Or, on prouve aisément que *lorsque $f(x)$ est un polynôme aux coefficients entiers, d'un degré n arbitraire,*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\,,$$

et si $f(0) \equiv 0 \pmod 9$ *et* $f(3) \equiv 0 \pmod 9$, *alors* $f(6) \equiv 0 \pmod 9$.

Démonstration. Si $f(0) \equiv 0 \pmod 9$ et $f(3) \equiv 0 \pmod 9$, alors $a_n \equiv 0 \pmod 9$ et $3a_{n-1} \equiv 0 \pmod 9$; il s'ensuit que $6a_{n-1} \equiv 0 \pmod 9$, donc $6a_{n-1} + a_n \equiv 0 \pmod 9$, et puisque $f(6) \equiv 6a_{n-1} + a_n \pmod 9$, alors $f(6) \equiv 0 \pmod 9$, c. q. f. d.

5. Nous examinerons enfin le cas $m = 10$. On prouve aisément que $x^5 \equiv x \pmod{10}$ quel que soit le nombre entier x. Il suffit donc d'examiner les polynômes de quatrième degré, comme c'etait le cas pour le module 8. Nous allons démontrer que *si* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ *et* $f(2) \equiv 0 \pmod{10}$ *et* $f(5) \equiv 0 \pmod{10}$, *alors* $f(0) \equiv 0 \pmod{10}$ *et* $f(7) \equiv 0 \pmod{10}$.

Démonstration. Si $f(2) \equiv f(5) \equiv 0 \pmod{10}$, alors

$$16a + 8b + 4c + 2d + e \equiv 0 \pmod{10}$$

et

$$625a + 125b + 25c + 5d + e \equiv 0 \pmod{10}\,,$$

donc

$$6a + 8b + 4c + 2d + e \equiv 0 \pmod{10} \quad \text{et} \quad 5a + 5b + 5c + 5d + e \equiv 0 \pmod{10}.$$

En multipliant la première de ces congruences par 5 et la seconde par 4, on obtient $5e \equiv 0 \pmod{10}$ et $4e \equiv 0 \pmod{10}$, donc $e \equiv 0 \pmod{10}$, c'est-à-dire $f(0) \equiv 0 \pmod{10}$. Après l'addition de deux congruences on obtient $a + 3b + 9c + 7d + 2e \equiv 0 \pmod{10}$ ou, puisque $e \equiv 0 \pmod{10}$, on obtient $a + 3b + 9c + 7d + e \equiv 0 \pmod{10}$. Puisque toutefois $f(7) \equiv a + 3b + 9c + 7d + e \pmod{10}$, on a $f(7) \equiv 0 \pmod{10}$, c. q. f. d.

Remarque. Selon le théorème de Rédei, pour chaque nombre naturel $m > 1$ et pour chaque nombre entier x on a $x^m \equiv x^{m-\varphi(m)} \pmod m$, où φ est la fonction de Gauss. Il en résulte que dans les congruences modulo m, tout polynôme $f(x)$ peut étre substitué par un polynôme $g(x)$ de degré $< m$, tel que $f(x) \equiv g(x) \pmod m$, pour chaque x.

Le théorème de Rédei ne donne pas toujours la réduction optimale du degré du polynôme, ce qu'on voit p. ex. lorsque $m = 6$. Selon le théorème de Rédei, on obtient $x^6 \equiv x^4 \pmod 6$ pour x entiers, tandis que nous avons $x^3 \equiv x \pmod 6$.

Sur une solution de l'équation du mouvement permanent du fluide visqueux

par J. Wolska (Warszawa)

1. Introduction. Dans l'hydrodynamique d'un fluide parfait on déduit une équation dite l'équation de Helmholtz

$$dW/dt = (W\nabla)v \tag{1}$$

où $\boldsymbol{W} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, et $\boldsymbol{v}$ exprime la vitesse du fluide. L'équation (1) illustre les deux théorèmes de Helmholtz. L'équation du mouvement du fluide visqueux a la forme

$$d\boldsymbol{W}/dt = (\boldsymbol{W}\nabla)\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{W} \tag{2}$$

où ν est le coefficient de viscosité cinématique. L'équation (2) est appelée l'équation de Helmholtz généralisée.

