Sur une famille de fonctions analytiques

par Z. Opial (Kraków)

Nous allons considérer la famille C de fonctions analytiques $f(z)$ dans le cercle unité K, pour lesquelles

$$(1) \qquad \iint_K \ln^+|f(z)|\,d\sigma < +\infty \qquad (d\sigma\text{—élément d'aire})$$

où — comme d'habitude — $\ln^+ a = \max(0, \ln a)$. Nous démontrerons (théorème I) que pour chaque fonction de cette famille la série

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \{1-|a_j|\}^2$$

est convergente; nous avons désigné par a_j les zéros de la fonction $f(z)$, chacun d'eux étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Nous supposons de plus que $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$

Du théorème général sur les familles normales de fonctions analytiques, dont la démonstration sera donnée au § 2, il viendra que la famille $C(M)$ de fonctions analytiques dans le cercle unité, pour lesquelles l'intégrale (1) est bornée par la constante M, est une famille normale. Enfin, au § 3 nous donnerons la démonstration du théorème suivant: Si une suite de fonctions de la famille $C(M)$ est convergente en une suite de points de K qui convergent, mais pas trop vite, vers la circonférence du cercle unité, elle est convergente dans ce cercle tout entier.

Il est à remarquer que la famille C est essentiellement plus vaste que la famille A, introduite par A. Ostrowski et R. Nevanlinna et F. Nevanlinna, de fonctions analytiques dans le cercle unité, pour lesquelles l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\Theta \qquad (0<\varrho<1)$$

a une limite finie lorsque $\varrho \to 1$. On peut aisément donner un exemple de fonction qui appartient à la famille C sans appartenir à la famille A.

À cet effet, prenons dans le cercle unité la branche de la fonction $\sqrt{1-z}$ qui prend à l'origine la valeur 1 et posons

$$f(z) = e^{\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)^3}.$$

On a donc

$$|f(z)| = |e^{\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)^3}| \leqslant e^{\left(\frac{1}{\sqrt{|1-z|}}\right)^3}$$

et, par suite,

$$\ln^+|f(z)| \leqslant \frac{1}{|1-z|^{3/2}},$$

d'où

$$\iint_K \ln^+|f(z)|\,d\sigma \leqslant \iint_K \frac{1}{|1-z|^{3/2}}\,d\sigma < +\infty.$$

D'autre part on a

$$f(\varrho) = e^{\frac{1}{(1-\varrho)^{3/2}}}$$

ce qui est impossible[1]) pour une fonction de la famille A.

1. Théorème I. *Si la fonction $f(z)$ analytique dans le cercle unité K satisfait à la condition* (1) *alors, en désignant par $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les zéros de la fonction $f(z)$ et en comptant chacun d'eux autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, on a*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{1-|a_j|\}^2 < +\infty.$$

Démonstration. Soit dans le cercle $|z|<1$

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1}z^{\lambda+1} + \ldots \qquad (c_\lambda \neq 0)$$

et désignons par $n(\varrho)$ le nombre des zéros de cette fonction contenus dans le cercle $|z|<\varrho<1$. On a alors, d'après la formule bien connue de Jensen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\Theta = \lambda \ln\varrho + \sum_{j=1}^{n(\varrho)} \ln\frac{\varrho}{|a_j|} + \ln|c_\lambda|.$$

---

[1]) И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Москва 1950, p. 84.

En vertu de l'inégalité $\ln^+ a \geqslant \ln a$, on a

$$\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\varrho e^{i\theta})|d\Theta \geqslant \int_0^{2\pi} \ln|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\Theta.$$

En désignant donc par K_R le cercle $|z| \leqslant R < 1$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{K_R} \ln^+|f(z)|\,d\sigma = \int_0^R \varrho\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\Theta\,d\varrho$$

$$\geqslant \int_0^R \varrho\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\varrho e^{i\theta})|\,d\Theta\,d\varrho$$

$$= \int_0^R \left\{\lambda\varrho\ln\varrho + \varrho\ln|c_\lambda| + \sum_{j=1}^{n(\varrho)} \varrho\ln\frac{\varrho}{|a_j|}\right\} d\varrho$$

$$= \lambda\int_0^R \varrho\ln\varrho\,d\varrho + \ln|c_\lambda|\int_0^R \varrho\,d\varrho + \sum_{j=1}^{n(R)}\int_{|a_j|}^R \varrho\ln\frac{\varrho}{|a_j|}\,d\varrho$$

$$= \lambda\left[\frac{R^2}{2}\ln R - \frac{R^2}{4}\right] + \frac{R^2}{2}\ln|c_\lambda| +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n(R)}\left\{|a_j|^2 + R^2\ln\frac{R^2}{|a_j|^2} - R^2\right\}.$$

Il est aisé de remarquer que tous les termes ce cette dernière somme sont positifs et qu'ils convergent vers

$$|a_j|^2 + \ln\frac{1}{|a_j|^2} - 1,$$

R tendant vers 1. Faisant donc tendre R vers 1, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\iint_K \ln^+|f(z)|\,d\sigma \geqslant -\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2}\ln|c_\lambda| + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{|a_j|^2 + \ln\frac{1}{|a_j|^2} - 1\right\}.$$

La série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{|a_j|^2 + \ln\frac{1}{|a_j|^2} - 1\right\}$$

est donc convergente, d'où il s'ensuit que la série (2) est aussi convergente. En effet, en s'appuyant sur la règle de l'Hôpital, on obtient

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2 + \ln t^{-2} - 1}{(1-t)^2} = \lim_{t\to 1}\frac{2t - 2/t}{-2(1-t)} = 2,$$

ce qui montre que ces deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes.

