Sur les zéros d'un polynôme contenant un paramètre arbitraire

par W. Jankowski (Poznań)

§ 1. M. Biernacki a déterminé[1]) la limite exacte, indépendante du coefficient a, de p zéros du polynôme

$$P(z)+aQ(z), \tag{1}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré p dont tous les zéros sont contenus dans un cercle donné $|z|\leqslant P$, et $Q(z)$ est un polynôme de degré q $(q>p)$ dont tous les zéros sont contenus dans un cercle $|z|\leqslant Q$.

Nous allons étudier le cas où les domaines qui contiennent tous les zéros des polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ sont des cercles non concentriques. On a les théorèmes suivants:

I. *Si $P(z)$ est un polynôme de degré p dont tous les zéros sont contenus dans le cercle $|z-c_1|\leqslant P$, et $Q(z)$ un polynôme de degré $q(q>p)$ dont tous les zéros sont contenus dans le cercle $|z-c_2|\leqslant Q$, et si c_0 est un nombre arbitraire, le polynôme* (1) *a au moins p zéros dans le cercle*

$$|z-c_0|\leqslant\max\left\{\frac{pQ+qP}{q-p}+\frac{p|c_2-c_0|+q|c_1-c_0|}{q-p},\ Q+|c_2-c_0|\right\}\text{[2])}.$$

II. *Si le point c_0 appartient au segment $\langle c_1,c_2\rangle$, alors*

1° *si*

$$P\leqslant\frac{q-2p}{q}Q-d+\frac{2|c_2-c_0|(q-p)}{q},\qquad \text{où}\qquad d=|c_2-c_1|,$$

le polynôme (1) *a toujours p zéros dans le cercle $|z-c_0|\leqslant Q+|c_2-c_0|$ et cette limite est atteinte lorsque p zéros du polynôme $Q(z)$ se trouvent réunis au point $c_2+Qe^{i\varphi}$, où $\varphi=\arg\overline{c_1c_2}$.*

[1]) M. Biernacki, *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires* (Bulletin de l'Acad. polon. des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques, série A, 1927, p. 541-685).

[2]) Si $c_0=c_1=c_2$ on obtient la limite de M. Biernacki.

2° *Si*

$$P>\frac{q-2p}{q}Q-d+\frac{2|c_2-c_0|(q-p)}{q},$$

le polynôme (1) *a toujours p zéros dans le cercle*

$$|z-c_0|\leqslant\frac{pQ+q(P+d)}{q-p}-|c_2-c_0|.$$

La limite est atteinte pour le polynôme

$$(z-c_1+Pe^{i\varphi})^p+(-1)^{p+q+1}\frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q-p}{P+Q+d}e^{-i\varphi}\right)^{q-p}(z-c_2-Qe^{i\varphi})^q,$$

où $\varphi=\arg\overline{c_1c_2}$.

§ 2. Démonstration de l'énoncé I. Si w_i est un zéro du polynôme $f(w+c_0)$, où c_0 est un nombre constant, alors $z_i=w_i+c_0$ est un zéro du polynôme $f(z)$ que l'on obtient en posant $w=z-c_0$ dans le polynôme $f(w+c_0)$. Nous pouvons donc supposer dans notre problème que le point c_0 est l'origine.

Considérons un cercle $|z|\leqslant R$ contenant tous les zéros des polynômes $P(z)$ et $Q(z)$. Pour cela supposons que

$$R\geqslant\max\{|c_1|+P,\ |c_2|+Q\} \tag{2}$$

(nous avons pris $c_0=0$).

Nous écrivons le polynôme (1) sous la forme

$$Q(z)\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}+a\right\}. \tag{1'}$$

Nous allons déterminer le nombre R satisfaisant à la condition (2), de sorte que, lorsque $z=Re^{i\vartheta}$ décrit la circonférence $|z|=R$ dans le sens positif, l'argument de l'expression $P(z)/Q(z)$ diminue d'une façon monotone, c'est-à-dire que

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}\leqslant 0\text{[3])}. \tag{3}$$

[3]) $\dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}=\dfrac{d}{d\vartheta}\mathfrak{I}\{\log f(z)\}=\mathfrak{I}\left\{\dfrac{f'(z)}{f(z)}iz\right\}=\mathfrak{R}\left\{z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right\}.$

En désignant par u_k $(k=1,2,\ldots,p)$ les zéros du polynôme $P(z)$ et par v_k $(k=1,2,\ldots,q)$ les zéros du polynôme $Q(z)$ nous pouvons écrire

