COROLLAIRE I. *Si une fonction $f(z)$ de la famille C s'annule pour une suite de points $a_1, a_2, \ldots$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{1-|a_j|\}^2 = +\infty$$

elle est identiquement nulle.

COROLLAIRE II. *Si une suite de fonctions pour lesquelles on a l'inégalité* (10) *converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur au cercle unité, la suite converge presque uniformément dans l'intérieur de ce cercle.*

Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme

par F. LEJA (Kraków)

1. Introduction. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan, D un domaine quelconque contenant E, $p(z)$ une fonction holomorphe dans D ne s'annulant pas dans ce domaine[1]) et $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue dans E.

Désignons par $\omega(z, \zeta)$ l'expression

$$\omega(z, \zeta) = \frac{|z-\zeta|}{|p(z)p(\zeta)| \exp[f(z)+f(\zeta)]},$$

par $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de E, par $V(\zeta^{(n)}, \omega)$ et $\Delta_j(\zeta^{(n)}, \omega)$ les produits

$$V(\zeta^{(n)}, \omega) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k), \tag{1}$$

$$\Delta_j(\zeta^{(n)}, \omega) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}} \omega(\zeta_j, \zeta_k), \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{2}$$

et soit $V_n(E, \omega)$ la borne supérieure de $V(\zeta^{(n)}, \omega)$, lorsque les points du système $\zeta^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. D'autre part, soit

$$x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} \tag{3}$$

un système de points de E pour lequel

$$V(x^{(n)}, \omega) = V_n(E, \omega) = \sup_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)}, \omega). \tag{4}$$

Les indices inférieurs des points $x_j^{(n)}$ peuvent toujours être choisis de manière qu'on ait

$$\Delta_0(x^{(n)}, \omega) \leqslant \Delta_1(x^{(n)}, \omega) \leqslant \ldots \leqslant \Delta_n(x^{(n)}, \omega). \tag{5}$$

Les points du sytème (3) remplissant les conditions (4) et (5) sont dits *points extrémaux* de rang n de E par rapport à la fonction $\omega(z, \zeta)$, dite *fonction génératrice* ou *distance généralisée* des points z et ζ.

---

[1]) La fonction $p(z)$ peut être multiforme lorsque D est multiplement connexe, mais nous supposerons que son module $|p(z)|$ est uniforme.

Le produit $V(x^{(n)}, \omega)$ a $n(n+1)/2$ facteurs. On sait [3] que la moyenne géométrique

$$[V(x^{(n)}, \omega)]^{2/n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

converge vers une limite non négative

$$\lim_{n\to\infty} [V(x^{(n)}, \omega)]^{2/n(n+1)} = v(E, \omega) \tag{6}$$

dite *écart* de l'ensemble E par rapport à la fonction $\omega(z, \zeta)$. Pareillement la moyenne $\Delta_0(x^{(n)}, \omega)^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge vers la même limite[2])

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)}, \omega)} = v(E, \omega).$$

Dans le cas où $\omega(z, \zeta)$ se réduit à la distance $|z-\zeta|$, c'est-à-dire lorsque $p(z) \equiv 1$ et $f(z) \equiv 0$, l'écart $v(E, |z-\zeta|)$ est appelé aussi *diamètre transfini* ou *capacité* de l'ensemble E. Nous supposerons dans la suite que $v(E, |z-\zeta|) > 0$.

Désignons par $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$, $j = 0, 1, \ldots, n$, les polynômes de Lagrange

$$L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (z-\zeta_k)/(\zeta_j-\zeta_k)$$

liés au système $\zeta^{(n)}$, par $\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$, $j = 0, 1, \ldots, n$, les fonctions

$$\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})[p(\zeta_j)/p(z)]^n \exp[nf(\zeta_j)], \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

et par

$$\Phi_n(z, E, \omega) = \inf_{\zeta^{(n)}\epsilon E} \{\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)})|\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

la borne inférieure du plus grand des modules $|\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)})|$, $j = 0, 1, \ldots, n$, lorsque, $z \epsilon D$ et n étant fixes, le système $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans E.

D'autre part, formons les fonctions

$$\Phi^{(j)}(z, x^{(n)}), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

correspondant au système extrémal (3) et désignons par E^* l'ensemble des points d'accumulation de la suite triangulaire

$$\begin{array}{l} x_0^{(1)}, \ x_1^{(1)}, \\ x_0^{(2)}, \ x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \\ x_0^{(3)}, \ x_1^{(3)}, \ x_2^{(3)}, \ x_3^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

²) La démonstration de ce fait dans le cas général (où la fonction ω est quelconque) n'est pas publiée, mais on sait que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)}, \omega)} = v(E, \omega)$.

Il est clair que l'ensemble E^* est fermé et contenu dans E et que parmi les fonctions (9) la condition (5) fait distinguer $\Phi^{(0)}(z, x^{(n)})$.

Nous aurons à nous appuyer sur les résultats suivants (cf. [1] et [4]):

Si $v(E, |z-\zeta|) > 0$, la suite $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z, E, \omega)}\}$ converge en tout point du domaine D

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E, \omega)} = \Phi(z, E, \omega), \quad z \epsilon D. \tag{10}$$

Pareillement la suite $\{\sqrt[n]{|\Phi^0(z, x^{(n)})|}\}$ converge dans D en dehors de l'ensemble E^* vers la même limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z, x^{(n)})|} = \Phi(z, E, \omega), \quad z \epsilon D - E^*, \tag{11}$$

la convergence (11) étant uniforme dans le voisinage de tout point $z \epsilon D - E^*$.

La limite $\Phi(z, E, \omega)$ sera dite *fonction extrémale* du domaine D par rapport à la fonction génératrice $\omega(z, \zeta)$. Le but de ce travail est d'examiner certaines propriétés de l'écart $v(E, \omega)$, de l'ensemble E^* et de la fonction extrémale $\Phi(z, E, \omega)$ et d'appliquer cette étude au problème de la représentation conforme des domaines plans.

Remarque. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure de $f(z)$ et l et L celles de $|p(z)|$ lorsque z varie dans E. Alors $l > 0$ et

$$\frac{|z-\zeta|}{L^2 e^{2M}} \leqslant \omega(z, \zeta) \leqslant \frac{|z-\zeta|}{l^2 e^{2m}},$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$\frac{v(E, |z-\zeta|)}{L^2 e^{2M}} \leqslant v(E, \omega) \leqslant \frac{v(E, |z-\zeta|)}{l^2 e^{2m}}.$$

Par suite l'écart $v(E, \omega)$ est positif, quels que soient $p(z)$ et $f(z)$, lorsque $v(E, |z-\zeta|)$ est positif.

Remarquons encore que si $p(z) \equiv 1$ et $f(z) \equiv \lambda$, où λ est une constante réelle quelconque, alors

$$v(E, \omega) = v(E, |z-\zeta|)/e^{2\lambda}.$$

2. Quelques propriétés de l'écart et de la fonction extrémale. L'écart $v(E, \omega)$ dépend des fonctions $p(z)$ et $f(z)$ et sera désigné aussi par $v(E, p, f)$. Lorsque E varie en restant fermé et borné et les fonctions p et f restent fixes, il résulte immédiatement de (4) et (6) que

$$v(E', p, f) \leqslant v(E, p, f) \quad \text{si} \quad E' \subset E.$$

Faisons maintenant varier f sans changer E et p. Je dis que:

I. *La fonctionnelle $v(E,p,f)$ varie continuement avec f; elle décroît (au sens large) lorsque f croît* [3]).

Démonstration. Il s'agit prouver qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que, si deux fonctions $f(z)$ et $\bar{f}(z)$ satisfont dans E à l'inégalité $|\bar{f}-f| < \delta$, on ait

$$(12) \qquad |v(E,p,\bar{f})-v(E,p,f)| < \varepsilon.$$

Soient $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\bar{x}^{(n)} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ deux systèmes de points extrémaux de rang n de E respectivement par rapport à $\omega(z,\zeta)$ et $\bar{\omega}(z,\zeta)$, où

$$\bar{\omega}(z,\zeta) = \frac{|z-\zeta|}{|p(z)p(\zeta)|\exp[\bar{f}(z)+\bar{f}(\zeta)]}.$$

Posons

$$\Delta f = \sum_{k=0}^{n}[\bar{f}(x_k)-f(x_k)].$$

Si $|\bar{f}(z)-f(z)| < \delta$ dans E où $\delta > 0$ est quelconque, on a $|\Delta f| \leqslant (n+1)\delta$. Mais, d'après (4), on a

$$V(\bar{x}^{(n)},\bar{\omega}) \geqslant V(x^{(n)},\bar{\omega}) = V(x^{(n)},\omega)e^{-n\Delta f}$$

donc l'inégalité $|\bar{f}(z)-f(z)| < \delta$ entraîne la suivante

$$V(\bar{x}^{(n)},\bar{\omega}) > V(x^{(n)},\omega)e^{-n(n+1)\delta}$$

d'où l'on déduit: $v(E,p,\bar{f}) > v(E,p,f)e^{-2\delta}$. Pareillement, si $|\bar{f}-f| < \delta$ sur E on a $v(E,p,f) > v(E,p,\bar{f})e^{-2\delta}$ et par suite les quantités $v = v(E,p,f)$ et $\bar{v} = v(E,p,\bar{f})$ satisfont aux inégalités

$$v(e^{-2\delta}-1) < \bar{v}-v < v(e^{2\delta}-1),$$

d'où l'on conclut que l'inégalité (12) est satisfaite lorsque $|\bar{f}-f| < \delta$ et δ est suffisamment petit.

