(84), les fonctions $u_\nu(A)$ satisfont à la condition de Hölder et par conséquent la fonction composée

$$F_1(B) = \frac{1}{\lambda_n(B)} F[B, u(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]$$

satisfait aussi à cette condition; il en résulte, d'après la propriété du potentiel généralisé de charge spatiale, que la fonction $\overset{*}{u}(A)$ vérifie l'équation différentielle donnée (129) en tout point intérieur A du domaine Ω. D'après l'équation (135), cette fonction vérifie aussi la condition limite (132) en tout point P de la surface S, donc elle est la solution cherchée du problème proposé. Par conséquent nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Si les fonctions* $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$, *vérifient les conditions* 1°, 2°, 3° *de la page* 272, *la fonction* $F(A, u_0, \ldots, u_n)$ *et les fonctions données* $g(P), \Phi(P, u)$ *vérifient les conditions de Hölder* (131), (133) *et les inégalités* (120), (148), (151), *enfin si l'équation* (115) *n'admet que la solution nulle, alors il existe au moins une fonction* $u(A)$ *qui vérifie l'équation différentielle* (129) *en tout point intérieur* A *du domaine* Ω *et la condition limite* (132) *en tout point* P *de la surface* S *limitant le domaine* Ω.

Observons que le choix de la constante de Hölder K_φ pour la fonction φ est arbitraire et le choix de la constante ϱ est arbitraire dans l'intervalle (142'). Il est donc naturel de profiter de cette circonstance et de choisir les constantes K_φ et ϱ de façon que les deux inégalités (148), (151) soient satisfaites simultanément. Ce choix n'est pas toujours possible, à moins que les bornes supérieures M_F, M_Φ, k_Φ ne soient suffisamment petites relativement aux autres constantes données du problème.

Travaux cités

[1] M. Gevrey, *Détermination et emploi des fonctions de Green*, Journal de Mathématiques, Paris 1930.

[2] E. Levi, *Sulle equazioni totalemente ellittiche*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo 24 (1907), p. 275-317.

[3] L. Lichtenstein, *Nichtlineare Integralgleichungen*, Berlin 1931.

[4] C. Miranda, *Sul equazioni di tipo ellittico*, Napoli 1955.

[5] W. Pogorzelski, *Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications*, Annales Polonici Mathematici 3(1), p. 46-75.

[6] J. Schauder, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

[7] W. Sternberg, *Über die lineaire elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Mathematische Zeitschrift 21 (1924), p. 286-311.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Bemerkungen über die Bruchteile von $p\alpha$

von S. HARTMAN (Wrocław) und S. KNAPOWSKI (Poznań)

Auf dem Grenzgebiet zwischen der Primzahlenlehre und der Theorie der diophantischen Approximationen tauchen Probleme auf, welche die Verteilung von $p\alpha \pmod 1$ (p durchläuft die Primzahlfolge) oder den Approximationsgrad einer gegebenen Irrationalzahl durch Brüche mit Primzahlnennern betreffen. Darauf beziehen sich Sätze 1 und 2. Herr V. Jarník, dem wir dieselben zur Kenntnis gebracht haben, hat in einer brieflichen Mitteilung aus einem Satz von I. M. Winogradow ([4], S. 177) folgenden Schluß gezogen:

(*) *Für jedes irrationale* α *und jedes* $\varepsilon > 0$ *hat die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{r}{p}\right| < \frac{1}{p^{6/5-\varepsilon}}$$

unendlich viele Lösungen in primen p *und ganzen* r.

