Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson

par M. Krzyżański (Kraków)

Introduction

1. Il est bien connu que, la fonction $\varphi(s)$ étant mesurable (au sens de Lebesgue) et bornée pour $-\infty < s < +\infty$, l'intégrale de Fourier--Poisson

$$I(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] ds$$

constitue, pour $t > 0$, une solution de l'équation de la chaleur

(1) $$u''_{xx} = u'_t$$

et qu'elle satisfait à la condition initiale

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0}} I(x,t) = \varphi(x_0)$$

toutes les fois que la fonction $\varphi(s)$ est continue au point $s = x_0$ [1]). Si la fonction $\varphi(s)$ est continue et bornée pour $-\infty < s < +\infty$, la fonction $I(x,t)$ est continue pour $t \geqslant 0$ (à condition d'admettre qu'aux points $(x, 0)$ de l'axe $t = 0$ elle prend la valeur $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to x\\ t\to 0}} I(\bar{x}, t)$) et elle satisfait à la condition initiale $I(x,0) = \varphi(x)$.

Si la fonction $\varphi(s)$ est mesurable et bornée pour $s \geqslant 0$, la fonction

(2) $$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(s) \left\{\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]\right\} ds$$

est continue et satisfait à l'équation (1) pour $t > 0$. Cette fonction se comporte de même que l'intégrale $I(x,t)$ pour $x \to x_0$, $t \to 0$, si $x_0 > 0$. Elle satisfait en outre à la condition aux limites $u(0,t) = 0$ pour $t > 0$. Si

[1]) Voir par exemple [1], chap. XXIX, p. 294, [3], p. 220-226. La fonction $\varphi(s)$ étant bornée, on n'introduit pas de difficultés dans la démonstration de ce théorème, si l'on admet qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue.

la fonction $\varphi(s)$ est continue et bornée pour $s \geqslant 0$ et s'annule pour $s = 0$, la fonction $u(x,t)$ est continue pour $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et constitue une solution du premier problème de Fourier pour l'équation (1), avec la condition initiale

(3) $$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0$$

et la condition aux limites

(4) $$u(0,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

2. Pour résoudre le problème de Fourier avec la condition initiale (3) et la condition aux limites

(5) $$u(0,t) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

$\psi(t)$ étant une fonction continue pour $t \geqslant 0$ et s'annulant pour $t = 0$, on introduit une intégrale analogue aux potentiels (newtonien, logarithmique) de double couche, à savoir

$$J_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \psi(\tau)\, d\tau;$$

nous appelerons cette intégrale — potentiel de chaleur de seconde espèce. Elle est continue pour $x \neq 0$, $t \geqslant 0$ et satisfait à l'équation (1) pour $x \neq 0$, $t > 0$. Il est évident que l'on a

(6) $$J_1(0,t) = 0,$$

tandis qu'on démontre que ([1], p. 306 et [3], p. 471)

(7) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to t_0}} J_1(x,t)(\operatorname{sgn} x) = \psi(t_0) \quad \text{pour} \quad t_0 > 0.$$

Les formules (6) et (7) mettent en évidence l'analogie entre l'intégrale $J_1(x,t)$ et les potentiels de double couche. Il résulte de la formule (7) que si $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, la solution du premier problème de Fourier pour l'équation (1) avec les conditions (3) et (5) est donnée par la formule

(8) $$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(s) \left\{\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]\right\} ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \psi(\tau)\, d\tau \\ \text{pour} \quad x > 0,\ t \geqslant 0.$$