Pour terminer la démonstration considérons l'indentité

$$V(\zeta^{(n)},\bar{\omega}) = V(\zeta^{(n)},\omega)e^{-n\Delta f}, \qquad \text{où} \qquad \Delta f = \sum_{k=0}^{n}[\bar{f}(\zeta_k)-f(\zeta_k)].$$

Si $\bar{f} \geqslant f$ en tout point de E, on a $\Delta f \geqslant 0$ et par suite $V(\zeta^{(n)},\bar{\omega}) \leqslant V(\zeta^{(n)},\omega)$, ce qui entraîne l'inégalité $v(E,\bar{\omega}) \leqslant v(E,\omega)$.

[3]) C'est-à-dire lorsque $f(z)$ ne diminue en aucun point de E.

La fonction extrémale $\Phi(z,E,\omega)$ sera aussi désignée par $\Phi(z,E,p,f)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

$$(13) \qquad \Phi(z,E',p,f) \geqslant \Phi(z,E,p,f) \quad \text{si} \quad E' \subset E\ ^{4)},$$

$$(14) \qquad \Phi(z,E,p,f) \leqslant e^{f(z)} \quad \text{pour} \quad z \in E,$$

$$(15) \qquad \Phi(z,E,p,f) \geqslant le^{m}/|p(z)| \quad \text{pour} \quad z \in D,$$

où l'on a posé $l = \min_{z\in E}|p(z)|$, $m = \min_{z\in E} f(z)$.

En effet, l'inégalité (13) résulte immédiatement de (8) et (10). Pour prouver (14) remplaçons dans le système extrémal (3) le point $x_j^{(n)}$ par un point quelconque $z \in E$ et désignons le système obtenu par $\bar{x}^{(n)}$. D'après (4) on a

$$V(\bar{x}^{(n)},\omega) \leqslant V(x^{(n)},\omega)$$

et cette inégalité entraîne immédiatement la suivante

$$|\Phi^{(j)}(z,x^{(n)})| \leqslant e^{nf(z)}, \qquad j = 0,1,\ldots,n,$$

et comme, d'après (8),

$$\Phi_n(z,E,\omega) \leqslant \sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z,x^{(n)})|$$

on voit que $\Phi_n(z,E,\omega) \leqslant (n+1)e^{nf(z)}$, $z \in E$, ce qui entraîne l'inégalité (14).

Soit $\xi^{(n)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ un système de points de E pour lequel $\Phi_n(z,E,\omega) = \max_{(j)}|\Phi^{(j)}(z,\xi^{(n)})|$. Il résulte de la formule (7) que

$$\max_{(j)}|\Phi^{(j)}(z,\xi^{(n)})| \geqslant \left(\max_{(j)}|L^{(j)}(z,\xi^{(n)})|\right)\frac{(le^{m})^{n}}{|p(z)|^{n}}$$

et comme $\sum_{j=0}^{n}L^{(j)}(z,\xi^{(n)}) = 1$ on a, quel que soit z,

$$\max_{(j)}|L^{(j)}(z,\xi^{(n)})| \geqslant 1/(n+1)$$

et par suite

$$\sqrt[n]{\Phi_n(z,E,\omega)} \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\cdot\frac{le^{m}}{|p(z)|}$$

ce qui entraîne l'inégalité (15).

Soit z_0 un point de l'ensemble E. Nous dirons que E jouit en z_0 de la *propriété* W, si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que, pour toute suite de polynômes $\{P_n(z)\}$ de degré $\leqslant n$, uniformément bornés dans E,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|P_n(z)|} < 1+\varepsilon$$

[4]) On suppose que E' est fermé, comme E, et que le diamètre transfini $v(E', |z-\zeta|)$ est positif, ce qui assure l'existence de la fonction extrémale $\Phi(z,E',\omega)$.

dans le voisinage $|z-z_0| < \delta$. On sait que E jouit de la propriété W en tout point d'un continu quelconque $C \subset E$ et n'en jouit pas en des points isolés de celui-ci.

D'après (15) la fonction $\Phi(z, E, p, f)$ est positive en tout point du domaine D et, les fonctions $\Phi^{(0)}(z, x^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$ étant analytiques dans D et la convergence (11) étant uniforme, il résulte de (11) que la fonction $\log \Phi(z, E, p, f)$ est harmonique dans $D-E^*$. Sur E^* elle jouit des propriétés suivantes:

II. *La fonction $\Phi(z, E, p, f)$ reste bornée dans le voisinage de tout point $z_0 \epsilon E^*$, admet en z_0 la valeur*

$$\Phi(z_0, E, p, f) = e^{f(z_0)}$$

et, si l'ensemble E jouit en z_0 de la propriété W, $\Phi(z, E, p, f)$ reste continue en ce point.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème IV que j'ai donnée dans mon travail [4].

Désignons par $D_\infty(E)$ le plus grand domaine non borné contenu dans l'ensemble complémentaire de E et supposons que les fonctions $p(z)$ et $f(z)$ soient constantes $p(z) \equiv 1$, $f(z) \equiv 0$. Alors le domaine D est le plan entier, la fonction $\log \Phi(z, E, 1, 0)$ est harmonique partout en dehors de E^* et s'annule sur E^*. Comme

$$\Phi^{(0)}(z, x^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-x_k^{(n)}}{x_0^{(n)}-x_k^{(n)}}$$

la différence $\log \Phi(z, E, 1, 0) - \log |z|$ tend d'après (11) vers une limite finie lorsque $|z| \to \infty$. D'autre part, on déduit du principe de maximum que les points extrémaux sont situés sur la frontière F du domaine $D_\infty(E)$ et que E^* couvre F tout entier [5]). Par conséquent [2] $\log \Phi(z, E, 1, 0)$ est la fonction de Green du domaine $D_\infty(E)$ de pôle à l'infini. En dehors de ce domaine la fonction $\log \Phi(z, E, 1, 0)$ est identiquement nulle.

3. Fonctions analytiques liées à la fonction extrémale $\Phi(z, E, \omega)$. Soit Π le plan entier. La différence $\Pi - E^*$ est une somme de domaines disjoints dont un et un seul est non borné. Désignons ce dernier domaine par $D_\infty = D_\infty(E^*)$ et les autres (s'ils existent) par $D_1, D_2, \ldots$; on aura

$$\Pi - E^* = D_\infty + D_1 + D_2 + \ldots$$

[5]) Si un point z_0 de F n'appartenait pas à E^*, la fonction $\log \Phi(z, E, 1, 0)$ serait harmonique en z_0 et y atteindrait son minimum 0 — ce qui est impossible.

Pareillement la différence $D-E^*$ est une somme de domaines dont un et un seul est contenu dans chaque D_k. Désignons le domaine partiel de $D-E^*$ contenu dans D_k par Δ_k; on aura

(16) $$D-E^* = \Delta_\infty + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots$$

Choisissons dans chaque domaine Δ_k un point fixe quelconque a_k et désignons par $\varphi_n(z, \Delta_k)$, $k = \infty, 1, 2, \ldots$, la fonction analytique définie dans Δ_k par la formule

(17) $$\varphi_n(z, \Delta_k) = e^{i\Theta_n} \sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z, x^{(n)})}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où la branche du radical et le nombre réel Θ_n sont choisis de manière que la valeur de $\varphi_n(z, \Delta_k)$ au point $z = a_k$ soit positive $\varphi_n(a_k, \Delta_k) > 0$.

Il résulte de (11) que la suite (17) converge au point $z = a_k$ et que la suite des modules $|\varphi_n(z, \Delta_k)|$ converge dans le domaine Δ_k vers $\Phi(z, E, \omega)$, d'où l'on conclut que:

III. *La suite (17), où $k = \infty, 1, 2, \ldots$ est fixé, converge dans le domaine Δ_k vers une fonction*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z, \Delta_k) = \varphi(z, \Delta_k)$$

analytique dans Δ_k de module

$$|\varphi(z, \Delta_k)| = \Phi(z, E, \omega), \qquad z \epsilon \Delta_k,$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point $z \epsilon \Delta_k$.

La fonction $\varphi(z, \Delta_k)$ sera aussi désignée, plus précisément, par

$$\varphi(z, \Delta_k, p, f), \qquad k = \infty, 1, 2, \ldots$$

Il est clair que cette fonction peut être uniforme ou multiforme dans le domaine Δ_k, mais son module est toujours uniforme.