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\prod\limits_1^p(z-u_k)}{\prod\limits_1^q(z-v_k)},\quad \text{où}\quad |u_k-c_1|\leqslant P,\quad |v_k-c_2|\leqslant Q.$$

L'inégalité (3) est vérifiée lorsque

$$\max\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}$$

est négatif ou nul. Nous allons donc évaluer

$$\max\sum_1^p\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}\quad \text{et}\quad \min\sum_1^q\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-v_k)\}.$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}=\Re\left\{\frac{z}{z-u_k}\right\}=\Re\left\{\frac{Re^{i\vartheta}}{Re^{i\vartheta}-r_ke^{i\alpha_k}}\right\}$$

$$=\Re\left\{\frac{Re^{i\vartheta}(Re^{-i\vartheta}-r_ke^{-i\alpha_k})}{|Re^{i\vartheta}-r_ke^{i\alpha_k}|^2}\right\}$$

$$=\frac{R^2-r_kR\cos(\vartheta-\alpha_k)}{R^2+r_k^2-2r_kR\cos(\vartheta-\alpha_k)},\quad \text{où}\quad r_k=|u_k|,\quad \alpha_k=\arg u_k.$$

Cette expression aura une valeur extremum lorsque $\vartheta-\alpha_k=0$ ou π.

Si $\vartheta-\alpha_k=0$, on a

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}=\frac{R}{R-r_k};$$

si $\vartheta-\alpha_k=\pi$, on a

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}=\frac{R}{R+r_k}.$$

$$\max\sum_1^p\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}=\sum_1^p\max\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}$$

$$=\sum_1^p\frac{R}{R-r_k}\leqslant\sum_1^p\frac{R}{R-|c_1|-P}=\frac{pR}{R-|c_1|-P},$$

$$\min\sum_1^q\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-v_k)\}=\sum_1^q\min\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-v_k)\}$$

$$=\sum_1^q\frac{R}{R+r_k}\geqslant\sum_1^q\frac{R}{R+|c_2|+Q}=\frac{qR}{R+|c_2|+Q},$$

$$\max\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}\leqslant\max\sum_1^p\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-u_k)\}-\min\sum_1^q\frac{d}{d\vartheta}\{\arg(z-v_k)\}$$

$$\leqslant\frac{pR}{R-|c_1|-P}-\frac{qR}{R+|c_2|+Q}.$$

L'inégalité (3) est donc vérifiée si

$$\frac{pR}{R-|c_1|-P}-\frac{qR}{R+|c_2|+Q}\leqslant 0.$$

Cette dernière inégalité sera vraie si

$$R\geqslant\frac{pQ+qP}{q-p}+\frac{p|c_2|+q|c_1|}{q-p}. \tag{4}$$

La limite donnée par l'inégalité (4),

$$R=\frac{pQ+qP}{q-p}+\frac{p|c_2|+q|c_1|}{q-p},$$

remplit la première des conditions définies par l'inégalité (2)

$$\frac{pQ+qP}{q-p}+\frac{p|c_2|+q|c_1|}{q-p}>|c_1|+P,$$

car $p(P+Q+|c_1|+|c_2|)>0$.

Si z décrit la circonférence $|z|=R$, où

$$R=\max\left\{\frac{pQ+qP}{q-p}+\frac{p|c_2|+q|c_1|}{q-p},\ |c_2|+Q\right\}, \tag{5}$$

dans le sens positif, $\arg\big(P(z)/Q(z)\big)$ diminue d'une façon monotone et la variation de cet argument est $-2\pi(q-p)$, c'est-à-dire que l'image de la circonférence $|z|=R$ dans la transformation réalisée par la fonction $P(z)/Q(z)$ entoure l'origine $q-p$ fois dans le sens négatif. L'image de la circonférence $|z|=R$ dans la transformation réalisée par la fonction $P(z)/Q(z)$ entoure un point arbitraire $-a$ au plus $q-p$ fois dans le sens négatif.

Ainsi, en passant au polynôme de la forme (1') nous trouvons que, lorsque z décrit la circonférence $|z| = R$ dans le sens positif, la variation de l'argument de l'expression $P(z)/Q(z)+a$ est égale ou supérieure à $-2\pi(q-p)$. En même temps l'argument de $Q(z)$ croît jusqu'à la valeur $2\pi q$. L'argument de l'expression (1') croît donc au moins jusqu'à la valeur $2\pi q - 2\pi(q-p) = 2\pi p$, c'est-à-dire que le polynôme (1) a au moins p zéros dans le cercle $|z| \leqslant R$.