2. Théorème II. *Si $\varphi(u)$ est une fonction réelle, non négative et continue de la variable u, définie pour $u \geqslant 0$, et telle que*

1. $\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = +\infty$,
2. *la fonction $\varphi(|f(z)|)$ est une fonction subharmonique dans le domaine D pour chaque fonction $f(z)$, analytique dans ce domaine,*

la famille $C(M)$ des fonctions $f(z)$, holomorphes dans le domaine D, pour lesquelles

$$\iint_D \varphi(|f(z)|)\,d\sigma \leqslant M \tag{3}$$

forme une famille normale dans ce domaine.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer qu'à tout point z_0 du domaine D on peut faire correspondre un voisinage de ce point, dans lequel toutes les fonctions de la famille $C(M)$ sont bornées dans leur ensemble. Choisissons r de telle manière que le cercle K_r: $|z-z_0| \leqslant r$ soit entièrement contenu dans le domaine D. Alors on a pour toute fonction de la famille $C(M)$

$$\iint_{K_r} \varphi(|f(z)|)\,d\sigma \leqslant M,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^r \varrho\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|)\,d\Theta\,d\varrho \leqslant M. \tag{4}$$

La fonction $\varphi(|f(z)|)$ étant subharmonique, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|)\,d\Theta$$

est une fonction non décroissante de la variable ϱ; on a donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\tfrac{2}{3}re^{i\theta})|)\,d\Theta \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|)\,d\Theta \tag{5}$$

pour $\frac{2}{3}r \leqslant \varrho \leqslant r$. De l'inégalité (4) et (5) on obtient

$$\tfrac{1}{3}r\cdot\tfrac{2}{3}r\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\tfrac{2}{3}re^{i\theta})|)\,d\Theta = \int_{2r/3}^r \tfrac{2}{3}r\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\tfrac{2}{3}re^{i\theta})|)\,d\Theta\,d\varrho$$

$$\leqslant \int_{2r/3}^r \varrho\int_0^{2\pi} \varphi(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|)\,d\Theta\,d\varrho \leqslant M,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \int_0^{2\pi} \varphi\left(|f(z_0+\tfrac{2}{3}re^{i\theta})|\right)d\Theta \leqslant \frac{9M}{2r^2}.$$

D'autre part, en appliquant le principe de la majorante harmonique[2]) on a, pour tout point z du cercle $|z_0-z| \leqslant \frac{1}{3}r$, l'inégalité

$$(7)\qquad \varphi\left(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(|f(z_0+\tfrac{2}{3}re^{i\alpha})|\right)\frac{(\frac{2}{3}r)^2-\varrho^2}{(\frac{2}{3}r)^2+\varrho^2-2\frac{2}{3}r\varrho\cos(\Theta-\alpha)}\,d\alpha.$$

On peut aisément trouver la valeur maxima du noyau de Poisson pour $\varrho \leqslant \frac{1}{3}r$. On a notamment

$$(8)\qquad \frac{(\frac{2}{3}r)^2-\varrho^2}{(\frac{2}{3}r)^2+\varrho^2-2\frac{2}{3}r\varrho\cos(\Theta-\alpha)} \leqslant \frac{(\frac{2}{3}r)^2-\varrho^2}{(\frac{2}{3}r-\varrho)^2} = \frac{\frac{2}{3}r+\varrho}{\frac{2}{3}r-\varrho} \leqslant \frac{r}{\frac{1}{3}r} = 3.$$

La fonction $\varphi(u)$ étant positive, les inégalités (6) et (7) donnent pour $\varrho \leqslant \frac{1}{3}r$

$$(9)\qquad \varphi\left(|f(z_0+\varrho e^{i\theta})|\right) \leqslant \frac{27M}{4\pi r^2}.$$

De l'inégalité (9), il résulte, en vertu de l'hypothèse

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = \infty$$

l'existence d'une constante T, telle que $|f(z_0+\varrho e^{i\theta})| \leqslant T$. Prenant, en particulier, $\varphi(u) = \ln^+ u$, $D = K$ on obtiendra le

THÉORÈME III. *La famille de fonctions analytiques dans le cercle unité K satisfaisant à l'inégalité*

$$\iint_K \ln^+|f(z)|\,d\sigma \leqslant M$$

est normale.