3. L'intégrale

$$J_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau$$

que nous appelerons potentiel de chaleur de première espèce, est analogue au potentiel de simple couche. Elle est continue pour $t \geqslant 0$ et satisfait à l'équation (1) pour $t > 0$, $x \neq 0$. Elle permet de résoudre le second problème de Fourier qui consiste à rechercher une fonction $u(x,t)$ continue pour $x \geqslant 0, t \geqslant 0$, admettant une derivée u'_x continue pour $x \geqslant 0$, $t > 0$, satisfaisant à l'équation (1) pour $x > 0$, $t > 0$, à la condition initiale (3) et à la condition aux limites

$$u'_x(0,t) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

On suppose, cette fois, que $\psi(t)$ est une fonction continue pour $t \geqslant 0$ et $\varphi(x)$ une fonction continue pour $x \geqslant 0$, admettant une dérivée continue au moins dans un intervalle $\langle 0, \gamma \rangle$, où γ est un nombre positif. On suppose en outre que $\varphi'(0) = \psi(0) = 0$. La solution du problème qui vient d'être posé est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(s) \left\{\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]\right\} ds - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{10}$$

Remarque I. Si la fonction $\varphi(s)$ est mesurable et bornée pour $s \geqslant 0$, sans être partout continue, les formules (2), (8) et (10) déterminent les solutions généralisées des problèmes correspondants, énoncés aux n[os] 2 et 3; la condition initiale (3) est satisfaite aux points de continuité de la fonction $\varphi(x)$.

Remarque II. La fonction $\varphi(x)$ étant continue pour $x \geqslant 0$, les solutions des problèmes qu'on vient d'énoncer aux n[os] 2-3 sont uniques dans la classe des fonctions bornées, et même dans la classe E_2 des fonctions $u(x,t)$ qui satisfont à une inégalité de la forme $|u(x,t)| \leqslant Me^{Kx^2}$, M et K étant des constantes (qui dépendent en général de la fonction $u(x,t)$). Les formules (2), (8) et (10) subsistent, si la fonction $\varphi(x)$ appartient à la classe E_2, c'est-à-dire si l'on a $|\varphi(x)| \leqslant Me^{Kx^2}$.

4. Dans la présente note nous allons étudier l'allure des intégrales $I(x,t)$, $J_0(x,t)$ et $J_1(x,t)$ lorsque la variable t tend vers l'infini. On pourra étudier ensuite l'allure pour $t \to \infty$ des solutions des problèmes de Fourier qui viennent d'être énoncés. Ces recherches se prêtent à des applications physiques grâce à l'interprétation de ces problèmes dans la théorie de la propagation de la chaleur.

Étude de l'allure de l'intégrale de Fourier-Poisson pour $t \to \infty$

5. Il est évident que si la fonction $\varphi(s)$ s'annule en dehors d'un intervalle borné $\langle a, b\rangle$ et reste mesurable et bornée dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ lui-même, l'intégrale $I(x,t)$ tend vers zéro pour $t \to \infty$. L'exemple qui va suivre montre qu'il n'en est pas ainsi en général. Nous allons choisir la fonction $\varphi(s)$ mesurable et bornée de sorte que l'intégrale $I(x,t)$ n'ait pas de limite pour $t \to \infty$.

Considérons l'ensemble E, constitué par la suite d'intervalles $\langle n^n, h_n n^n\rangle$, où $h_n = \frac{1}{2}[(-1)^n+1]+2$. Soit

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{aux points de l'ensemble } E, \\ 0 & \text{en dehors de l'ensemble } E. \end{cases}$$

On a alors

$$I(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^n/2\sqrt{t}}^{h_n n^n/2\sqrt{t}} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

En particulier, p étant un nombre entier positif, on a

$$I(0,p^{2p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[A_{pp} + \sum_{n=1}^{p-1} A_{np} + \sum_{n=p+1}^{\infty} A_{np}\right], \tag{11}$$

où l'on a posé

$$A_{np} = \int_{n^n/2p^p}^{h_n n^n/2p^p} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