L'équation (2) devient plus simple, quand il s'agit du mouvement plan, puisque alors $v_z = 0$, et v_x, v_y ne dépendent pas de la coordonné z. Dans ce cas l'équation de continuité a la forme $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$ ce qui permet d'introduire la fonction, dite fonction du courant, définie par les égalités $v_x = \partial\Psi/\partial y$, $v_y = -\partial\Psi/\partial x$. La composante W_z du vecteur $\boldsymbol{W}$ n'est pas nulle et s'exprime comme il suit

$$W_z = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y = -\Delta\Psi$$

donc dans ce cas l'équation (2) devient

$$\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\Psi. \tag{3}$$

D'autre part, si le mouvement du fluide est permanent, la fonction Ψ ne dépend que de x et y et l'équation (3) aura la forme

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\Psi. \tag{4}$$

Hamel [1], Oseen [2], Rosenblatt [3] s'occupaient de l'équation (4), en donnant quelques solutions singulières.

L'équation (4) est une équation différentielle non-linéaire, du type elliptique. Ce type d'équations a été étudié récemment dans le cas linéaire, à l'aide d'une méthode nouvelle par J. N. Vécoua dans une monographie [4]. La méthode de Vécoua ne peut pas être appliquée directement à l'équation (4). Dans notre travail nous ne faisons usage que du changement de variables de J. N. Vécoua.

2. Solution du problème. Pour résoudre l'équation (4) introduisons les nouvelles variables

$$z = x+iy\,, \qquad \zeta = x-iy \tag{5}$$

qui prennent les valeurs complexes conjuguées, si x et y sont réelles. D'après (5) nous avons évidemment

$$x = \frac{1}{2}(z+\zeta)\,, \qquad y = \frac{1}{2i}(z-\zeta)\,. \tag{6}$$

Si dans la fonction analytique F des deux variables x et y, nous substituons les expressions (6) — la nouvelle fonction holomorphe $f(z,\zeta)$ représente un prolongement de la fonction $F(x,y)$ dans l'espace des variables complexes. Évidemment $f(z,\zeta)=F\big((z+\zeta)/2,\ (z-\zeta)/2i\big)$.

Introduisons maintenant les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{7}$$

remplissant les conditions suivantes

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\right) = \frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right) \qquad (p,q=0,1,2,\ldots)\,. \tag{8}$$

De cette manière on a défini les opérateurs

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p\,\partial \zeta^q} = \frac{1}{2^{p+q}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^q \qquad (p,q=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

En particulier il en résulte $4\partial^2/\partial z\partial\zeta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2=\Delta$ et

$$16\frac{\partial^4}{\partial z^2\,\partial \zeta^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \Delta\Delta\,. \tag{10}$$

Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial\zeta$ peuvent être appliqués à chaque fonction dérivable des variables x et y. Pourtant les expressions $\partial f/\partial z$ et $\partial f/\partial\zeta$ sont identiques aux dérivées partielles de la fonction $f(z,\zeta)$ seulement dans le cas, où la fonction f est holomorphe par rapport à z et ζ. En substituant les expressions (7)-(10) dans l'équation (4), nous obtenons

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^2\,\partial \zeta^2} - \frac{i}{2\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial z\,\partial\zeta^2} + \frac{i}{2\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\,\partial\zeta} = 0 \tag{11}$$

où $\varphi(z,\zeta)=\Psi\big((z+\zeta)/2,\ (z-\zeta)/2i\big)$. L'équation (11) représente la forme complexe de l'équation (4). D'après (7), (8), (9) nous avons $\partial^2\varphi/\partial z\partial\zeta=\partial^2\varphi/\partial\zeta\partial z$ et l'équation (11) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^2\partial\zeta^2} - \lambda\frac{\partial^2[\partial\varphi/\partial z]^2}{\partial\zeta^2} + \lambda\frac{\partial^2[\partial\varphi/\partial\zeta]^2}{\partial z^2} = 0$$