3. THÉORÈME IV. *Si la suite $f_1(z), f_2(z), \ldots$ de fonctions analytiques dans le cercle unité K, satisfaisant à l'inégalité*

$$(10)\qquad \iint_K \ln^+|f_n(z)|\,d\sigma \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge en une suite $a_1, a_2, \ldots$ de points tels que

$$(11)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\{1-|a_j|\}^2 = +\infty,$$

la suite converge presque uniformément dans le cercle K.

[2]) Op. cit., p. 38.

Pour la démonstration par l'impossible admettons le contraire. La suite de fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots$ formant — en vertu du théorème III — une famille normale, on peut en extraire, tout à fait comme dans la démonstration classique du théorème de Vitali, deux suites partielles $f_{\alpha_1}(z), f_{\alpha_2}(z), \ldots, f_{\beta_1}(z), f_{\beta_2}(z), \ldots$ qui convergent presque uniformément dans K vers deux fonctions différentes $f(z)$ et $g(z)$. Alors la fonction $h(z) = f(z)-g(z)$ a des zéros aux points $a_1, a_2, \ldots$ De l'inégalité

$$\ln^+|a-b| \leqslant \ln^+\{|a|+|b|\} \leqslant \ln 2+\ln^+|a|+\ln^+|b|$$

on obtient dans le cercle K_R: $|z| \leqslant R < 1$

$$\iint_{K_R}\ln^+|h(z)|\,d\sigma = \iint_{K_R}\ln^+|f(z)-g(z)|\,d\sigma$$

$$\leqslant \iint_{K_R}\ln 2\,d\sigma+\iint_{K_R}\ln^+|f(z)|\,d\sigma+\iint_{K_R}\ln^+|g(z)|\,d\sigma.$$

Mais

$$\iint_{K_R}\ln^+|f(z)|\,d\sigma = \lim_{k\to\infty}\iint_{K_R}\ln^+|f_{\alpha_k}(z)|\,d\sigma$$

d'où, en vertu de (10),

$$\iint_{K_R}\ln^+|f(z)|\,d\sigma \leqslant M.$$

Pareillement

$$\iint_{K_R}\ln^+|g(z)|\,d\sigma \leqslant M.$$

On a donc

$$\iint_{K_R}\ln^+|h(z)|\,d\sigma \leqslant \pi R^2\ln 2+2M.$$

Faisant tendre R vers l'unité on obtiendra

$$\iint_K \ln^+|h(z)|\,d\sigma \leqslant \pi\ln 2+2\mathrm{M}.$$

En désignant par $b_1, b_2, \ldots$ les zéros de la fonction $h(z)$, on obtient, en vertu du théorème I,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{1-|b_i|\}^2 < +\infty.$$

Évidemment la même circonstance aura lieu pour toute suite partielle de la suite $b_1, b_2, \ldots$ et, en particulier, pour la suite $a_1, a_2, \ldots$ ce qui contredit (11).

COROLLAIRE I. *Si une fonction $f(z)$ de la famille C s'annule pour une suite de points $a_1, a_2, \ldots$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{1-|a_j|\}^2 = +\infty$$

elle est identiquement nulle.

COROLLAIRE II. *Si une suite de fonctions pour lesquelles on a l'inégalité* (10) *converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur au cercle unité, la suite converge presque uniformément dans l'intérieur de ce cercle.*

Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme

par F. LEJA (Kraków)

1. Introduction. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan, D un domaine quelconque contenant E, $p(z)$ une fonction holomorphe dans D ne s'annulant pas dans ce domaine[1]) et $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue dans E.

Désignons par $\omega(z, \zeta)$ l'expression

$$\omega(z, \zeta) = \frac{|z-\zeta|}{|p(z)p(\zeta)| \exp[f(z)+f(\zeta)]},$$

par $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de E, par $V(\zeta^{(n)}, \omega)$ et $\Delta_j(\zeta^{(n)}, \omega)$ les produits

$$(1) \qquad V(\zeta^{(n)}, \omega) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k),$$

$$(2) \qquad \Delta_j(\zeta^{(n)}, \omega) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \omega(\zeta_j, \zeta_k), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

et soit $V_n(E, \omega)$ la borne supérieure de $V(\zeta^{(n)}, \omega)$, lorsque les points du système $\zeta^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. D'autre part, soit

$$(3) \qquad x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$$

un système de points de E pour lequel

$$(4) \qquad V(x^{(n)}, \omega) = V_n(E, \omega) = \sup_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)}, \omega).$$

Les indices inférieurs des points $x_j^{(n)}$ peuvent toujours être choisis de manière qu'on ait

$$(5) \qquad \Delta_0(x^{(n)}, \omega) \leqslant \Delta_1(x^{(n)}, \omega) \leqslant \ldots \leqslant \Delta_n(x^{(n)}, \omega).$$

Les points du sytème (3) remplissant les conditions (4) et (5) sont dits *points extrémaux* de rang n de E par rapport à la fonction $\omega(z, \zeta)$, dite *fonction génératrice* ou *distance généralisée* des points z et ζ.

---

[1]) La fonction $p(z)$ peut être multiforme lorsque D est multiplement connexe, mais nous supposerons que son module $|p(z)|$ est uniforme.