La frontière de l'ensemble ouvert (16) est la somme de la frontière F_1 de l'ensemble fermé E^* et de la frontière F_2 du domaine D. L'allure des fonctions $\varphi(z, \Delta_k)$, $k = \infty, 1, 2, \ldots$ dans le voisinage de F_1 est caractérisée par le théorème II et, dans le voisinage de F_2, par le suivant:

IV. *Le produit $\varphi(z, \Delta_k) p(z)$, où $k = \infty, 1, 2, \ldots$, est prolongeable analytiquement au domaine D_k et reste borné dans D_k si $k \neq \infty$, tandis que le produit $\varphi(z, \Delta_\infty) p(z)$ prolongé à D_∞ n'est pas borné dans le voisinage du seul point $z = \infty$ et admet dans ce voisinage un développement de la forme*

(18) $$\varphi(z, \Delta_\infty) p(z) = \gamma_{-1} z + \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \ldots,$$

où le coefficient γ_{-1} est différent de zéro.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture désignons le système extrémal (3) $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et posons

(19) $$w(x^{(n)}) = |(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)|^{1/n} |p(x_0) e^{f(x_0)}|^{-1}.$$

D'après la formule (7) on a

$$\Phi^{(0)}(x^{(n)},\omega)=\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{z-x_k}{x_0-x_k}\Big)\Big[\frac{p(x_0)\,e^{f(x_0)}}{p(z)}\Big]^n, \tag{20}$$

donc, d'après (17),

$$\varphi_n(z,\Delta_k)p(z)=\frac{e^{i\theta}}{w(x^{(n)})}\sqrt[n]{(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_n)},\qquad n=1,2,\dots \tag{21}$$

où Θ_n' est un nombre réel convenablement choisi et $k=\infty,1,2,\dots$

Les membres gauches des identités (21) convergent dans le domaine Δ_k vers $\varphi(z,\Delta_k)\,p(z)$ et les membres droits sont uniformément bornés dans chaque domaine borné, car les termes de la suite $\{w(x^{(n)})\}$ sont plus grands qu'un nombre positif[6]). Il s'ensuit que la fonction $\varphi(z,\Delta_k)p(z)$ se prolonge analytiquement au domaine $D_k\supset\Delta_k$ car, quel que soit n, le membre droit de (21) est une fonction analytique dans D_k. La fonction prolongée $\varphi(z,\Delta_k)p(z)$ reste bornée dans D_k si $k=1,2,\dots$, car les domaines $D_1, D_2,\dots$ sont bornés.

Soit R un nombre positif assez grand pour que le cercle $|z|\leqslant R$ contienne l'ensemble E. Dans le domaine Δ_∞ on a identiquement

$$\frac{\varphi_n(z,\Delta_\infty)p(z)}{z}=\frac{e^{i\theta'_n}}{w(x^{(n)})}\sqrt[n]{\Big(1-\frac{x_1}{z}\Big)\Big(1-\frac{x_2}{z}\Big)\dots\Big(1-\frac{x_n}{z}\Big)}, \tag{22}$$

$$n=1,2,\dots$$

Le second membre de cette identité est analytique et uniformément borné dans le domaine D_∞ et, comme il converge dans $\Delta_\infty\subset D_\infty$, la convergence a lieu dans le domaine D_∞, ce qui prouve que la fonction $\varphi(z,\Delta_\infty)p(z)$ se prolonge au domaine D_∞. D'autre part, quel que soit n, le second membre de (22) est développable dans le domaine $|z|>R$ en une série de la forme

$$\gamma_{-1}^{(n)}+\frac{\gamma_0^{(n)}}{z}+\frac{\gamma_1^{(n)}}{z^2}+\dots,\qquad\text{où}\qquad |\gamma_{-1}^{(n)}|=\frac{1}{w(x^{(n)})},$$

et comme la suite de ces séries converge uniformément dans le domaine $|z|>R$ vers $\varphi(z,\Delta_\infty)p(z)/z$, les suites des coefficients $\{\gamma_k^{(n)}\}$ convergent vers des limites déterminées

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_k^{(n)}=\gamma_k,\qquad k=-1,0,1,\dots$$

[6]) Car $w(x^{(n)})=\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)}\,[\prod_{k=1}^{n}|p(x_k)\,e^{f(x_k)}|]^{1/n}\geqslant le^m\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)}$ et $\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)}\to v(E,\omega)>0$.

et la fonction prolongée $\varphi(z,\Delta_\infty)p(z)$ se développe en la série (18), où

$$|\gamma_{-1}|=\lim_{n\to\infty}[1/w(x^{(n)})]. \tag{23}$$

Le coefficient γ_{-1} est différent de zéro, car, d'après (2) et (19), on a

$$w(x^{(n)})=\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)}\Big(\prod_{k=1}^{n}|p(x_k)|\,e^{f(x_k)}\Big)^{1/n} \tag{24}$$

et par suite

$$le^m\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)}\leqslant w(x^{(n)})\leqslant Le^M\sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)},\omega)},$$

où l et L sont les bornes inférieure et supérieure de $|p(z)|$, et m et M celles de $f(z)$ dans l'ensemble E.

Remarque 1. La fonction $\Phi(z,E,w)$ a été définie par la formule (10) dans le domaine d'existence D de la fonction $p(z)$. Convenons de désigner par le symbole

$$|\Phi(z,E,\omega)p(z)| \tag{25}$$

la fonction définie en dehors de D par la formule

$$|\Phi(z,E,\omega)p(z)|=|\varphi(z,\Delta_k)p(z)|\quad\text{si}\quad z\in D_k,\quad k=\infty,1,2,\dots$$

Grâce à cette convention la fonction (25) est définie dans le plan entier et il suit de ce qui précède que son logarithme est une fonction harmonique en dehors de E^*, admettant à l'infini un pôle simple, car

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|\Phi(z,E,\omega)p(z)|}{|z|}=|\gamma_{-1}|. \tag{26}$$

Remarque 2. Si $p(z)\equiv 1$ les domaines Δ_∞ et D_∞ sont identiques. Si, de plus, $f(z)\equiv 0$ et le domaine D_∞ est simplement connexe, la fonction $w=\varphi(z,\Delta_\infty)$ effectue la représentation conforme de D_∞ sur le cercle $|w|>1$ de manière que les points $z=\infty$ et $w=\infty$ se correspondent, car $\varphi(z,\Delta_\infty)$ est uniforme dans D_∞, admet à l'infini un pôle simple et son module tend vers 1 lorsque z tend vers la frontière de D_∞.

4. Nouvelles limites liées aux points extrémaux. Soit $x^{(n)}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ un système de points extrémaux de rang n de E. Désignons par $V(x^{(n)})$ le produit

$$V(x^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|x_j-x_k|, \tag{27}$$

par $v(x^{(n)})$ et $u(x^{(n)})$ les moyennes

$$v(x^{(n)})=[V(x^{(n)})]^{2/n(n+1)},\qquad n=1,2,\dots,$$

$$u(x^{(n)})=\Big(\prod_{k=1}^{n}|p(x_k)\,e^{f(x_k)}|\Big)^{1/n},\qquad n=1,2,\dots$$

et par $P(z, x^{(n)})$ le polynôme

(28) $$P(z, x^{(n)}) = (z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_n).$$

Je dis que:

V. *Les moyennes* $u(x^{(n)})$ *et* $v(x^{(n)})$ *convergent vers des limites déterminées*

(29) $$\lim_{n\to\infty} u(x^{(n)}) = u(E, \omega), \qquad \lim_{n\to\infty} v(x^{(n)}) = v_0(E, \omega).$$

Pareillement la suite $\{\sqrt[n]{|P(z, x^{(n)})|}\}$ *converge en tout point du plan n'appartenant pas à l'ensemble* E^*

(30) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(z, x^{(n)})|} = P(z, E, \omega),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point n'appartenant pas à E^*.

Démonstration. D'après (23) la limite

$$\lim_{n\to\infty} w(x^{(n)}) = w(E, \omega) = 1/|\gamma_{-1}|$$

existe et il suit de (24) que $u(x^{(n)}) = w(x^{(n)}) : \sqrt[n]{\Lambda_0(x^{(n)}, \omega)}$, donc la première des limites (29) existe et on a

$$w(E, \omega) = v(E, \omega) u(E, \omega).$$

Remarquons maintenant que, d'après (1) et (27),

(31) $$V(x^{(n)}, \omega) = V(x^{(n)}) \Big(\prod_{k=0}^{n} |p(x_k) e^{f(x_k)}| \Big)^{-n},$$

d'où l'on déduit la relation

$$v(x^{(n)}) = [V(x^{(n)}, \omega)]^{2/n(n+1)} [u(x^{(n)})]^{2n^2/n(n+1)} |p(x_0) e^{f(x_0)}|^{2/(n+1)}$$

dont le second membre converge vers $v(E, \omega)[u(E, \omega)]^2$; donc la seconde des limites (29) existe et on a

$$v_0(E, \omega) = v(E, \omega)[u(E, \omega)]^2.$$

D'autre part, les formules (17) et (21) donnent

$$\sqrt[n]{|P(z, x^{(n)})|} = \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z, x^{(n)})|}\, |p(z)| w(x^{(n)})$$

d'où l'on déduit l'existence de la limite (30) et la relation

$$P(z, E, \omega) = |\Phi(z, E, \omega) p(z)| w(E, \omega).$$

Supposons maintenant que E soit la somme de deux ensembles disjoints fermés E_1 et E_2

$$E = E_1 + E_2$$

et que parmi les points extrémaux (26) $\mu = \mu(n)$ points $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ soient situés sur E_1 et les points $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_n$ sur E_2. Posons $n-\mu = \nu = \nu(n)$ et désignons par E_i^* la partie de E^* située dans E_i, $i = 1, 2$. Nous allons démontrer le théorème:

VI. Les suites $\{\mu(n)/n\}$ et $\{\nu(n)/n\}$ *convergent vers des limites déterminées*

(32) $$\lim_{n\to\infty} [\mu(n)/n] = a_1(E, \omega) = a_1, \qquad \lim_{n\to\infty} [\nu(n)/n] = a_2(E, \omega) = a_2$$

où $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$ *et* $a_1 + a_2 = 1$.