où l'on a posé $\lambda=i/4\nu$, ou bien sous la forme

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial\zeta^2}\left\{\varphi(z,\zeta) - \lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)\left[\frac{\partial\varphi(t,\zeta)}{\partial t}\right]^2 dt + \lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)\left[\frac{\partial\varphi(z,\tau)}{\partial\tau}\right]^2 d\tau\right\} = 0 \tag{12}$$

où z_0 et ζ_0 sont les points fixes dans le plan de la variable complexe. Si la fonction $\varphi(z,\zeta)$ satisfait à l'équation (12), elle satisfera à l'équation transformée de la forme

$$\varphi(z,\zeta) - \lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)\left[\frac{\partial\varphi(t,\zeta)}{\partial t}\right]^2 dt + \lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)\left[\frac{\partial\varphi(z,\tau)}{\partial\tau}\right]^2 d\tau = \varphi_0(z,\zeta) \tag{13}$$

où $\varphi_0(z,\zeta)$ est la solution holomorphe de l'équation $\partial^4\varphi/\partial z^2\partial\zeta^2=0$ et s'exprime sous la forme suivante

$$\varphi_0(z,\zeta) = z\Phi_1(\zeta) + \zeta\,\Phi_2(z) + \Phi_3(\zeta) + \Phi_4(z) \tag{14}$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ sont les fonctions holomorphes arbitrairement choisies dans le domaine $|z-z_0|\leqslant a$, $|\zeta-\zeta_0|\leqslant a$.

Nous allons résoudre maintenant l'équation intégrale (13). D'abord nous posons

$$\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial z} = u(z,\zeta)\,, \qquad \frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\zeta} = v(z,\zeta)\,, \qquad \frac{\partial u(z,\zeta)}{\partial\zeta} = \frac{\partial v(z,\zeta)}{\partial z} = w(z,\zeta)\,. \tag{15}$$

Si la fonction $\varphi(z,\zeta)$ satisfait à l'équation (13) — les fonctions $\varphi(z,\zeta)$, $u(z,\zeta)$, $v(z,\zeta)$, $w(z,\zeta)$ satisferont au système de quatre équations intégrales non-linéaires

$$\begin{aligned}
\varphi(z,\zeta) &= \varphi_0(z,\zeta) + \lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)[u(t,\zeta)]^2 dt - \lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)[v(z,\tau)]^2 d\tau\,,\\
u(z,\zeta) &= u_0(z,\zeta) + \lambda\int_{z_0}^{z}[u(t,\zeta)]^2 dt - 2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)v(z,\tau)w(z,\tau)\,d\tau\,,\\
v(z,\zeta) &= v_0(z,\zeta) + 2\lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)u(t,\zeta)w(t,\zeta)\,dt - \lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}[v(z,\tau)]^2 d\tau\,,\\
w(z,\zeta) &= w_0(z,\zeta) + 2\lambda\int_{z_0}^{z}u(t,\zeta)w(t,\zeta)\,dt - 2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}v(z,\tau)w(z,\tau)\,d\tau
\end{aligned} \tag{16}$$

où l'on a posé

$$u_0(z,\zeta)=\frac{\partial\varphi_0(z,\zeta)}{\partial z},\qquad v_0(z,\zeta)=\frac{\partial\varphi_0(z,\zeta)}{\partial\zeta},$$

(17)

$$w_0(z,\zeta)=\frac{\partial u_0(z,\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{\partial v_0(z,\zeta)}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi_0(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}.$$

Réciproquement, si les fonctions $w(z,\zeta)$, $v(z,\zeta)$, $u(z,\zeta)$, $\varphi(z,\zeta)$ satisfont au système (16) il en résulte que les égalités (15) sont vraies et la fonction $\varphi(z,\zeta)$ satisfait à l'équation (13) et à l'équation proposée (4).