Mann kann den erreichbaren Approximationsgrad von α durch Brüche r/p in Zusammenhang mit der Weltkonstanten von Linnik bringen [3]. Diese Konstante c ist dadurch bestimmt, daß in jeder arithmetischen Progression $b + jq$ ($j = 1, 2, \ldots$; $0 < b < q$; $(b, q) = 1$) eine Primzahl $p < q^c$ vorkommt. Der Wert von c ist unbekannt. Man weiß nur, daß wenn die sogenannte verallgemeinerte Riemannsche Hypothese zurecht besteht, dann der asymptotische Wert von c für $q \to \infty$ gleich 2 ist ([1], S. 58). Deshalb ist vielleicht trotz (*) auch folgender Satz von einigem Interesse:

SATZ 1. *Läßt die Zahl* α *die Approximation* $1/q^{c+1}$ *zu, so hat die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{r}{p}\right| < \frac{2}{p^{1+1/c}} \tag{1}$$

unendlich viele Lösungen in primen p *und ganzen* r.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen q und a, für welche

$$|\alpha - a/q| < q^{-c-1}, \quad (a, q) = 1. \tag{2}$$

Wir bezeichnen mit x_0 und y_0 die ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$ax - qy = 1 \tag{3}$$

mit $0 < x_0 < q$ und $0 < y_0 < a$. Dann sind

$$x = x_0 + jq \quad \text{und} \quad y = y_0 + ja \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

auch Lösungen von (3). Da $(x_0, q) = 1$, so muß hier nach dem Linnikschen Satze ein $x < q^c$ gleich einer Primzahl p sein. Das zu p gehörende y heiße r. Dann hat man

$$a/q - r/p = 1/pq. \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt

$$|\alpha - r/p| < q^{-c-1} + 1/pq < p^{-(c+1)/c} + p^{-1}p^{-1/c} = 2p^{-(1+1/c)}. \tag{5}$$

Es ist leicht einzusehen, daß (5) und also (1) durch unendlich viele Paare (r, p) erfüllt wird. In der Tat: aus (2), (4) und $p < q^c$ folgt $|\alpha - r/p| < 2/pq$, und da q in (2) beliebig groß sein kann, so sind für p und r keine Schranken möglich.

Im Anhang zum Kapitel XI von [4] stellen die Übersetzer fest, daß die Bruchteile von $p\alpha$ für jedes irrationale α im Einheitsintervall gleichverteilt sind. Daraus und aus banalen Betrachtungen für den Fall der rationalen Zahlen geht hervor, daß diejenigen und nur diejenigen reellen Zahlen, die nicht von der Form a/q (a, q ganz; q nicht prim) sind, zum vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Primzahl p und ein ganzes r zulassen, welche die Bedingung $|\alpha p - r| < \varepsilon$ erfüllen. Man könnte verlangen, daß auch r hier prim sei. Ob sich das für alle oder fast alle irrationalen Zahlen verwirklichen läßt, sind wir nicht imstande zu entscheiden. Dennoch kann man in dieser Richtung leicht folgendes beweisen:

SATZ 2. *Für jedes α ist die Ungleichung*

$$|\alpha - r/p| < p^{-3/8+\eta} \quad (\eta > 0 \textit{ beliebig})$$

in Primzahlen erfüllbar.

Zum Beweise benutzen wir den Satz von Hardy und Littlewood[1]), nach welchem für jedes $\eta > 0$ und hinreichend große a zwischen a und $a + a^{5/8+\eta}$ wenigstens eine Primzahl liegt. Sei nun für ein $\eta' > 0$ die Zahl a in diesem Sinne hinreichend groß und es gelte für eine Primzahl p

$$|\alpha - a/p| \leqslant 1/p.$$

Es sei r die kleinste Primzahl, die mindestens gleich a ist. Dann hat man

$$|a/p - r/p| < a^{5/8+\eta'}/p,$$

also $|\alpha - r/p| < 1/p + a^{5/8+\eta'}/p \leqslant 1/p + (p|\alpha| + 1)^{5/8+\eta'}/p$, was für $\eta > \eta'$ und ein hinreichend großes p die Behauptung ergibt.

1) [2], S. 256. Die dort angegebenen Abschätzungen gestatten Satz 2 zu verschärfen.

Zitate

[1] А. О. Гельфонд, *Теория чисел*, Математика в СССР за тридцать лет, Москва-Ленинград 1948, S. 53-65.

[2] A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, The Quarterly Journal of Math., 8 (1937), S. 255-266.

[3] J. B. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression*, Matem. Sbornik 15 (1944), S 139-178 und 347-368.

[4] I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, London-New York. Aus dem Russischen übersetzt und ergänzt von K. F. Roth und A. Davenport.