Démonstration. Le cas où $\mu(n) = 0$ ou $\nu(n) = 0$ pour tout n suffisamment grand n'exige pas de démonstration. Posons dans le cas général

(33) $$\varphi_n(z) = \sqrt[\mu]{|(z-x_1)\dots(z-x_\mu)|}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

(34) $$\psi_n(z) = \sqrt[\nu]{|(z-x_{\mu+1})\dots(z-x_n)|}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

et soit $\varphi_n(z) = 1$ si $\mu = 0$ et $\psi_n(z) = 1$ si $\nu = 0$. D'après (28) on a identiquement en dehors de E

(35) $$[\varphi_n(z)]^{\mu/n} [\psi_n(z)]^{\nu/n} = \sqrt[n]{|P(z, x^{(n)})|}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Si la suite $\mu_n = \mu(n)/n$, $n = 1, 2, \dots$ n'était pas convergente, elle contiendrait deux suites partielles $\{\mu_{m_k}\}$ et $\{\mu_{n_k}\}$ tendant vers deux limites différentes $\mu_{m_k} \to a$ et $\mu_{n_k} \to \bar{a} \neq a$. La suite $\{\varphi_n(z)\}$ est uniformément bornée dans tout domaine borné et, comme chaque $\varphi_n(z)$ est le module d'une fonction analytique en dehors des points du système $x^{(n)}$ situés dans E_1, chacune des suites $\{\varphi_{m_k}(z)\}$ et $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ contient une suite partielle uniformément convergente[7]) en dehors de E_1^*. Pareillement chacune des suites $\{\psi_{m_k}(z)\}$ et $\{\psi_{n_k}(z)\}$ contient une suite partielle uniformément convergente en dehors de E_2^*. En changeant convenablement les suites $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ on peut supposer l'existence en dehors de E_1^*, des limites

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{m_k}(z) = \varphi(z), \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(z) = \bar{\varphi}(z)$$

et, en dehors de E_2^*, des limites

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{m_k}(z) = \psi(z), \qquad \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(z) = \bar{\psi}(z)$$

[7]) La convergence est uniforme dans le voisinage de tout point non situé dans E_1^*.

et, comme le second membre de (35) converge en dehors de E^*, on a identiquement

$$\varphi(z)^{a}\psi(z)^{1-a} = \bar{\varphi}(z)\;\bar{\psi}(z)^{1-\bar{a}}$$

et par suite

(36) $$\bar{a}\log\bar{\varphi}(z)-a\log\varphi(z) = (1-a)\log\psi(z)-(1-\bar{a})\log\bar{\psi}(z).$$

Les fonctions $\log\bar{\varphi}(z)$ et $\log\varphi(z)$ sont harmoniques en dehors de E_1^* et admettent des pôles d'ordre 1 à l'infini, donc le premier membre de (36) est une fonction harmonique en dehors de E_1^* admettant à l'infini un pôle d'ordre $\bar{a}-a$. D'autre part, le second membre de (36) est harmonique en dehors de E_2^* et par suite il est harmonique sur E_1^*. On en conclut que le premier membre de (36) est harmonique dans le plan ouvert tout entier et tend vers ∞ si $\bar{a} > a$ ou vers $-\infty$ si $\bar{a} < a$. Mais cette conclusion reste en contradiction avec le principe d'extremum. Par suite, on doit avoir $a = \bar{a}$, ce qui prouve que les limites (32) existent et $a_1+a_2 = 1$.

Remarquons que si $a = \bar{a}$ l'égalité (36) prend la forme

$$a[\log\bar{\varphi}(z)-\log\varphi(z)] = (1-a)[\log\psi(z)-\log\bar{\psi}(z)]$$

d'où l'on conclut, par un raisonnement analogue au précédent, que les fonctions $\varphi(z)$ et $\bar{\varphi}(z)$ sont identiques. Pareillement les fonctions $\psi(z)$ est $\bar{\psi}(z)$ doivent être identiques et par suite:

VII. *Les suites* (33) *et* (34) *sont convergentes la première en dehors de* E_1^* *et la seconde en dehors de* E_2^* *et si l'on pose*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z) = \varphi(z), \qquad \lim_{n\to\infty}\psi_n(z) = \psi(z)$$

on a, en dehors de E^*, *la relation*

$$\varphi(z)^{a}\psi(z)^{1-a} = P(z, E, \omega).$$

Les théorèmes VI et VII peuvent être généralisés au cas où E est la somme de $p \geqslant 2$ ensembles fermés disjoints

$$E = E_1+E_2+\ldots+E_p$$

et $v(E_k, |z-\zeta|) > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$. Désignons par $\mu_k = \mu_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, le nombre des points extrémaux du système $x^{(n)}$ qui sont situés sur E_k et soient

$$x_{n_{k-1}+1},\; x_{n_{k-1}+2},\; \ldots,\; x_{n_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

où $n_0 = -1$, $n_k = \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$ pour $k=1, 2, \ldots, p$, les points situés sur E_k. Posons

$$\varphi_{n,k}(z) = \sqrt[\mu_k]{|(z-x_{n_{k-1}+1})(z-x_{n_{k-1}+2})\ldots(z-n_k)|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

si $\mu_k > 0$ et $\varphi_{n,k}(z) = 1$ si $\mu_k = 0$.

Alors, comme dans le cas $p = 2$, les limites

$$\lim_{n\to\infty}[\mu_k(n)/n] = a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

existent et on a $a_1+a_2+\ldots+a_p = 1$. Pareillement en dehors de l'ensemble $E_k^* = E_k E^*$ la limite

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n,k}(z) = \varphi_k(z), \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

existe et on a identiquement en dehors de E^*

$$\varphi_1(z)^{a_1}\varphi_2(z)^{a_2}\ldots\varphi_p(z)^{a_p} = P(z, E, \omega).$$

Les nombres a_k et les fonctions $\varphi_k(z)$ dépendent manifestement de l'ensemble E et de la fonction génératrice ω.

Faisons varier la fonction $f(z)$ sans faire varier l'ensemble E et la fonction $p(z)$. La position des points extrémaux (26) dans E dépend évidemment de n et de $f(z)$. Pour indiquer cette dépendance nous désignerons le système $x^{(n)}$ plus exactement par

$$x^{(n,f)} = \{x_0^{(n,f)}, x_1^{(n,f)}, \ldots, x_n^{(n,f)}\}.$$

Je dis que:

VIII. *Lorsqu'on ajoute à* $f(z)$ *une constante quelconque* c *chaque système extremal* $x^{(n,f)}$ *reste un système extrémal* $x^{(n,f+c)}$.

En effet, désignons le produit $V(\zeta^{(n)}, \omega)$ par $V(\zeta^{(n)}, p, f)$. D'après la formule (31) on a identiquement

$$V(\zeta^{(n)}, p, f+c) = e^{-n(n+1)c}\,V(\zeta^{(n)}, p, f)$$

et si $\max\limits_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}, p, f) = V(x^{(n)}, p, f)$ on a

$$\max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}, p, f+c) = e^{-n(n+1)c}\,V(x^{(n)}, p, f) = V(x^{(n)}, p, f+c)$$

ce qui prouve notre thèse.

5. Distribution des points extrémaux dans quelques cas particuliers. Supposons que $p(z) \equiv 1$, que E soit la somme d'un nombre fini p continus disjoints $F_1, F_2, \ldots, F_p$ (fig. 1)

(37) $$E = F_1+F_2+\ldots+F_p$$

et que $f(z)$ se réduise sur chaque F_k à une constante λ_k,

$$f(z) = \lambda_k \quad \text{si} \quad z\in F_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

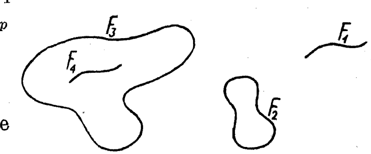

Fig. 1

Une telle fonction sera dite *fonction en escalier*. Supposons encore que chaque F_k se réduise à la frontière du domaine $D_\infty(F_k)$.

