Sur quelques invariants dans les espaces à connexion affine à trois dimensions

par A. Haimovici (Jassy)

Dans quelques Notes publiées les dernières années, nous avons étudié les espaces à connexion affine qui admettent pour un système de deux directions, des invariants au transport parallèle de ces directions. Un de ces invariants a été l'angle [1, 2, 3]. Dans la Note présente, nous nous proposons l'étude d'un problème analogue: il s'agit de trouver les invariants au transport parallèle d'un système de plusieurs directions dans un espace à connexion affine à trois dimensions. Nous avons trouvé effectivement ces invariants; en même temps, nous avons donné une caractérisation géométrique des espaces qui les admettent.

§ 1. Soit S_3 un espace à connexion affine à trois dimensions, dont

$$\Gamma_{ij}^k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

sont les coefficients de la connexion, de manière que le vecteur $X^i + dX^i$ issu du point $M'(x^i + dx^i)$ correspondant par parallélisme au vecteur X^i, issu du point $M(x^i)$ soit donné par

$$dX^i + \Gamma_{jk}^i X^j dx^k = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Soit $f(x^i; X_{(a)}^i)$ une fonction du point x^i et de p directions X^i ($i = 1, 2, 3$; $a = 1, 2, \ldots, p$); pour que cette fonction dépende des directions des p vecteurs, et pour que — en même temps — elle soit invariante au transport parallèle des vecteurs $X_{(a)}^i$, il faut qu'elle satisfasse aux conditions

$$X_{(a)}^i \frac{\partial f}{\partial X_{(a)}^i} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, p;\ \text{ne pas sommer d'après } a), \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^h X_{(a)}^j \frac{\partial f}{\partial X_{(a)}^h} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ a = 1, 2, \ldots, p). \tag{3}$$

L'étude de ces équations donnera les invariants cherchés. Les conséquences différentielles tirées de (2) et (3) sont:

$$R_{i\,hk}^j X_{(a)}^i \frac{\partial f}{\partial X_{(a)}^j} = 0, \tag{4_1}$$

$$R_{i\,hk,r}^j X_{(a)}^i \frac{\partial f}{\partial X_{(a)}^j} = 0, \tag{4_2}$$

. . . .

$$(R_{i\,hk}^m R_{m\,pq}^j - R_{i\,pq}^m R_{m\,hk}^j) X_{(a)}^i \frac{\partial f}{\partial X_{(a)}^j} = 0, \tag{$4_1'$}$$

. . . .

Remarquons que les équations $(4_1), (4_2), \ldots, (4_1')$ et celle obtenue du système (2) en ajoutant membre à membre toutes ces équations, sont du type

$$a_{(m)j}^i \varphi^j \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 3p), \tag{5}$$

$a_{(m)j}^i$ étant des coefficients indépendants de φ^i.

Si l'on désigne par B^m la matrice $\|a_{(m)j}^i\|$, on constate que B^m a la forme

$$B^m = \left\| \begin{matrix} A^m & 0 & \ldots \\ 0 & A^m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|, \tag{6}$$

A^m étant des matrices carrées à trois lignes et trois colonnes. Parmi ces matrices il y a aussi la matrice I (unité), obtenue de (2). On voit aisément que les conséquences différentielles de (5) sont du même type, les matrices de ces nouvelles équations ayant la forme générale $A^i A^j - A^j A^i$.

À une combinaison linéaire entre les équations (5), correspond une combinaison des mêmes coefficients entre les matrices A^m et réciproquement.

§ 2. Il est évident que parmi les matrices A^m il peut exister neuf au plus, linéairement indépendantes. Dans ce cas on aura $9+p-1$ équations (2) et (4). La fonction f devra dépendre de 5 directions $X_{(a)}^i$ au moins. Par des combinaisons linéaires, on pourra faire de manière que chacune des matrices A^m ait un seul élément différent de zéro. Si l'on désigne cette fois par X^i, Y^i, Z^i, U^i, V^i les cinq vecteurs, l'intégrale générale du système sera fonction de

$$I = \frac{(XUV)}{(YUV)} : \frac{(XZV)}{(YZV)}, \qquad J = \frac{(XYZ)}{(VYZ)} : \frac{(XUZ)}{(VUZ)}. \tag{I}$$

Ces expressions seront les invariants cherchés. Leur interprétation est immédiate.

Le cas où parmi les matrices (6) il y a moins de neuf linéairement indépendantes peut être simplifié, en appliquant d'abord une transformation linéaire $S = ||s_i^j||$ sur les X^i, Y^i, ..., qui amène une des matrices A^i à la forme canonique de Jordan, ce que revient, au point de vue géométrique, à adopter un repère local pour les vecteurs; par diverses combinaisons linéaires entre les A^i, on peut faire ensuite de manière que l'on ait:

$$\begin{aligned} A^1A^2 - A^2A^1 &= \alpha_1 A^1, \\ A^1A^3 - A^3A^1 &= \alpha_2 A^1 + \beta_2 A^2, \\ A^1A^4 - A^4A^1 &= \alpha_3 A^1 + \beta_3 A^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

La matrice A^1 est nilpotente [4].

