# Sur certaines propriétés de points extrémaux liés à un domaine plan

par J. Górski (Kraków)

Soit $F=\sum_{i=1}^{m}F_i$ la frontière d'un domaine $D$ de connexion $m$ contenant le point $z=\infty$. Supposons que aucun des continus $F_i$, $i=1,2,\ldots,m$, n'est dégénéré. Soit $f(z)$ une fonction réelle continue définie sur $F$, $\lambda>0$ un paramètre réel et $\omega_\lambda(z,\zeta)$ la fonction de deux points $z,\zeta$, appartenant à $F$, définie par la formule

$$(1)\qquad \omega_\lambda(z,\zeta)=|z-\zeta|\exp\{-\lambda[f(z)+f(\zeta)]\}.$$

Soit

$$(2)\qquad \eta_\lambda^{(n)}=\{\eta_{0\lambda}^{(n)},\eta_{1\lambda}^{(n)},\ldots,\eta_{n\lambda}^{(n)}\}$$

$n$-ième système des points extrémaux de l'ensemble $F$ par rapport à la fonction génératrice (1), c'est-à-dire un tel système de $n+1$ points de $F$ qu'on ait

$$\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}\omega_\lambda(\eta_{j\lambda}^{(n)},\eta_{k\lambda}^{(n)})\geqslant\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}\omega_\lambda(\zeta_{j\lambda}^{(n)},\zeta_{k\lambda}^{(n)})$$

pour chaque système de $n+1$ points $\zeta_\lambda^{(n)}=\{\zeta_{0\lambda}^{(n)},\ldots,\zeta_{n\lambda}^{(n)}\}$ de $F$. Posons

$$\Delta_n^{(j)}(\eta_\lambda^{(n)})=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\omega_\lambda(\eta_{j\lambda}^{(n)},\eta_{k\lambda}^{(n)})\qquad(j=0,1,\ldots,n).$$

Il est connu que

1° il existe la limite

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\big(\Delta_n^{(j)}(\eta_\lambda^{(n)})\big)^{1/n}=d(F,\omega_\lambda)>0\qquad(j=0,1,\ldots,n),$$

dite l'écart (voir [4], p. 14) de l'ensemble $F$ par rapport à la fonction (1).

2° Soit $F_{\lambda f}$ l'ensemble des points d'accumulation de la suite triangulaire

$$\begin{matrix}\eta_{0\lambda}^{(1)}, & \eta_{1\lambda}^{(1)}, & \\ \eta_{0\lambda}^{(2)}, & \eta_{1\lambda}^{(2)}, & \eta_{2\lambda}^{(2)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots\end{matrix}$$



Pour chaque $z\,\bar{\epsilon}\,F_{\lambda f}$ il existe la limite de la suite

$$\Phi_n^{(j)}(z,\eta_\lambda^{(n)})=\exp[\lambda f(\eta_{j\lambda}^{(n)})]\Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{|z-\eta_{k\lambda}^{(n)}|}{|\eta_{j\lambda}^{(n)}-\eta_{k\lambda}^{(n)}|}\Big)^{1/n}\qquad(j=0,1,\ldots,n),$$

quand $n$ tend vers l'infini

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\Phi_n^{(j)}(z,\eta_\lambda^{(n)})=\Phi(z,\lambda f).$$

La fonction $\log\Phi(z,\lambda f)$ est harmonique en dehors de l'ensemble $F_{\lambda f}$ (le point $z=\infty$ exclu). Lorsque le point $z\,\bar{\epsilon}\,F_{\lambda f}$ tend vers un point quelconque $z_0\,\epsilon\,F_{\lambda f}$ il existe la limite

$$(5)\qquad \lim_{z\to z_0}\big(\log\Phi(z,\lambda f)\big)=\lambda f(z_0).$$

Pour chaque point $z\,\epsilon\,F$ on a [3]:

$$(6)\qquad \log\Phi(z,\lambda f)\leqslant\lambda f(z).$$

Soit $F(z)$ une fonction continue sur le plan entier égale à $f(z)$ dans $F$. On a

$$(7)\qquad \Phi_n^{(j)}(z,\eta_\lambda^{(n)})=e^{\lambda F(z)}\Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\omega_\lambda(z,\eta_{k\lambda}^{(n)})\Big)^{1/n}\big(\Delta_n^{(j)}(\eta_\lambda^{(n)})\big)^{-1/n}.$$

D'après (3) et (4) pour chaque point $z\,\bar{\epsilon}\,F_{\lambda f}$ il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\omega_\lambda(z,\eta_{k\lambda}^{(n)})\Big)^{1/n}=\varphi(z,\lambda f)$$

et on a $\log\Phi(z,\lambda f)=\lambda F(z)+\log\varphi(z,\lambda f)-\log d(F,\omega_\lambda)$. Il suit de (5) que la fonction $\log\varphi(z,\lambda f)$ tend vers $\log d(F,\omega_\lambda)$ quand le point $z$ tend vers $z_0\,\epsilon\,F_{\lambda f}$.