Alors le domaine D est le plan entier, la fonction

$$\log \Phi(z, E, 1, f) \tag{38}$$

est harmonique partout en dehors de E^* et du point $z = \infty$, reste continue dans E^* et admet la valeur λ_k aux points de l'ensemble

$$F_k^* = E^* F_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

À l'infini $\log \Phi(z, E, 1, f)$ a un pôle d'ordre 1. D'après (19) et (20)

$$w(x^{(n)}) = \sqrt[n]{\Delta_0(x^{(n)}, \omega)}\, e^{h_n} \qquad \text{où} \qquad h_n = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \tag{39}$$

et on a vu que les limites

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h, \qquad \lim_{h\to\infty} w(x^{(n)}) = v(E, 1, f)\, e^h \tag{40}$$

existent et que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z, E, 1, f)}{|z|} = \frac{1}{v(E, 1, f)\, e^h}.$$

Nous allons examiner la répartition de l'ensemble E^* sur les continus $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Pour cela désignons par $G(z, F_k)$ la fonction de Green du domaine $D_\infty(F_k)$ de pôle à l'infini. On a vu dans le numére 2 que $G(z, F_k) = \log \Phi(z, F_k, 1, 0)$ d'où il suit que

$$\log \Phi(z, F_k, 1, f) = G(z, F_k) + \lambda_k.$$

IX. *Si $\lambda_1 < \min(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p)$ la partie F_1 de E est entièrement couverte par E^*, c'est-à-dire $F_1^* = F_1$. Pareillement $F_1^* = F_1$ si $\lambda_1 \leqslant \min(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p)$ et F_1 est situé sur la frontière du domaine $D_\infty(E)$* [8].

Démonstration. D'après (14) la fonction (38) satisfait sur F_1 à l'inégalité $\log \Phi(z, E, 1, f) \leqslant \lambda_1$ et d'après (15) elle satisfait partout à la suivante: $\log \Phi(z, E, 1, f) \geqslant \lambda_1$. Si un point z_0 de F_1 n'appartenait pas à F_1^* la fonction (38) serait harmonique en ce point et y atteindrait son minimum $= \lambda_1$ sans être constante dans le voisinage de z_0, ce qui reste en contradiction avec le principe du minimum.

Pour prouver que la fonction (38) n'est pas constante dans le voisinage de z_0 désignons par Δ le domaine partiel de $\Pi - E^*$ contenant z_0. Si Δ est borné la frontière de Δ contient des points appartenant à l'ensemble $F_2^* + F_3^* + \ldots + F_p^*$ et en ces points $\log \Phi(z, E, 1, f) > \lambda_1$ car alors $\lambda_1 < \min(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p)$. D'autre part, si Δ n'est pas borné la fonction (38) n'est pas constante dans Δ, car elle tend vers l'infini avec z.

[8]) Si le continu F_1 ne se réduit pas à la frontière du domaine $D_\infty(F_1)$, par exemple s'il possède des points intérieurs, le théorème reste vrai lorsqu'on remplace, dans son énoncé, F_1 par la frontière de $D_\infty(F_1)$.

X. *Si pour toutes les valeurs de $k > 1$*

$$\lambda_k > \lambda_1 + \max_{z \in F_k} G(z, F_1), \qquad k = 2, 3, \ldots, p, \tag{41}$$

l'ensemble E^* se réduit à F_1 et par suite l'ensemble $\sum_{k=2}^{p} F_k^*$ est vide; si pour au moins une valeur de k

$$\lambda_k < \lambda_1 + \max_{z \in F_k} G(z, F_1) \tag{42}$$

l'ensemble $\sum_{k=2}^{p} F_k^*$ n'est pas vide.

Démonstration. 1° Supposons que les inégalités (41) soient satisfaites. Alors $E^* \supset F_1$ d'après le théorème IX. Posons $\sum_{k=2}^{p} F_k^* = A + B$ où A est la partie de $\sum_{k=2}^{p} F_k^*$ située dans le domaine $D_\infty(F_1)$ et $B = \sum_{k=2}^{p} F_k^* - A$. La différence

$$r(z) = \log \Phi(z, E, 1, f) - G(z, F_1) \tag{43}$$

est harmonique dans le domaine $D_\infty(F_1) - A$, le point à l'infini y compris, et continue sur la frontière $F_1 + A$ de ce domaine. Comme $F_1^* = F^*$ on a $r(z) = \lambda_1$ sur F_1. D'après (39) et (40) $h_n \geqslant \lambda_1$ car $\lambda_k \geqslant \lambda_1$ et par suite $h \geqslant \lambda_1$. D'autre part

$$v(E, 1, f) \geqslant v(F_1, 1, f) = v(F_1, |z-\zeta|)\, e^{-2\lambda_1}$$

donc

$$1/[v(E, 1, f)\, e^h] \leqslant e^{\lambda_1}/v(F_1, |z-\zeta|)$$

et comme la valeur de $r(z)$ à l'infini

$$r(\infty) = \log \frac{1}{v(E, 1, f)\, e^h} - \log \frac{1}{v(F_1, |z-\zeta|)}$$

on a $r(\infty) \leqslant \lambda_1$.

Il s'ensuit que l'ensemble A doit être vide, car dans le cas contraire on aurait sur la partie F_k^* de A

$$r(z) = \lambda_k - G(z, F_1) \geqslant \lambda_k - \max_{z \in F_k} G(z, F_1) > \lambda_1$$

ce qui est impossible d'après le principe du minimum, vu l'inégalité $r(\infty) \leqslant \lambda_1$. D'autre part, l'ensemble B est aussi vide car, d'après le principe du maximum, tous les points extrémaux sont situés sur F_1. Par suite E^* se réduit à F_1.

2° Supposons maintenant que l'inégalité (42) soit satisfaite pour $k = a$ et soit z_0 un point de F_a en lequel $G(z_0, F_1) = \max\limits_{z \in F_a} G(z, F_1)$. Si l'ensemble $\sum\limits_{k=2}^{p} F_k^*$ était vide on aurait identiquement

$$\Phi(z, E, 1, f) = \Phi(z, F_1, 1, f)$$

et comme $\log\Phi(z, F_1, 1, 0) = G(z, F_1)$ et $f(z) = \lambda_1$ sur F_1 on aurait $\log\Phi(z, E, 1, f) = G(z, F_1)+\lambda_1$ et la différence (43) se réduirait à la constante λ_1, ce qui est impossible car

$$r(z_0) \leqslant \lambda_a - G(z_0, F_1) = \lambda_a - \max_{z \in F_a} G(z, F_1) < \lambda_1.$$

Le théorème est donc démontré.

Supposons maintenant que l'ensemble (37) se réduise à la frontière du domaine $D_\infty(E)$ et désignons par $G(z, E)$ la fonction de Green de ce domaine de pôle à l'infini. On sait que l'équation $G(z, E) = \mu$ où μ est un nombre positif quelconque, définit une courbe Γ_μ composée d'un seul ou de plusieurs contours $C_1, C_2, \ldots, C_q$ où $1 \leqslant q \leqslant p$ tels que chaque continu F_k est situé dans l'intérieur de l'un des contours $C_1, C_2, \ldots, C_q$ et que chaque C_k contient dans son intérieur au moins un des continus $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Les intérieurs de C_i et C_k, où $i \neq k$, sont toujours disjoints. Si la constante μ est suffisamment grande le nombre q est égal à 1 et si μ est suffisamment petite on a $q = p$, et alors chaque F_k est entouré par un et un seul des contours $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Ceci posé nous allons démontrer le théorème:

XI. *Si l'ensemble $E = F_1+F_2+\ldots+F_p$ se réduit à la frontière du domaine $D_\infty(E)$ et $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ alors à chaque $k = 2, 3, \ldots, p$ correspond un nombre $\mu_k > 0$ tel que si*

$$\lambda_k < \mu_k + \lambda_1$$

le continu F_k est entièrement couvert par F_k^* et par suite

$$\log\Phi(z, E, 1, f) = \lambda_k \quad \textit{pour} \quad z \in F_k. \tag{44}$$

Démonstration. On a vu que $F_1^* = F_1$. Soit μ_k un nombre positif tel que la courbe $G(z, E) = \mu_k$ contienne un contour C_k entourant le continu F_k et n'entourant aucun des continus $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_{k+1}, \ldots, F_p$. La différence

$$R(z) = \log\Phi(z, E, 1, f) - G(z, E)$$

est harmonique dans le domaine $D_\infty(E)$, le point $z = \infty$ y compris, et satisfait sur la frontière E de ce domaine à l'inégalité $R(z) \geqslant \lambda_1$ car d'après (15) $\log\Phi(z, E, 1, f) \geqslant \lambda_1$ sur E. Par suite $R(z) \geqslant \lambda_1$ dans $D_\infty(E)$ et

$$\log\Phi(z, E, 1, f) \geqslant \mu_k + \lambda_1 \quad \text{sur} \quad C_k.$$

Soit G_k le domaine limité par C_k et F_k^*. Le $\log\Phi(z, E, 1, f)$ est harmonique dans G_k, continu sur la fermeture de ce domaine et admet sur F_k^* la valeur λ_k et sur C_k des valeurs $\geqslant \mu_k+\lambda_1 > \lambda_k$ donc

$$\log\Phi(z, E, 1, f) > \lambda_k \quad \text{dans} \quad G_k.$$

Si un point z_0 de F_k n'appartenait pas à F_k^* il appartiendrait à G_k, ce qui est impossible d'après le principe du minimum, car sur F_k on a $\log\Phi(z, E, 1, f) \leqslant \lambda_k$. Par suite chaque point de F_k est couvert par F_k^* et l'égalité (44) est démontrée.