§ 3. Pour obtenir le cercle le plus petit possible contenant toujours p zéros du polynôme (1) lorsque c_1 et c_2 sont constants nous allons étudier le cas particulier où le point c_0 appartient au segment $\langle c_1, c_2\rangle$.

Si w_i est un zéro du polynôme $f[w+c_0)e^{i\varphi}]$ où c_0 et φ sont constants, alors $z_i = (w_i+c_0)e^{i\varphi}$ est un zéro du polynôme $f(z)$ obtenu en posant $w = ze^{-i\varphi}-c_0$ dans le polynôme $f[(w+c_0)e^{i\varphi}]$. En choisissant en particulier $\varphi = \arg\overline{c_1c_2}$ nous pouvons nous borner à étudier le cas où l'axe réel passe par les points c_1 et c_2 et l'origine se trouve au point c_0, qui appartient à l'intervalle fermé $\langle c_1, c_2\rangle$.

La condition (4) devient alors

$$R \geqslant \frac{pQ+q(P+d)}{q-p} - c_2, \quad \text{où} \quad d = c_2 - c_1. \tag{4'}$$

Nous distinguerons deux cas:

I. Si

$$Q \geqslant \frac{q(P+d)+pQ}{q-p} - 2c_2,$$

c'est-à-dire si

$$P \leqslant \frac{q-2p}{q} Q - d + \frac{2c_2(q-p)}{q},$$

c'est le nombre $Q+c_2$ qui est la limite exacte atteinte lorsque p zéros du polynôme $Q(z)$ se trouvent réunis au point c_2+Q et $a=\infty$.

II. Il reste à prouver que si

$$Q < \frac{q(P+d)+pQ}{q-p} - 2c_2,$$

c'est-à-dire si

$$P > \frac{q-2p}{q} Q - d + \frac{2c_2(q-p)}{q},$$

la limite

$$\frac{q(P+d)+pQ}{q-p} - c_2,$$

où c_2 appartient à l'intervalle $(0, d)$, peut être atteinte. Il résulte de la démonstration que cela a lieu lorsque tous les zéros u_k du polynôme $P(z)$ se réunissent en un point de la circonférence $|z-c_1| = P$ et tous les zéros v_k du polynôme $Q(z)$ se réunissent en un point de la circonférence $|z-c_2| = Q$, et lorsque les modules des nombres u_k et v_k prennent leur valeur maximum (fig. 1) (on suppose que $\vartheta = \pi$). Nous pouvons donc nous borner à considérer l'équation

$$(z-c_1+P)^p + a(z-c_2-Q)^q = 0. \tag{6}$$

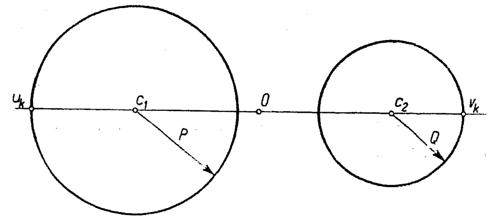

Fig. 1

Nous allons prouver que la limite ne peut être atteinte que pour une seule valeur du coefficient a et que la racine de module maximum est en même temps une racine double de cette équation. Pour cela considérons le système de courbes

$$\frac{|z+P-c_1|^p}{|z-Q-c_2|^q} = a \qquad (a = \text{const}).$$

Pour une valeur donnée du coefficient a les racines de l'équation (6) sont situées sur l'une des courbes du système

$$\frac{|z+P-c_1|^p}{|z-Q-c_2|^q} = a.$$

En posant $z = re^{i\vartheta}$ et $L = r^2+|P-c_1|^2+2r|P-c_1|\cos\vartheta$, $M = r^2+ +|c_2+Q|^2-2r|c_2+Q|\cos\vartheta$, on peut écrire l'équation du système de courbes sous la forme

$$S(r, \vartheta) \equiv L^p - a^2 M^q = 0.$$

Les extrema des rayons-vecteurs de cette courbe satisfont aux équations $S(r, \vartheta) = 0$ et $\partial S/\partial\vartheta = 0$. En éliminant a^2 nous obtenons

$$\begin{vmatrix} p\dfrac{\partial L}{\partial\vartheta} & q\dfrac{\partial M}{\partial\vartheta} \\ L & M \end{vmatrix} = 0,$$

d'où $r\sin\vartheta[pM|P-c_1|+qL|c_2+Q|] = 0$.