Appliquons la méthode des approximations succéssives au système (16). Formons donc quatre suites infinies de fonctions

(18)

$$\begin{array}{l}\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots,\\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,\\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots,\\ w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n,\ \ldots\end{array}$$

définies par les relations de recurrence

(19)

$$\varphi_{n+1}(z,\zeta)=\varphi_0(z,\zeta)+\lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)[u_n(t,\zeta)]^2dt-\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)[v_n(z,\tau)]^2d\tau,$$

$$u_{n+1}(z,\zeta)=u_0(z,\zeta)+\lambda\int_{z_0}^{z}[u_n(t,\zeta)]^2dt-2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)v_n(z,\tau)w_n(z,\tau)d\tau,$$

$$v_{n+1}(z,\zeta)=v_0(z,\zeta)+2\lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)u_n(t,\zeta)w_n(t,\zeta)dt-\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}[v_n(z,\tau)]^2d\tau,$$

$$w_{n+1}(z,\zeta)=w_0(z,\zeta)+2\lambda\int_{z_0}^{z}u_n(t,\zeta)w_n(t,\zeta)dt-2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}v_n(z,\tau)w_n(z,\tau)d\tau$$

la fonction initiale $\varphi_0(z,\zeta)$ étant holomorphe par rapport a z et ζ, définie par (14). Les fonctions $u_0(z,\zeta)$, $v_0(z,\zeta)$, $w_0(z,\zeta)$ sont déterminées par les formules (17). Nous allons montrer d'abord, que l'on peut former les suites (18), sous la condition, que les modules de $|z-z_0|$ et $|\zeta-\zeta_0|$ sont suffisamment petits. Soit A la plus grande des bornes supérieures des modules des fonctions φ_0, u_0, v_0, w_0:

(20) $$|\varphi_0|\leqslant A,\qquad |u_0|\leqslant A,\qquad |v_0|\leqslant A,\qquad |w_0|\leqslant A$$

dans le domaine $|z-z_0|\leqslant a$, $|\zeta-\zeta_0|\leqslant a$.

Supposons, que les fonctions φ_n, u_n, v_n, w_n satisfont à la condition

(21) $$|\varphi_n|<B,\qquad |u_n|<B,\qquad |v_n|<B,\qquad |w_n|<B$$

où la constante positive B, plus grande que A est fixée arbitrairement. Cherchons une telle condition pour a, pour que les fonctions $\varphi_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ satisfassent aux inégalités (21). D'après (19) et (20) nous avons

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}|&<A+|\lambda|B^2a^2,\\ |u_{n+1}|&<A+|\lambda|B^2a^2+|\lambda|B^2a,\\ |v_{n+1}|&<A+|\lambda|B^2a^2+|\lambda|B^2a,\\ |w_{n+1}|&<A+2|\lambda|B^2a.\end{aligned}$$

Il en résulte, que si a vérifie les inégalités

$$0<a<\begin{cases}B^{-1}(B-A)^{1/2}(|\lambda|)^{-1/2},\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{4(B-A)}{|\lambda|B^2}\right)^{1/2},\\ (B-A)(4|\lambda|B^2)^{-1}\end{cases}$$

les fonctions $\varphi_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ satisfont aux conditions (21) et alors les suites des fonctions successives sont définies. Nous allons démontrer maintenant, que les suites (18) sont convergentes, et que les fonctions limites donnent la solution du problème. D'après (19) nous avons

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n=\lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)(u_n-u_{n-1})(u_n+u_{n-1})dt-$$
$$-\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)(v_n-v_{n-1})(v_n+v_{n-1})d\tau,$$

$$u_{n+1}-u_n=\lambda\int_{z_0}^{z}(u_n-u_{n-1})(u_n+u_{n-1})dt-$$
$$-2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-\tau)[w_n(v_n-v_{n-1})+v_{n-1}(w_n-w_{n-1})]d\tau,$$

$$v_{n+1}-v_n=2\lambda\int_{z_0}^{z}(z-t)[w_n(u_n-u_{n-1})+u_{n-1}(w_n-w_{n-1})]dt-$$
$$-\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}(v_n-v_{n-1})(v_n+v_{n-1})d\tau,$$

$$w_{n+1}-w_n=2\lambda\int_{z_0}^{z}[w_n(u_n-u_{n-1})+u_{n-1}(w_n-w_{n-1})dt-$$
$$-2\lambda\int_{\zeta_0}^{\zeta}[w_n(v_n-v_{n-1})+v_{n-1}(w_n-w_{n-1})]d\tau.$$