Le cas où il y a huit matrices B^m linéairement indépendantes est impossible. S'il y a sept matrices linéairement indépendantes, alors l'espace admet deux invariants attachés à quatre directions, invariants qui dans un certain système de coordonnées sont ou bien

$$I = \frac{(XZU)}{(YZU)} : \frac{X^3}{Y^3}, \qquad J = \frac{(XYU)}{(YZU)} : \frac{X^3}{Z^3}; \tag{II}$$

dans le même système de coordonnées on a $\Gamma_{1i}^3 = \Gamma_{2i}^3 = 0$ et l'espace admet une famille de plans parallèles; ou bien

$$I = \frac{(XZU)}{(YZU)} : \frac{U^3X^2 - U^2X^3}{U^3Y^2 - U^2Y^3}, \qquad J = \frac{(XZU)}{(YZU)} : \frac{Z^3X^2 - Z^2X^3}{Z^3Y^2 - Z^2Y^3}; \tag{III}$$

on a alors $\Gamma_{1i}^3 = \Gamma_{1i}^2 = 0$, et l'espace admet un champ de directions parallèles.

S'il y a six matrices A^m linéairement indépendantes, l'espace admet un invariant attaché à trois directions:

$$I = \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}, \tag{IV}$$

dans un certain système de coordonnées; on a aussi dans ce système $\Gamma_{1i}^k = \Gamma_{2i}^3 = 0$; l'espace admet une famille uniparamétrique de plans parallèles, et aussi un champ de directions parallèles, situées dans les plans tangents aux variétés de plus haut.

Enfin s'il y a cinq matrices A^m linéairement indépendantes, l'espace admet deux invariants de trois directions. Il y a alors quatre cas à remarquer:

(a) Les invariants sont:

$$I = \frac{X^2}{X^3} : \frac{Z^2}{Z^3}, \qquad J = \frac{Y^2}{Y^3} : \frac{Z^2}{Z^3}, \tag{V}$$

dans un système de coordonnées où l'on a $\Gamma_{1i}^2 = \Gamma_{1i}^3 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{2i}^3 = 0$. L'espace admet deux champs de directions planes parallèles, et un champ de directions parallèles, intersections des plans de plus haut.

(b) Les invariants sont:

$$I = \frac{X^2Z^1 - X^1Z^2}{Y^2Z^1 - Y^1Z^2} : \frac{X^2}{Y^2}, \qquad J = \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^2}{Y^2}, \tag{VI}$$

dans un système de coordonnées où l'on a $\Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{1i}^2 = \Gamma_{1i}^3 = 0$. L'espace admet deux champs de directions parallèles.

(c) Les invariants sont:

$$I = \frac{(XYZ)}{X^3(Y^2Z^3 - Y^3Z^2)}\, e^{\int(\Gamma_{1i}^1 - \Gamma_{2i}^2)\,dx^i}, \qquad J = \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}, \tag{VII}$$

dans le système de coordonnées déterminé par $\Gamma_{1i}^3 = \Gamma_{2i}^3 = \Gamma_{1i}^2 = 0$, $R_{1\,ij}^1 = 0$. L'espace admet une famille uniparamétrique de plans parallèles et un champ de directions parallèles situées dans ces plans.

(d) Les invariants sont

$$I = \frac{(XYZ)Z^3}{(Y^2Z^3 - Y^3Z^2)(X^2Z^3 - X^3Z^2)}, \qquad J = \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}, \tag{VIII}$$

dans un système de coordonnées qui diffère du précédent par la condition $R_{1\,ij}^1 = R_{2\,ij}^2$ qui remplace la condition $R_{1\,ij}^1 = 0$.

Les cas où il y a un nombre moindre de matrices a été étudié à une autre occasion [3].

Travaux cités

[1] A. Haimovici, *Spații cu metrică unghiulară, I*, Comunicările Academiei Republicii Populare Romîne I (1951), p. 157.

[2] — *Spații cu metrică unghiulară, II*, Studii și cercetări științifice, Academia Republicii Populare Romîne, Filiala Iași, II (1951), p. 66.

[3] — *Asupra unor invarianți în spații cu conexiune afină*, Buletin Științific Secțiunea de Științe mat. și fiz. 7 (1955), p. 595-622.

[4] — *Observații asupra sistemelor de ecuații cu derivate parțiale liniare cu coeficienți liniari*, Revista Universității „Al. I Cuza" și a Institutului Politehnic din Iași, II (1955), p. 5-23.