai d'abord que pour $\lambda\,\epsilon\,(\alpha, \beta)$ la droite $y=\lambda x+\mu$ coupe toutes les intégrales $\varphi(x, \xi, \eta)$ et $\psi(x, \xi, \eta)$. Si le point (ξ, η) est situé au-dessus (resp. au-dessous) de cette droite, l'abscisse du premier point d'intersection de la droite et de l'intégrale $\psi(x, \xi, \eta)$ $\big(\varphi(x, \xi, \eta)\big)$ est plus grande que ξ. Je mène du point (ξ, η) deux droites (Fig. 3)

(a) $$y = \lambda_1(x-\xi)+\eta,$$

(b) $$y = \lambda_2(x-\xi)+\eta$$

où $\alpha<\lambda_2<\lambda_1<\beta$. Je pose maintenant $\sigma(x)=\psi(x, \xi, \eta)$ pour $x\,\epsilon\,\langle \xi, \xi_1\rangle$ où l'on a choisi ξ_1 de sorte que $\psi(\xi_1, \xi, \eta) < \lambda_2(\xi_1-\xi)+\eta$. Je mène du point $\big(\xi_1, \psi(\xi_1, \xi, \eta)\big)$ l'intégrale supérieure à droite et je pose ensuite $\sigma(x)=\varphi\big(x, \xi_1, \psi(\xi_1, \xi, \eta)\big)$ pour $x\,\epsilon\,\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ où par ξ_2 j'ai désigné l'abscisse du premier point d'intersection de l'intégrale $\varphi\big(x, \xi, \psi(-)\big)$

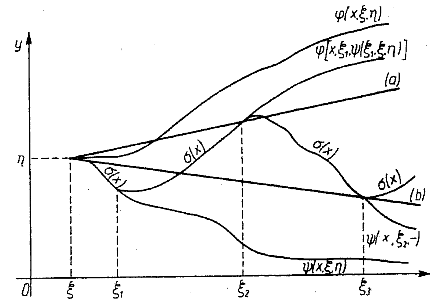

Fig. 3

et de la droite (a). Ensuite je mène du point $\xi_2, \eta+\lambda_1(\xi_2-\xi)$ l'intégrale $\psi\big(x, \xi_2, \eta+\lambda(\xi_2-\xi)\big)$ en posant $\sigma(x)$ égale à celle-ci pour $x\,\epsilon\,\langle \xi_2, \xi_3\rangle$ où ξ_3 est l'abscisse du premier point d'intersection de l'intégrale $\psi\big(x, \xi_2, \eta+\lambda(\xi_2-\xi)\big)$ et de la droite (b). Procédant de cette manière je définirai l'intégrale $\sigma(x)$ pour $x\geqslant\xi$. Il est aisé de démontrer que la suite des abscisses $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tend vers $+\infty$; en effet, le deuxième membre de l'équation (1) étant borné, les différences $\xi_i-\xi_{i-1}$ ($i=1, 2, \ldots, n, \ldots$), doivent surpasser une constante positive.

Il est évident que pour l'intégrale $\sigma(x)$ ainsi construite la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sigma(x)/x]$ n'existe pas, puisqu'elle coupe la droite (a) aux points d'abscisses ξ_{2n}, et la droite (b) aux points d'abscisses ξ_{2n-1}.

Travaux cités

[1] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de Mathématiques pures et appliquées 1 (1885), p. 167-244.