Comme

$$A_{np} < \int_{n^n/2p^p}^{3n^n/2p^p} e^{-\sigma^2} d\sigma < \int_{n^n/2p^p}^{3n^n/2p^p} d\sigma = n^n/p^p,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{p-1} A_{np} < \frac{(p-2)^{p-1}}{p^p} + \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} < 2\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} = \frac{2}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1},$$

d'où il s'ensuit

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p-1} A_{np} = 0.$$

D'autre part

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} A_{np} < \int_{(p+1)^{p+1}/2p^p}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma < \int_{(p+1)/2}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

on a donc aussi

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=p+1}^{\infty}A_{np}=0.$$

Il en résulte que si p est assez grand, la contribution des sommes

$$\sum_{n=1}^{p-1}A_{np}\quad \text{et}\quad \sum_{n=p+1}^{\infty}A_{np}$$

au second membre de (11) est négligeable, de sorte qu'il suffit d'examiner l'allure de l'intégrale

$$A_{pp}=\int_{1/2}^{h_p/2}e^{-\sigma^2}d\sigma.$$

Or cette intégrale n'a pas de limite pour $p\to\infty$, il en est donc de même de l'intégrale $I(0,p^{2p})$; il en résulte que l'intégrale $I(0,t)$ n'a pas de limite pour $t\to\infty$.

On voit aisément de quelle manière il faut modifier la fonction $\varphi(s)$, pour obtenir une fonction continue et telle que l'intégrale $I(x,t)$ correspondante jouisse de la même propriété que celle qui vient d'être construite.

6. Nous allons pourtant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit $\varphi(s)$ une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) et bornée pour $-\infty<s<+\infty$. On suppose en outre l'existence des limites*

$$\lim_{s\to+\infty}\varphi(s)=l^+\quad \text{et}\quad \lim_{s\to-\infty}\varphi(s)=l^-.$$

Alors, pour toute valeur de x, on a

$$\lim_{t\to\infty}I(x,t)=\tfrac{1}{2}(l^++l^-).$$

Démonstration. On ramène l'intégrale $I(x,t)$ à la forme

$$(12)\qquad I(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma$$

(forme de Fourier) en posant $s=x+2\sigma\sqrt{t}$. Il existe un nombre positif M, tel que $|\varphi(s)|\leqslant M$ pour $-\infty<s<+\infty$. Choisissons le nombre N de sorte que l'on ait

$$(13)\qquad \int_{|\sigma|>N}e^{-\sigma^2}d\sigma<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

Alors on a

$$(14)\qquad \Big|\int_{|\sigma|>N}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma\Big|<\varepsilon/3.$$

D'autre part, la fonction φ étant bornée, l'intégrale

$$\int_{-N}^{N}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma=\int_{-N}^{0}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma+\int_{0}^{N}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma$$

tend, d'après le théorème de Lebesgue (voir p. ex. [2], p. 44), vers la limite

$$l_1\int_{-N}^{0}e^{-\sigma^2}d\sigma+l_2\int_{0}^{N}e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(l_1+l_2)-\Big[l_1\int_{-\infty}^{-N}e^{-\sigma^2}d\sigma+l_2\int_{N}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\Big],$$

pour $t\to\infty$. Il résulte de (13) qu'on peut choisir le nombre T de sorte que l'on ait

$$(15)\qquad \Big|\int_{-N}^{N}e^{-\sigma^2}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,d\sigma-\frac{\sqrt{\pi}}{2}(l_1+l_2)\Big|<\tfrac{2}{3}\varepsilon$$

pour $t>T$. On a donc, d'après (14) et (15),

$$|I(x,t)-\tfrac{1}{2}(l_1+l_2)|<\varepsilon$$

pour $t>T$.