D'après (20), (21) et (15) il résulte

$$|\varphi_1-\varphi_0| < |\lambda| A^2 \frac{|z-z_0|^2}{2} + |\lambda| A^2 \frac{|\zeta-\zeta_0|^2}{2} < |\lambda| A^2 \frac{[|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|]^2}{2!},$$

$$|\varphi_2-\varphi_1| < 2|\lambda|^2 A^2 (A+B) \frac{[|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|]^3}{3!},$$

$$|\varphi_3-\varphi_2| < 2^3|\lambda|^3 A^2 (A+B) B \frac{[|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|]^4}{4!}$$

où en général

$$|\varphi_{n+1}-\varphi_n| < 2^{2n-1}|\lambda|^{n+1}(A+B)A^2B^{n-1}\frac{[|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|]^{n+2}}{(n+2)!}.$$

L'expression $[|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|]^{n+2}/(n+2)!$ est le terme du developpement en série de la fonction $\exp(|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|)$ convergente pour toute valeur de $|z-z_0|+|\zeta-\zeta_0|$. Nous pouvons tirer de ce qui précéde la conclusion suivante: La série $\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)$ est uniformement convergente, et la suite $\{\varphi_n\}$ est convergente. De la même façon nous pouvons montrer la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1}-u_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty}(v_{n+1}-v_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty}(w_{n+1}-w_n)$$

et des suites: $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$. Les fonctions limites

$$\varphi(z,\zeta) = \lim \varphi_n(z,\zeta), \qquad v(z,\zeta) = \lim v_n(z,\zeta),$$
$$u(z,\zeta) = \lim u_n(z,\zeta), \qquad w(z,\zeta) = \lim w_n(z,\zeta)$$

donnent la solution du système (16). La preuve que la solution précédente du système (16) est unique, sera la même, que dans la méthode des approximations successives en général. La fonction $\varphi(z,\zeta)$ satisfaisant au système (16) satisfait de même aux équations (13), (12) et (11). La fonction $\Psi(x,y)=\varphi(z,\zeta)$ donne la solution de l'équation proposée.

Travaux cités

[1] G. Hamel, *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 25 (1916).

[2] C. W. Oseen, *Exacte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen*, Arkiv för Mathematik (1927).

[3] A. Rosenblatt, *Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux*, Mémorial des Sciences Mathématiques (1935).

[4] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Москва-Ленинград 1948.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Some properties of plane sets with positive transfinite diameter

by A. Szybiak (Kraków)

The main object of this work is to strenghten Kellog's lemma, which states that if the boundary of the domain containing ∞ has the positive transfinite diameter [1], then there exists on this boundary a point which is regular for its Green's function. The first part contains some theorems from the general theory of the integral. The theorems in the second part are not new, but the method of the proofs seems to be new. It is shown that a Green's function constructed by the extreme points-method [5] is equal to that constructed by Frostman's "masse du balayage" [2]. The third part considers the so called "polynomial condition" ([4], [6]) and, as its consequence, the above lemma of Kellog.

I. The following two theorems are given without proof. The proofs are to be found in Frostman's paper [2].

Let X be any set in the Cartesian space, $\mathfrak{X}$ denote the class of Borel sets. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of measures on $\mathfrak{X}$. Let $\{f_n\}$ be a sequence of continuous functions converging to any function f. Then we have

THEOREM 1. *If the set $\{\mu_n(X)\}$ is bounded, there exists a subset $\{\mu_{n_k}\}$ converging*[1]) *to some measure μ.*

THEOREM 2. *If the sequences $\{\mu_n\}$ and $\{f_n\}$ are uniformly bounded on X, $\mu_n\to\mu$, $f_n\to f$ uniformly, then*

(1) $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_n = \int_X f\,d\mu.$$

I shall prove

THEOREM 3. *If the functions f_n are lower uniformly bounded on X, $f_n\geqslant M$, continuous, and for every $\varepsilon>0$ there exists a set $e=e_\varepsilon$ such that*

(i) $\mu(e)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(e)<\varepsilon$ *and*

(ii) *all $|f_n|$, except a finite number, are uniformly bounded on $X-e$, then*

(2) $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_n \geqslant \int_X f\,d\mu.$$

[1]) For the definition of this convergence cf. [2].