Corollaire. *Si l'ensemble $E = F_1+F_2+\ldots+F_p$ se réduit à la frontière du domaine $D_\infty(E)$, $f(z) = \lambda_k$ sur F_k pour $k = 1, 2, \ldots, p$ et la différence*

$$\max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) - \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$$

est suffisamment petite, l'ensemble E est entièrement couvert par E^* et $\log\Phi(z, E, 1, f)$ est égal à $f(z)$ en tout point de E.

Soit F_0 la frontière commune d'un domaine borné simplement connexe G et du domaine non borné $D_\infty(F_0)$, F_1 un ensemble fermé contenu dans G (fig. 2) et $f(z)$ la fonction égale à λ_0 sur F_0 et à λ_1 sur F_1, où λ_0 et λ_1 sont des constantes réelles quelconques. Il est clair que l'écart $v(E, 1, f)$, où $E = F_0+F_1$ n'est pas plus petit que les écarts $v(F_0, 1, f)$ et $v(F_1, 1, f)$. Je dis que:

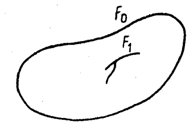

Fig. 2

XII. *Si $\lambda_0 > \lambda_1$ on a $v(E, 1, f) > v(F_0, 1, f)$ et si*

$$\lambda_0 < \lambda_1 + \log(v_0/v_1), \tag{45}$$

où $v_i = v(F_i, |z-\zeta|)$, $i = 0, 1$, on a aussi $v(E, 1, f) > v(F_1, 1, f)$.

Démonstration. Soit $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un système de points extrémaux de rang n de E par rapport à $\omega = |z-\zeta|\exp[-f(z)-f(\zeta)]$ et $\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$ un système de $n = \mu+\nu$ points de E dont les points $\eta^{(\mu)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\mu\}$ sont situés sur F_0 et les points $\eta^{(\nu-1)} = \{\eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_n\}$ sur F_1. Il est clair que $V(x^{(n)}, \omega) \geqslant V(\eta^{(n)}, \omega)$. En désignant par $V(\eta^{(n)})$ le produit

$$V(\eta^{(n)}) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} |\eta_i - \eta_k|$$

on a l'inégalité

$$V(x^{(n)}, \omega) \geqslant \frac{V(\eta^{(n)})}{\exp\{n[(\mu+1)\lambda_0+\nu\lambda_1]\}}. \tag{46}$$

Supposons que les systèmes $\eta^{(\mu)}$ et $\eta^{(\nu-1)}$ soient extrémaux respectivement sur F_0 et F_1 par rapport à la distance $|z-\zeta|$ et que les nombres μ et ν croissent avec n de manière que lorsque $n\to\infty$

$$\mu/n \to 1-\alpha, \qquad \nu/n \to \alpha,$$

où α est un nombre de l'intervalle $0<\alpha<1$. Alors les moyennes

$$v_n^{(0)} = [V(\eta^{\mu})]^{2/\mu(\mu+1)}, \qquad v_n^{(1)} = [V(\eta^{\nu-1})]^{2/\nu(\nu-1)}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$

convergent respectivement vers $v_0 = v(F_0, |z-\zeta|)$ et $v_1 = v(F_1, |z-\zeta|)$ et la suite

$$I_\mu(z) = |(z-\eta_0)(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_\mu)|^{1/(\mu+1)}$$

converge dans le domaine G vers la constante v_0, la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point de G (cf. [2]). Mais on a identiquement

$$V(\eta^{(n)}) = V(\eta^{(\mu)})\,V(\eta^{(\nu-1)})\cdot I_n^{(\mu+1)\nu}$$

où $I_n = \big[\prod_{k=\mu+1}^{n} I_\mu(\eta_k)\big]^{1/\nu} \to v_0$ lorsque $n\to\infty$ et, d'après (46)

$$[V(x^{(n)}, \omega)]^{2/n(n+1)} \geqslant v_n^{(0)\,\mu(\mu+1)/n(n+1)}\, v_n^{(1)\,\nu(\nu-1)/n(n+1)}\, I_n^{2(\mu+1)\nu/n(n+1)}\, e^{-l_n},$$

où

$$l_n = 2\left[\frac{\mu+1}{n+1}\lambda_0 + \frac{\nu}{n+1}\lambda_1\right].$$

En faisant tendre n vers l'infini on en déduit l'inégalité

$$v(E,\omega) \geqslant v_0^{(1-\alpha)^2} v_1^{\alpha^2} v_0^{2\alpha(1-\alpha)} \exp\{-2[(1-\alpha)\lambda_0+\alpha\lambda_1]\} \tag{47}$$

dont le second membre est égal à

$$(v_0/e^{2\lambda_0})[(v_1/v_0)^{\alpha} e^{2\lambda_0}/e^{2\lambda_1}]^{\alpha}$$

et comme $v(F_0, 1, f) = v_0 e^{-2\lambda_0}$ et l'expression entre parenthèses [ ] surpasse 1 si $\lambda_0 > \lambda_1$ et α est suffisamment petit on voit que $v(E, 1, f) > v(F_0, 1, f)$ si $\lambda_0 > \lambda_1$. Le second membre de (47), où l'on a remplacé $1-\alpha$ par β, prend la forme

$$(v_1/e^{2\lambda_1})[(v_0/v_1)^{2-\beta} e^{2\lambda_1}/e^{2\lambda_0}]^{\beta},$$

où l'expression entre parenthèses [ ] surpasse 1 pour $\beta = 0$ si λ_0 satisfait à l'inégalité (45). Comme $v(F_1, 1, f) = v_1 e^{2\lambda_1}$ on a $v(E, 1, f) > v(F_1, 1, f)$, si la condition (45) est remplie et par suite la thèse est démontrée.

Supposons maintenant que E soit la somme de $p+1$ continus disjoints $E = F_0+F_1+\ldots+F_p$, constituant la frontière d'un domaine borné $D(E)$ dont la frontière extérieure est F_0 et la frontière intérieure

est $F = F_1+F_2+\ldots+F_p$ (fig. 3). Supposons encore que F_0 soit en même temps la frontière du domaine $D_\infty(E)$ et que

$$f(z) = \lambda_k \quad \text{pour} \quad z\in F_k, \quad k = 0, 1, \ldots, p.$$

Formons la fonction de Green $G(z, F_0)$ du domaine $D_\infty(E)$ de pôle à l'infini, la fonction $\Phi(z, F, 1, f)$, et posons

$$M_0 = \max_{z\in F_0} \log\Phi(z, F, 1, f)$$

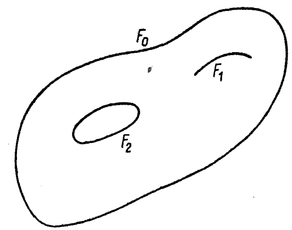

Fig. 3

XIII. 1° *Si* $\lambda_0 \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ *l'ensemble* E^* *se réduit à* F_0 *et la fonction* $\log\Phi(z, E, 1, f)$ *est égale à* $G(z, F_0)+\lambda_0$ *dans le domaine* $D_\infty(E)$ *et à* λ_0 *en dehors de ce domaine.*

2° *Si* $\lambda_0 > M_0$ *l'ensemble* F_0^* *est vide et* $\Phi(z, E, 1, f) \equiv \Phi(z, F, 1, f)$.

3° *Si* $\lambda_0 < M_0$, *l'ensemble* F_0^* *n'est pas vide.*

4° *Si* $\lambda_0 > \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$, *l'ensemble* $\sum_{k=1}^{p} F_k^*$ *n'est pas vide.*

Démonstration. 1° Soit $\lambda_0 \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$. Alors

$$V(\zeta^{(n)}, \omega) = \frac{V(\zeta^{(n)})}{\exp\{n[f(\zeta_0)+\ldots+f(\zeta_n)]\}} \leqslant \frac{V(\zeta^{(n)})}{\exp[n(n+1)\lambda_0]}$$

et par suite

$$\max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}, \omega) \leqslant \max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}) \exp[-n(n+1)\lambda_0].$$

Mais, comme d'après le principe du maximum, $\max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}) = \max_{\zeta^{(n)}\in F_0} V(\zeta^{(n)})$, on a

$$\max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}, \omega) \leqslant \max_{\zeta^{(n)}\in F_0} V(\zeta^{(n)}) e^{-n(n+1)\lambda_0} = \max_{\zeta^{(n)}\in F_0} V(\zeta^{(n)}, \omega)$$

et il est clair que

$$\max_{\zeta^{(n)}\in E} V(\zeta^{(n)}, \omega) \geqslant \max_{\zeta^{(n)}\in F_0} V(\zeta^{(n)}, \omega)$$

donc les points extrémaux sont situés sur F_0 et par suite $E^* \subset F_0$.