L'expression entre crochets est positive. Les extrema des rayons-vecteurs satisfont donc à l'équation $\sin\vartheta = 0$, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur l'axe réel. Nous obtiendrons les points doubles des courbes $S(r, \vartheta) = 0$ en éliminant a entre l'équation (6) et sa dérivée,

$$(z-c_1+P)^p + a(z-c_2-Q)^q = 0,$$
$$p(z-c_1+P)^{p-1} + aq(z-c_2-Q)^{q-1} = 0,$$

d'où

$$z = \frac{-q(-c_1+P)+p(-c_2-Q)}{q-p} = -\left(\frac{q(P+d)+pQ}{q-p} - c_2\right),$$

où $0 \leqslant c_2 \leqslant d$.

Il n'existe qu'une seule courbe ayant un point double; nous la désignerons par Γ (fig. 2).

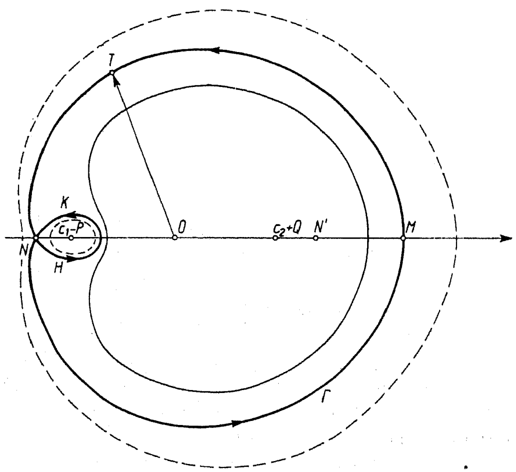

Fig. 2

Lorsque z croît de $-P+c_1$ à $Q+c_2$, le rapport

$$\frac{|z+P-c_1|^p}{|z-Q-c_2|^q} = a$$

croît constamment; une courbe quelconque du système coupe donc le segment $(-P+c_1, Q+c_2)$ en un point au plus.

Posons $z = t+Q+c_2$, $|t+P+Q+d|^p - a|t|^q = 0$. Dans l'intervalle $(0, \infty)$ l'équation $-at^q+(t+P+Q+d)^p = 0$ a toujours une seule racine réelle. Il en résulte qu'une courbe quelconque coupe le segment $(Q+c_2, \infty)$ en un seul point.

Posons $z = t-P+c_1$, $|t|^p - a|t-P-Q-d|^q = 0$. Dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ l'équation $|t|^p - a|t-P-Q-d|^q = 0$ a 0 ou 2 racines réelles, car l'équation $-a(t+P+Q+d)^q \pm t^p = 0$ a 2 ou 0 racines réelles dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Donc une courbe quelconque coupe le segment $(-\infty, c_1-P)$ en 0 ou en 2 points.

On vérifie aisément que $R = ON < OM$ (fig. 2). En effet, soit N' le point symétrique de N par rapport à l'origine. On peut supposer que $ON' > Q+c_2$. La valeur du rapport a au point N est $|R-P+c_1|^p/|R+Q+c_2|^q$ sa valeur au point N' est $|R+P-c_1|^p/|R-Q-c_2|^q$, elle est donc supérieure à la précédente. Ainsi le point N' est plus près de $Q+c_2$ que M. Il en résulte que lorsque le point T décrit la courbe Γ du point N au point M, le rayon-vecteur croît constamment. Si l'on donne au paramètre a la valeur a_0 qui correspond au point double N on aura

$$\left[-\frac{q(P+d)+pQ}{q-p}+c_2-c_1+P\right]^p + a_0\left[-\frac{q(P+d)+pQ}{q-p}-Q\right]^q = 0,$$

d'où

$$a_0 = (-1)^{p+q+1}\frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q-p}{P+Q+d}\right)^{q-p},$$

$$(z-c_1+P)^p + (-1)^{p+q+1}\frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q-p}{P+Q+d}\right)^{q-p}(z-c_2-Q)^q = 0. \tag{7}$$

Toutes les racines de l'équation (7) se trouvent sur la courbe Γ. La variation de l'argument de $(z+P-c_1)^p/(z-Q-c_2)^q$ est $2\pi p$, lorsque z décrit l'arc $NHKN$ de la courbe Γ dans le sens de la flèche. Le rayon OT varie d'une façon monotone lorsque T décrit Γ en ne passant pas par l'axe réel. L'équation (7) a donc $p-1$ racines de module inférieur à R, une racine double de module R, alors que les modules des autres racines sont supérieurs à R. C'est d'ailleurs (si l'on ne tient pas compte des rotations autour de l'origine) la seule équation du type $P(z)+aQ(z) = 0$ pour laquelle le maximum du module de p zéros soit atteint.