Le nombre positif ε ayant été choisi d'une manière arbitraire, on a donc

$$\lim_{t\to\infty}I(x,t)=\tfrac{1}{2}(l_1+l_2).$$

COROLLAIRE. *Soit $\varphi(x)$ une fonction mesurable et bornée pour $x\geqslant 0$, admettant la limite*

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=l.$$

Si $u_1(x,t)$ est la solution du premier problème de Fourier, avec les conditions (3) *et* (4), *définie par la formule* (2), *on a*

$$\lim_{t\to\infty}u_1(x,t)=0.$$

Si $u_2(x,t)$ est la solution du second problème de Fourier, avec la condition initiale (3) *et la condition aux limites*

$$(16)\qquad u_x'(0,t)=0\quad (\textit{pour } t>0),$$

définie par la formule (10) *(où l'on a, cette fois, $\psi(\tau)\equiv 0$, de sorte que la seconde intégrale est nulle), alors*

$$\lim_{t\to\infty}u_2(x,t)=l.$$

En effet, on a d'après la formule (2), resp. la formule (10),

$$u_k(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{+\infty}\Phi_k(s)\exp\Big[-\frac{(x-s)^2}{4t}\Big]ds\qquad (k=1,2),$$

où

$$\Phi_1(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{pour} \quad s \geqslant 0, \\ -\varphi(-s) & \text{pour} \quad s < 0; \end{cases}$$

$$\Phi_2(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{pour} \quad s \geqslant 0, \\ \varphi(-s) & \text{pour} \quad s < 0; \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{s\to+\infty} \Phi_1(s) = \lim_{s\to+\infty} \Phi_2(s) = l, \quad \lim_{s\to-\infty} \Phi_1(s) = -l, \quad \lim_{s\to-\infty} \Phi_2(s) = l.$$

7. Quant à la fonction $u(x,t)$, représentée par la formule (2), on peut démontrer un théorème plus général.

THÉORÈME. *Soit $u(x,t)$ la fonction, représentée pour $x \geqslant 0$, $t > 0$ par la formule* (2), *$\varphi(s)$ étant une fonction mesurable et bornée pour $s \geqslant 0$. On a*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

pour toute valeur positive de x, cette convergence étant uniforme par rapport à x pour $0 \leqslant x \leqslant R$, où R est un nombre positif arbitraire.

Démonstration. Soit

$$M = \sup_{s\geqslant 0} |\varphi(s)|.$$

Observons que l'on a $|x-s| \leqslant x+s$ pour $x \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, donc de la formule (2) résulte l'inégalité

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]\right\} ds,$$

c'est-à-dire

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{x/2\sqrt{t}} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

Or le second membre de cette inégalité tend vers zéro pour $t \to \infty$ uniformément par rapport à x pour $0 \leqslant x \leqslant R$, où R est un nombre positif arbitraire. Il en est donc de même de la fonction $u(x,t)$.

Étude de l'intégrale $J_1(x,t)$

8. Nous allons démontrer un théorème analogue, relatif au potentiel calorifique $J_1(x,t)$. Vu le sens physique de la fonction $\psi(t)$, qui figure sous le signe de cette intégrale (voir n° 2), nous bornerons notre étude au cas où la fonction $\psi(t)$ est continue pour $t \geqslant 0$.

THÉORÈME. *Si la fonction $\psi(t)$ est continue pour $t \geqslant 0$ et s'il existe la limite*

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = L,$$

alors on a

$$\lim_{t\to\infty} J_1(x,t) = L \tag{17}$$

pour toute valeur positive (fixée) de la variable x.

Démonstration. La fonction $\psi(t)$ étant continue pour $t \geqslant 0$ et ayant une limite pour $t \to \infty$, elle est bornée pour $t \geqslant 0$, de sorte qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait $|\psi(t)| \leqslant M$ pour $t \geqslant 0$. Il est évident que $|L| \leqslant M$. Posons

$$V(x,t;\xi,\tau) = \frac{x-\xi}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right].$$

On a

$$J_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t V(x,t;0,\tau)\psi(\tau)d\tau;$$

or

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t V(x,t;0,\tau)d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma - \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\sigma^2} dc\right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

et, par suite,

$$J_1(x,t) - L = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau - \frac{2L}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\sigma^2} d\sigma. \tag{18}$$