D'autre part, la fonction $\log\Phi(z, E, 1, f)$ est harmonique en dehors de E^* et satisfait partout à l'inégalité $\log\Phi(z, E, 1, f) \geqslant \lambda_0$ et sur F_0 à la suivante $\log\Phi(z, E, 1, f) \leqslant \lambda_0$. Si un point z_0 de F_0 n'appartenait pas à E^* la fonction serait harmonique en z_0 et y atteindrait son minimum sans être constante dans le voisinage de z_0, ce qui est impossible, donc $E^* \supset F_0$ et par suite $E^* = F_0$.

Il en résulte que $\log\Phi(z,E,1,f)=\lambda_0$ sur F_0 et en dehors du domaine $D_\infty(E)$. La différence $\log\Phi(z,E,1,f)-\lambda_0$ est égale à $G(z,F_0)$ dans $D_\infty(F_0)$, car elle s'annule sur la frontière de ce domaine et admet un pôle à l'infini.

2° Soit $\lambda_0>M_0$. Si l'ensemble F_0^* n'était pas vide on aurait aux points de F_0^*

$$\Phi(z,E,1,f)=e^{\lambda_0}>e^{M_0}\geqslant\Phi(z,F,1,f),$$

ce qui est impossible, car d'après (13) on a partout

$$\Phi(z,E,1,f)\leqslant\Phi(z,F,1,f).$$

3° Si $\lambda_0<M_0$ l'ensemble F_0^* ne peut être vide, car dans le cas contraire on aurait partout $\Phi(z,E,1,f)=\Phi(z,F,1,f)$ et, si z_0 est un point de F_0 où $\log\Phi(z_0,F,1,f)=M_0$, on a

$$\log\Phi(z_0,E,1,f)\leqslant\lambda_0<M_0=\log\Phi(z_0,F,1,f)$$

et les fonctions $\Phi(z,E,1,f)$ et $\Phi(z,F,1,f)$ ne sont pas identiques.

4° Si $\lambda_0>\min(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$, l'ensemble $\sum_{k=1}^{p}F_k^*$ n'est pas vide, car d'après le théorème IX l'ensemble F_a^* est identique à F_a, si $\lambda_a=$ $=\min(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_p)$.

6. Quelques applications. A. Soit E la somme de p continus disjoints $E=F_1+F_2+\dots+F_p$ constituant la frontière du domaine $D_\infty(E)$. On sait que $\log\Phi(z,E,1,0)$ est la fonction de Green du domaine $D_\infty(E)$ de pôle à l'infini. Désignons par $\varphi_k(z)$ la fonction égale à 1 sur F_k et à zéro sur $E-F_k$. La différence

$$\log\Phi(z,E,1,\lambda\varphi_k)-\log\Phi(z,E,1,0),$$

où λ est un paramètre réel $\neq 0$, est harmonique dans $D_\infty(E)$ le point $z=\infty$ y compris, s'annule sur $E-F_k$ et, si λ est suffisamment petit, elle est égale à λ sur F_k. Par suite, lorsque λ est suffisamment petit, l'expression

$$\frac{1}{\lambda}\log\frac{\Phi(z,E,1,\lambda\varphi_k)}{\Phi(z,E,1,0)}$$

est la mesure harmonique du continu F_k par rapport au domaine $D_\infty(E)$.

Plus généralement, soit $f(z)$ une fonction réelle continue quelconque définie sur E. Formons l'expression

$$\frac{1}{\lambda}\log\frac{\Phi(z,E,1,\lambda f)}{\Phi(z,E,1,0)}\tag{48}$$

où λ est un paramètre réel $\neq 0$. Si, pour une valeur suffisamment petite de λ, $\log\Phi(z,E,1,\lambda f)=\lambda f$ sur E (ce qui a toujours lieu lorsque $f(z)$ est une fonction en escalier), alors l'expression (48) est la solution du problème de Dirichlet pour le domaine $D_\infty(E)$ et les données frontières $f(z)$.

B. Considérons le cas particulier $p=2$, $E=F_1+F_2$ et désignons par $\varphi(z,D_\infty,1,\lambda\varphi_1)$ la fonction holomorphe dans le domaine $D_\infty(E)$ de module $\Phi(z,E,1,\lambda\varphi_1)$. Par définition, $\varphi_1(z)=1$ sur F_1 et $\varphi_1(z)=0$ sur F_2. L'expression

$$\psi(z)=\left[\frac{\varphi(z,D_\infty,1,\lambda\varphi_1)}{\varphi(z,D_\infty,1,0)}\right]^{1/\lambda}$$

est une fonction holomorphe (en général multiforme) dans le domaine doublement connexe $D_\infty(E)$ contenant le point $z=\infty$. Le module de $\psi(z)$ est continu dans $D_\infty(E)+E$ et il est égal à 1 sur F_2. Si $\lambda>0$ est suffisamment petit, on a $|\psi(z)|=e$ sur F_1.

Lorsque z parcourt un contour C_1 entourant F_1 et n'entourant pas F_2, $\psi(z)$ se multiplie par un facteur $e^{2\pi i a}$, où $0<a<1$, et par suite $\psi(z)^{1/a}$ se multiplie par $e^{2\pi i}$. Il en résulte que, lorsque z parcourt un contour C_2 entourant F_2, $\psi(z)^{1/a}$ se multiplie par $e^{-2\pi i}$, d'où l'on conclut que la fonction $w=\psi(z)^{1/a}$ effectue la représentation conforme du domaine $D_\infty(E)$ sur une couronne circulaire.

C. Considérons le cas général où $E=F_1+F_2+\dots+F_p$. Soit $x^{(n,f)}=$ $=\{x_0^{(n,f)},x_1^{(n,f)},\dots,x_n^{(n,f)}\}$ un système des points extrémaux du rang n de E par rapport à la fonction $\omega=|z-\zeta|\exp[-f(z)-f(\zeta)]$ et $\mu_k^{(n,f)}$ le nombre des points du système $x^{(n,f)}$ qui sont situés sur F_k, $k=1,2,\dots,p$. On sait que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_k^{(n,f)}}{n}=a_k(f),\qquad k=1,2,\dots,p,$$

existe et que les fonctionnelles $a_k(f)$ satisfont aux relations

$$0\leqslant a_k(f)\leqslant 1,\qquad \sum_{1}^{p}a_k(f)=1.\tag{49}$$

D'autre part, il s'ensuit du théorème VIII que, si c est une constante, on a $a_k(f+c)=a_k(f)$, $k=1,2,\dots,p$.

Supposons que $f(z)$ soit une fonction en escalier. Nous écrirons

$$f=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p),$$

si $f(z)=\lambda_k$ sur F_k, $k=1,2,\dots,p$. Les fonctionnelles $a_k(f)$ sont alors des fonctions de p variables $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ définies pour toutes les valeurs réelles de ces variables. Désignons, comme plus haut, par $G(z,F_k)$ la fonction égale dans le domaine $D_\infty(F_k)$ à la fonction de Green de ce domaine de pôle à l'infini et égale à zéro en dehors de $D_\infty(F_k)$.

XIV. *Les fonctions* $\alpha_k(f)$, $k=1,2,\ldots,p$, *jouissent des propriétés suivantes*:

1° *Si, k étant fixe quelconque,*

$$\lambda_k \leqslant \lambda_j - \max_{z\in F_j} G(z, F_k) \quad \textit{pour tout} \quad j\neq k, \quad \textit{on a} \quad \alpha_k(f)=1,$$

$$\lambda_k > \lambda_j + \max_{z\in F_k} G(z, F_j) \quad \textit{pour un} \quad j\neq k, \quad \textit{on a} \quad \alpha_k(f)=0.$$

2° *Quelles que soient* $f=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ *et* $f'=(\lambda_1',\lambda_2',\ldots,\lambda_p')$ *on a l'inégalité*

$$\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k'-\lambda_k)[\alpha_k(f')-\alpha_k(f)]\leqslant 0. \tag{50}$$

Démonstration. 1° Si $\lambda_k\leqslant\lambda_j-\max_{F_j}G(z,F_k)$ pour tout $j\neq k$, il résulte du théorème X que $E^*=E_k$ et par suite $\alpha_k(f)=1$. Supposons qu'on ait

$$\lambda_k>\lambda_a+\max_{F_k}G(z,F_a),$$

où $a\neq k$ est fixe. Si l'ensemble F_k^* n'était pas vide, on aurait en tout point $z_0\in F_k^*$

$$\lambda_k=\log\Phi(z_0,E,1,f)\leqslant\log\Phi(z_0,F_a,1,f),$$

car on a, quel que soit z, $\Phi(z,E,1,f)\leqslant\Phi(z,F_a,1,f)$ et, comme $\log\Phi(z,F_a\,1,f)=\lambda_a+G(z,F_a)$, on aurait

$$\lambda_k\leqslant\lambda_a+G(z_0,F_a)\leqslant\lambda_a+\max_{F_k}G(z,F_a),$$

ce qui reste en contradiction avec l'hypothèse. Par suite l'ensemble F_k^* est vide et $\alpha_k(f)=0$.