Lemme 1. *Pour chaque $\lambda>0$ la limite*

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n}f(\eta_{k\lambda}^{(n)})=g_{\lambda f}$$

*existe.*

En effet, on a

$$(9)\qquad \frac{\Phi_n^{(j)}(z,\eta_\lambda^{(n)})}{z}=\Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\Big|1-\frac{\eta_{k\lambda}^{(n)}}{z}\Big|\Big)^{1/n}\exp\Big(-\frac{\lambda}{n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}f(\eta_{k\lambda}^{(n)})\Big)\big(\Delta_n^{(j)}(\eta_\lambda^{(n)})\big)^{-1/n}.$$

La suite (9) est uniformément convergente en dehors d'un cercle $|z|>R$ qui contient dans son intérieur l'ensemble $F$. Puisque les termes de la suite (9) sont égaux à

$$\exp\Big(-\frac{\lambda}{n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} f(\eta_{k\lambda}^{(n)})\Big)\big(\Delta_n^{(j)}(\eta_\lambda^{(n)})\big)^{-1/n}$$

à l'infini, la limite (8) existe.

Cas particulier. Supposons que $\lambda=1$ et que

$$f(z)=\begin{cases}0 & \text{sur} \quad F_1,\\ c_i=\text{const}>0 & \text{sur} \quad F_i,\ i=2,3,\ldots,m.\end{cases}$$

Désignons par $\nu_2=\nu_2(n,\lambda f),\ldots,\nu_m=\nu_m(n,\lambda f)$ les nombres de ceux des points extrémaux (2) qui sont situés sur $F_2,F_3,\ldots,F_m$. D'après le lemme 1, il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{m} c_i\nu_i=g_f\geqslant 0.$$

Posons $F_{if}=F_iF_f$, $i=1,2,\ldots,m$.

LEMME 2. *On a toujours* $F_1\subset F_f$.

En effet, dans le cas contraire il existerait un point $z_0\in F_1$, $z_0\bar{\in} F_{1f}$. D'après (5) et le principe de maximum pour les fonctions harmoniques, la fonction $\log\Phi(z,f)$ serait positive en $z_0$ et d'autre part, d'après (6), $\log\Phi(z,f)\leqslant 0$.

Soit $G_1(z,\infty)$ la fonction de Green avec le pôle à l'infini pour le domaine non-borné dont la frontière est le continu $F_1$. Posons

$$M_i=\max_{z\in F} G_1(z,\infty),\qquad i=2,3,\ldots,m.$$

LEMME 3. *Lorsque* $c_i>M_i$, *pour* $i=2,3,\ldots,m$, *on a* $F_1=F_f$.

Démonstration. Considérons la différence $r(z)=\log\Phi(z,f)-G_1(z,\infty)$. La fonction $r(z)$ est harmonique dans le domaine $D_f$ dont la frontière est égale à $F_f$, continue dans $D_f+F_f$. Pour $z=\infty$ on a

$$r(\infty)=\log\big(1/d(F,\omega_1)\big)-\log\big(1/d(F_1)\big)-g_f\leqslant 0$$

(voir [4], p. 14). Si l'ensemble $F_{if}$ n'était pas vide on aurait $r(z)>0$ sur $F_{if}$, car $\log\Phi(z,f)=c_i>M_i\geqslant G_1(z,\infty)$ et $r(z)=0$ sur $F_1$. Mais cela est impossible du fait que $r(\infty)$ est $\leqslant 0$.

LEMME 4. *Lorsque* $c_i<M_i$ *pour une certaine valeur* $i=2,3,\ldots,m$ *on a* $F_{if}\neq 0$.



Démonstration. Dans le cas contraire, la fonction $\log\Phi(z,f)$ serait harmonique en dehors de $F_1$, égale à 0 sur $F_1$ et $\infty$ à l'infini. Si on avait $d(F,\omega_1)=d(F_1)$, alors $\log\Phi(z,f)\equiv G_1(z,\infty)$. D'autre part il existerait un point $z_0\in F_i$ tel qu'on aurait $M_i=G_1(z_0,\infty)$; donc, d'après (6), $c_i\geqslant\log\Phi(z_0,f)=G_1(z_0,\infty)$. Mais cela est impossible, car $c_i$ est $<M_i$.