Le second terme du second membre de (18) tend vers zéro pour $t \to \infty$. Il nous reste à démontrer qu'il en est de même du premier terme. À cet effet, nous choisissons le nombre T_0 de façon que l'on ait

$$|\psi(t) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad t > T_0. \tag{19}$$

Soit $t > T_0$; on a

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{T_0}^{t} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau.$$

D'après (19) on a

$$(20)\qquad \left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{T_0}^{t} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{T_0} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T_0} V(x,t;0,\tau)d\tau,$$

et, par suite,

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{T_0} V(x,t;0,\tau)[\psi(T)-L]d\tau\right| \leqslant \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{x/2\sqrt{t-T_0}} e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

et on peut choisir un nombre $T_1 > T_0$ de sorte que l'on ait

$$(21)\qquad \left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{T_0} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau\right| < \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad t > T_1.$$

On déduit de (20) et de (21) l'inégalité

$$(22)\qquad \left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t} V(x,t;0,\tau)[\psi(\tau)-L]d\tau\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t > T_1,$$

il est donc évident que le premier terme du second membre de (18) tend vers zéro pour $t\to\infty$. Il en résulte que $\lim\limits_{t\to\infty} J_1(x,t) = L$.

COROLLAIRE. *Soit $u(x,t)$ la solution du premier problème de Fourier avec les conditions* (3) *et* (5), *la fonction $\varphi(x)$ étant continue et bornée pour $x\geqslant 0$, tandis que la fonction $\psi(t)$ est continue pour $t\geqslant 0$. Supposons que l'on ait*

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t) = L.$$

Alors on a

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = L$$

pour toute valeur fixée, positive de la variable x.

Étude de l'intégrale $J_0(x,t)$

9. Avec les mêmes hypothèses sur la fonction $\psi(t)$, le potentiel calorifique $J_0(x,t)$, en général, n'a pas de limite pour $t\to\infty$. Considérons par exemple l'intégrale

$$j_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau.$$

En posant $\tau = t - x^2/4z^2$ et en intégrant par parties, on obtient

$$(23)\qquad j_0(x,t) = \frac{|x|}{2\sqrt{\pi}}\int_{|x|/2\sqrt{t}}^{\infty} z^{-2}\exp(-z^2)\,dz$$
$$= \sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\int_{|x|/2\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-z^2)\,dz.$$

Il résulte de la formule (23) que l'on a

$$\lim_{t\to\infty} j_0(x,t) = \infty.$$

Examinons encore l'intégrale

$$j_\alpha(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}\tau^\alpha}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau \qquad (0<\alpha<1),$$

c'est-à-dire le cas particulier de l'intégrale $J_0(x,t)$ correspondant à $\psi(t) = t^{-\alpha}$. Posons $\tau = tz$; l'intégrale j_α prend la forme

$$j_\alpha(x,t) = \frac{t^{1/2-\alpha}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{1/2}z^\alpha}\exp\left[-\frac{x^2}{4t(1-z)}\right]dz.$$

L'intégrale qui figure au second membre est convergente pour toute valeur positive de t; elle est inférieure à $B(\frac{1}{2};\,1-\alpha)$ et il résulte du théorème de Lebesgue, cité au n° 6, qu'elle tend vers $B(\frac{1}{2};\,1-\alpha)$ pour $t\to\infty$. Il en résulte que l'on a

$$\lim_{t\to\infty} j_\alpha(x,t) = \begin{cases} \infty & \text{pour} \quad \alpha < \frac{1}{2}, \\ B(\frac{1}{2},1-\alpha)/2\sqrt{\pi} & \text{pour} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

L'étude de l'intégrale $j_\alpha(x,t)$ montre que l'intégrale $J_0(x,t)$ peut ne pas avoir de limite, même lorsque la fonction $\psi(t)$ tend vers zéro pour $t\to\infty$. Pourtant nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si la fonction $\psi(t)$ est continue pour $t\geqslant 0$ et satisfait à l'inégalité*

$$(24)\qquad |\psi(t)| \leqslant Mt^{-\alpha},$$

M étant un nombre positif et α un nombre supérieur à $\frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{t\to\infty} J_0(x,t) = 0$$

pour toute valeur non négative de x.