2° Soient $x^{(n,f)}$ et $x^{(n,f')}$ deux systèmes de points extrémaux de E correspondant respectivement à $\omega=|z-\zeta|\exp[-f(z)-f(\zeta)]$ et $\omega'=|z-\zeta|\exp[-f'(z)-f'(\zeta)]$. Alors

$$\begin{aligned}V(x^{(n,f)},\omega)&=V(x^{(n,f)})\exp\left[-n\sum\lambda_k\mu_k(n,f)\right]\\&\geqslant V(x^{(n,f')})\exp\left[-n\sum\lambda_k\mu_k(n,f')\right],\\V(x^{(n,f')},\omega')&=V(x^{(n,f')})\exp\left[-n\sum\lambda_k'\mu_k(n,f')\right]\\&\geqslant V(x^{(n,f)})\exp\left[-n\sum\lambda_k'\mu_k(n,f)\right]\end{aligned}$$

où la somme $\sum$ est étendue aux valeurs $1,2,\ldots,p$ de k. Puisque

$$[V(x^{(n,f)},\omega)]^{2/n(n+1)}\to v(E,\omega),\qquad [V(x^{(n,f)})]^{2/n(n+1)}\to v_0(E,\omega)$$

on a

$$v(E,\omega)=v_0(E,\omega)\exp\left[-2\sum\lambda_k\alpha_k(f)\right]\geqslant v_0(E,\omega')\exp\left[-2\sum\lambda_k\alpha_k(f')\right],$$

$$v(E,\omega')=v_0(E,\omega')\exp\left[-2\sum\lambda_k'\alpha_k(f')\right]\geqslant v_0(E,\omega)\exp\left[-2\sum\lambda_k'\alpha_k(f)\right]$$

d'où l'on déduit les relations

$$\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\alpha_k(f)=\frac{1}{2}\log\frac{v_0(E,\omega)}{v(E,\omega)}, \tag{51}$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k'-\lambda_k)\alpha_k(f')\leqslant\frac{1}{2}\log\frac{v(E,\omega)}{v(E,\omega')}\leqslant\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k'-\lambda_k)\alpha_k(f), \tag{52}$$

dont la dernière entraîne (50).

Remarque. Dans le cas $p=2$ on a $E=F_1+F_2$, $\alpha_1(f)=1-\alpha_2(f)$ et l'inégalité (50) se réduit, dans l'hypothèse $\lambda_1=\lambda_1'$ à la suivante

$$(\lambda_2'-\lambda_2)[\alpha_2(f')-\alpha_2(f)]\leqslant 0.$$

Il s'ensuit que lorsque $f=(\lambda_1,\lambda_2)$ croît sur F_2 sans varier sur F_1, la fonctionnelle $\alpha_2(f)$ décroît (au sens large) et on a

$$\alpha_2(f)=1 \quad \text{si} \quad \lambda_2<\lambda_1-\max_{F_1}G(z,F_2),$$

$$\alpha_2(f)=0 \quad \text{si} \quad \lambda_2>\lambda_1+\max_{F_2}G(z,F_1).$$

De (51) on tire

$$(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2(f)=-\lambda_1+\frac{1}{2}\log\frac{v_0(E,1,f)}{v(E,1,f)}$$

et on a vu que la fonctionnelle $v(E,1,f)=v(E,\omega)$ est continue par rapport à f, donc, si $v_0(E,1,f)=v_0(E,\omega)$ l'est aussi, la fonctionnelle $\alpha_2(f)$ varie continuement avec f.

Retournons au cas général où $E=F_1+F_2+\ldots+F_p$. On a vu qu'à toute fonction $f=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ correspond un système de p fonctionnelles $\alpha_1(f),\alpha_2(f),\ldots,\alpha_p(f)$ remplissant les conditions (49). Supposons que, inversement, à tout système de p nombres $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ remplissant les conditions (49), corresponde une fonction $f=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ telle que $\alpha_k=\alpha_k(f)$, $k=1,2,\ldots,p$ [9].

Considérons le système $\alpha_1(0),\alpha_2(0),\ldots,\alpha_p(0)$ et remarquons que, si $\lambda>0$ est suffisamment petit, le système

$$\alpha_1(0)+\lambda,\ \alpha_2(0)-\lambda,\ \alpha_3(0),\ \ldots,\ \alpha_p(0)$$

remplit les conditions (49). Soit $g=(l_1,l_2,\ldots,l_p)$ une fonction en escalier, définie sur E de manière que

$$\alpha_1(g)=\alpha_1(0)+\lambda,\qquad \alpha_2(g)=\alpha_2(0)-\lambda,\qquad \alpha_k(g)=\alpha_k(0),\qquad k=3,4,\ldots,p.$$

Formons la fonction

$$F(z)=[\varphi(z,D_\infty,1,g)/\varphi(z,D_\infty,1,0)]^{1/\lambda}\quad \text{où}\quad D_\infty=D_\infty(E).$$

[9]) L'existence d'une telle fonction f sera examinée dans un autre travail.

Elle est holomorphe dans le domaine D_∞, le point $z=\infty$ y compris, continue dans $D_\infty+E$ et son module sur le continu F_k est égal à $e^{l_k/\lambda}$, car

$$|\varphi(z, D_\infty, 1, g)| = e^{l_k}, \qquad |\varphi(z, D_\infty, 1, 0)| = 1 \quad \text{si} \quad z \epsilon F_k.$$

D'après ce qui précède, lorsque z parcourt une fois un contour $C_k \subset D_\infty$ entourant le continu F_k et n'entourant aucun des continus F_i, $i\neq k$, l'argument de $\varphi(z, D_\infty, 1, g)$ croit de $2\pi\alpha_k(g)$ et celui de $\varphi(z, D_\infty, 1, 0)$ augmente de $2\pi\alpha_k(0)$. Par suite, lorsque z parcout C_k, l'argument de $F(z)$

1° augmente de 2π si $k=1$,
2° diminue de 2π si $k=2$,
3° ne change pas si $k=3, 4, \ldots, p$.

Il s'ensuit que la fonction $w=F(z)$ est uniforme et univalente dans le domaine $D_\infty(E)$ et représente ce domaine sur une couronne circulaire $r<|w|<R$ pourvue de $p-2$ coupures situées sur des circonférences concentriques (une telle couronne est dite domaine canonique de Koebe).

Travaux cités

[1] J. Górski, *Sur certaines fonctions harmoniques jouissant des propriétés extrémales*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 259-271.

[2] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

[3] — *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1949), p. 35-42.

[4] — *Sur une famille de fonctions analytiques extrémales*, Ann. Soc. Pol. Math. 25 (1952), p. 1-16.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Remarks on the stability problem for parabolic equations

by W. Mlak (Kraków)*

The problem of the stability of solutions of parabolic equations has been investigated by Bellman [1], Prodi [4] and Narasimhan [3].

In the first part of this paper our considerations are based on the generalized Westphal-Prodi theorem given in [2]. In the second part we discuss the stability problem for systems of purely non-linear equations of parabolic type. We apply a theorem concerning the evaluation of solutions of parabolic equations given by J. Szarski in [5].

Part I. 1. Suppose G is an open and bounded region lying in the space E^m of points $(x_1, \ldots, x_m)$. Denote by B the Cartesian product of G and the interval $(0, \infty)$, $B = G\times(0,\infty)$. We denote the boundary of G by Γ. $\bar{B}$ denotes the closure of B.

Suppose the sequence of functions $u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t)$ is a solution of the parabolic system[1])

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = F_s\left(x, t, z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_s}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 z_s}{\partial x_i \partial x_k}\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

We say that $u=(u_1, \ldots, u_n)$ is a *stable solution* of (1) if for every $\varepsilon>0$ there exists such $\delta>0$ that for every solution $v=(v_1,\ldots,v_n)$ of (1) such that $u_i(x,t)=v_i(x,t)$ for $(x,t)\epsilon\Gamma\times\langle 0,\infty)$ $(i=1,\ldots,n)$ and $|u_i(x,0)-v_i(x,0)|<\delta$ $(i=1,\ldots,n)$ we have the inequalities $|u_i(x,t)-v_i(x,t)|<\varepsilon$, $(x,t)\epsilon B$ $(i=1,\ldots,n)$.

Now we investigate systems of the form

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = L_s[z_s]+f_s(x, t, z_1, \ldots, z_n) \qquad (s=1,2,\ldots,n), \tag{2}$$

where L_s is the elliptic differential operator of the form

$$L_s[v] = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^s(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k},$$

* I wish to express here my thanks to J. Szarski for reading the manuscript of this paper and for his valuable remarks.

[1]) On the definition of the parabolic system see [2] and [5]. Our systems are normal parabolic systems.