THÉORÈME 1. *Lorsque* $c_i$, $i=2,3,\ldots,m$, *sont suffisamment petits on a* $F_f=F$.

Démonstration. D'après le lemme 4, pour $c_i$ suffisamment petit on a $F_{if}\neq 0$. Supposons que $F_{if}\neq 0$ et soit $G(z,\infty)$ la fonction de Green avec le pôle à l'infini pour le domaine $D$. Puisque la différence $\log\Phi(z,f)-G(z,\infty)$ est non-négative sur $F$ et harmonique à $\infty$, on a dans tout le domaine $D$, $\log\Phi(z,f)>G(z,\infty)$. On sait qu'il existe les courbes fermées $K_i$, $i=1,2,\ldots,m$, disjointes, analytiques, telles que chaque courbe $K_i$ contient un de continus $F_i$ dans son intérieur et que $G(z,\infty)=a=\text{const}>0$ sur chaque $K_i$. Supposons que $c_i<a$ pour $i=2,3,\ldots,m$. Puisque

$$\log\Phi(z,f)=c_i \quad \text{sur} \quad F_{if},$$

on a $\log\Phi(z,f)>c_i$ dans le domaine $D_i$, dont la frontière est $K_i+F_{if}$. D'autre part, $\log\Phi(z,f)\leqslant c_i$ sur $F_i$; alors $F_i=F_{if}$, $i=2,3,\ldots,m$.

Remarque. Supposons que $c_i$, $i=2,3,\ldots,m$, sont si petits que $F_f=F$. Désignons par $u_f(z)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine $D$ et la fonction frontière $f(z)$, bornée à l'infini. Formons la fonction

$$G(z,\infty)+u_f(z). \tag{10}$$

On sait que $G(z,\infty)+u_f(z)-\log|z|\to\log\big(1/d(F)\big)+u_f(\infty)$ quand $z\to\infty$.

Les fonctions $\log\Phi(z,f)$ et (10) sont identiques; alors

$$\log\big(1/d(F)\big)+u_f(\infty)=\log\big(1/d(F,f)\big)-g_f.$$

Puisque $u_f(\infty)$ et $\log d(E,f)$[1]) varient d'une manière continue avec la fonction $f(z)$, $g_f$ varie aussi de la même manière.

Cas général. Désignons par $\Delta$ un ensemble borélien quelconque de points de $F$ et soit $\mu_n(\Delta)$ la fonction d'ensemble égale à 0 lorsque $\Delta$ ne contient aucun des points extrémaux (2), et à $k/(n+1)$ lorsqu'il en contient $k$. Il est clair que quelque soit $\Delta\subset F$, on a $0\leqslant\mu_n(\Delta)\leqslant 1$. Donc les fonctions $\mu_n(\Delta)$ sont complètement additives, non-négatives et uniformément bornées. Chaque fonction $\mu_n(\Delta)$ représente une distribution de la masse unité sur la frontière $F$. D'après un théorème de de la Vallée Poussin [5] on peut extraire de chaque suite illimitée de fonctions

[1]) Cela résulte évidemment de la définition de l'écart $d(E,f)$.

additives uniformément bornées — une suite partielle convergente. Soit $\mu_{\lambda f}(\Delta)=\lim\limits_{n_k}\mu_{n_k}(\Delta)$. D'une manière analogue que dans le travail [2] on peut former l'expression suivante:

$$I(\tau)=2\lambda\int\limits_F f(\zeta)\,d\tau(\Delta_\zeta)+\int\limits_F\int\log|z-\zeta|^{-1}\,d\tau(\Delta_z)\,d\tau(\Delta_\zeta),$$

(où $\tau$ représente une distribution quelconque de la masse unité sur $F$) et démontrer que

$$\log\big(1/d(F,\omega_\lambda)\big)=I(\mu_{\lambda f})\leqslant I(\tau)\,.$$

D'après (7) on peut présenter la fonction $\log\Phi_{n_k}^{(0)}(z,\eta_\lambda^{(n_k)})$ sous la forme suivante:

$$\log\Phi_{n_k}^{(0)}(z,\eta_\lambda^{(n_k)})=\lambda F(z)+ \tag{11}$$
$$+\int\limits_F\log\big(|z-\zeta|\,\exp\{-\lambda[F(z)+f(\zeta)]\}\big)\,d\mu_{n_k}(\Delta_\zeta)-\log\big(\Delta_{n_k}^{(0)}(\eta_\lambda^{(n_k)})\big)^{1/n_k}.$$