Démonstration. Posons pour abréger

$$U(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^{-1/2}\exp[-(x-s)^2/4(t-\tau)],$$

et soit t_0 un nombre positif quelconque. On a

$$(25)\quad J_0(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t U(x,t;0,\tau)\psi(\tau)\,d\tau$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0} U(x,t;0,\tau)\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t} U(x,t;0,\tau)\psi(\tau)\,d\tau.$$

Il est évident que le premier terme du second membre de (25) tend vers zéro pour $t\to\infty$. Quant à l'intégrale qui figure au second terme, on a

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau\right|\leqslant M\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}\tau^{\alpha}}\leqslant Mt^{1/2-\alpha}B(\tfrac{1}{2},1-\alpha),$$

par conséquent, le second terme du second membre de (25) tend aussi vers zéro pour $t\to\infty$. Ceci achève la démonstration du théorème.

10. L'étude de l'allure asymtotique de l'intégrale J_0 pour $t\to\infty$, que nous avons poursuivie au n° 9, permet de faire quelques remarques concernant les solutions du second problème de Fourier, avec les conditions (3) et (9). Observons d'abord que la fonction $u(x,t)=Ax$ (A étant un nombre constant) constitue une solution (la seule dans la classe E_2) de l'équation (1), satisfaisant à la condition initiale $u(x,0)=Ax$ pour $x\geqslant 0$, et à la condition aux limites $u'_x(0,t)=A$. D'autre part, en appliquant la formule (10), on peut mettre cette solution sous la forme

$$u(x,t)=-\frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau+$$
$$+\frac{A}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}s\left\{\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]\right\}ds,$$

c'est-à-dire

$$(26)\qquad u(x,t)=-2Aj_0(x,t)+Au_0(x,t)$$

(voir n° 9), avec

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^{\infty}s\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]ds+\int_0^{\infty}s\exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4t}\right]ds\right\}.$$

En posant $s=x+2\sigma\sqrt{t}$, resp. $s=-x+2\sigma\sqrt{t}$ dans les intégrales du second membre, on obtient

$$(27)\qquad u_0(x,t)=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{t}}^{x/2\sqrt{t}}e^{-\sigma^2}d\sigma+2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Si l'on substitue dans (26) les expressions pour $j_0(x,t)$ et $u_0(x,t)$ d'après les formules (23) et (27), les termes tendant vers l'infini pour $t\to\infty$, se détruisent, de sorte qu'on aboutit bien à $u(x,t)\equiv Ax$.

Soit $u(x,t)$ une fonction de classe E_2, constituant une solution du second problème de Fourier pour l'équation (1), avec les conditions (3) et (9), représentée par la formule (10). Supposons que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(t)$ soient mises respectivement sous la forme $\varphi(x)=Ax+\varphi_0(x)$, $\psi(t)=B+\psi_0(t)$, A et B étant des constantes, et $\varphi_0(x)$ et $\psi_0(t)$ des fonctions continues pour $x\geqslant 0$ et $t\geqslant 0$ respectivement. Nous supposons en outre que l'on a

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_0(x)=l,$$

tandis que la fonction $\psi(t)$ satisfait à la condition (24) avec $\alpha>\frac{1}{2}$. Soit $\varphi'(0)=\psi(0)$. Il résulte de nos considérations que si l'on a $A=B$, la fonction $u(x,t)$ représentée par la formule (10) tend vers la limite l pour $t\to\infty$. Si au contraire $A\neq B$, la fonction $u(x,t)$ n'a pas de limite pour $t\to\infty$.

Travaux cités

[1] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, Paris 1927.

[2] C. de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, Paris 1916.

[3] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Москва 1951.