Lorsque $k$ tend vers $\infty$ on obtient de (11) l'égalité[2]):

$$\log\Phi(z,\lambda f)=\int\limits_F\log|z-\zeta|\,d\mu_{\lambda f}(\Delta_\zeta)-\lambda\int\limits_F f(\zeta)\,d\mu_{\lambda f}(\Delta_\zeta)+\log\big(1/(F,\omega_\lambda)\big). \tag{12}$$

Désignons par $U(z)$ la fonction

$$U(z)=\int\limits_F\log|z-\zeta|^{-1}\,d\mu_{\lambda f}(\Delta_\zeta)+\lambda F(z)$$

et posons

$$\gamma_{\lambda f}=\log\big(d(F,\omega_\lambda)\big)^{-1}-\lambda\int\limits_F f(\zeta)\,d\mu_{\lambda f}(\Delta_\zeta)\,.$$

D'après (12), il suit de (5) que $U(z)=\gamma_{\lambda f}$ pour chaque point $z\in F_{\lambda f}$. Lorsque $z\in F$, on a $U(z)\geqslant\gamma_{\lambda f}$.

Dans le cas général $\lambda>0$ et $f(z)\neq\mathrm{const}$ l'ensemble $F-F_{\lambda f}$ n'est pas vide. Néanmoins, lorsque $\lambda\to 0$, on peut démontrer [4] que la distance d'un point quelconque $z_0$ de $F$ à $F_{\lambda f}$ tend vers zéro.

### Travaux cités


[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3, p. 1-118.

[2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Pol. Math. 1 (1955), p. 418-429.

[3] F. Leja, *Sur une famille de fonctions analytiques extrémales*, Ann. Soc. Pol. Math. 25 (1952), p. 1-16.

[4] — *Polynômes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes*, Ann. Pol. Math. 1 (1955), p. 13-28.

[5] C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 2 (1932), p. 169-232.


[2]) De la formule (11) découle, en particulier, d'après (4) l'existence de la limite (3).

# On the epidermic effect for ordinary differential inequalities of the first order

by W. Mlak (Kraków)

The aim of this paper is to generalize the epidermic effect in the case of finite systems of ordinary differential inequalities. The proof given in this paper is different from the proof given in [3].

I am glad to express here my thanks to J. Szarski for many valuable remarks which helped me to obtain the above-mentioned generalization.

We introduce the following

Assumption H. *The functions $f_i(t,y_1,\dots,y_n)$ $(i=1,\dots,n)$, continuous in the open set $\Omega$ of the space of points $(t,y_1,\dots,y_n)$, satisfy the following condition:*

(M) *If $A_i=(t,a_1,\dots,a_{i-1},c,a_{i+1},\dots,a_n)$, $B_i=(t,b_1,\dots,b_{i-1},c,b_{i+1},\dots,b_n)$ and $a_\nu\leqslant b_\nu$ for $\nu=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n$, then $f_i(A_i)\leqslant f_i(B_i)$.*

Let us consider the system of differential equations

$$y_i'=f_i(t,y_1,\dots,y_n)\qquad(i=1,2,\dots,n). \tag{1}$$

It is known (see [2], p. 122, theorem I) that, if the functions $f_i$ fulfil the assumption H in the open set $\Omega$, then for every point $(t_0,y_1^0,\dots,y_n^0)$ there exists a right maximal integral $\tau_1(t),\dots,\tau_n(t)$ of the system (1) such that $y_i^0=\tau_i(t_0)$.

The integral $\tau_1(t),\dots,\tau_n(t)$ may be prolonged to the boundary of $\Omega$.

One can easily prove the following

Lemma. *Let $\tau_1(t),\dots,\tau_n(t)$ be the right maximal integral of the system* (1) *valid in the interval $[t_0,t_1]$. Suppose that the system* (1) *satisfies* H *and the system of functions $\tau_1^\nu(t),\dots,\tau_n^\nu(t)$ forms a right maximal integral of the system*

$$y_i'=f_i(t,y_1,\dots,y_n)+1/\nu\qquad(i=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,3,\dots)$$

*such that $\tau_i^\nu(t_0)=\tau_i(t_0)+1/\nu$ $(i=1,2,\dots,n)$.*

*Under these assumptions, for $\nu$ sufficiently large, the functions $\tau_i^\nu(t)$ are determined in $[t_0,t_1]$ and $\tau_i^\nu(t)\to\tau_i(t)$ uniformly in $[t_0,t_1]$ $(i=1,2,\dots,n)$. At the same time, for $t\in[t_0,t_1]$ and $i=1,2,\dots,n$, we have $\tau_i^\nu(t)>\tau_i(t)$ for $\nu$ sufficiently large.*