Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzen; oder aber es ist $s_n \geqslant i$, und dann gilt die Ungleichung

$$(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1 = \sum_{y=1}^{n} s_y \geqslant in.$$

Daraus und aus der zweiten induktiven Voraussetzung folgt $n=(j-1)\binom{m}{i}+1$. In diesem Falle enthalten die Matrizen $\left[(j-1)\binom{m}{i}+1\right] i$ Nullen und aus $s_n \geqslant i$ folgt $s_y = i$ für $y=1,2,\ldots,n$. Weil man nun i Nullen in jeder Spalte nur auf $\binom{m}{i}$ verschiedene Weisen einteilen kann, so müssen dort also, nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip, j Spalten mit gleich eingeteilten Nullen existieren, so daß die Submatrix, die von ihnen gebildet wird, die Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Remarque sur le système dynamique dans le domaine doublement connexe

par A. Pliś (Kraków)

Dans la note présente nous allons démontrer un théorème concernant l'existence du point singulier du système dynamique

$$dx/dt = X(x,y), \qquad dy/dt = Y(x,y) \tag{1}$$

dans un ensemble doublement connexe.

Hypothèse H. *Supposons que le système dynamique*[1]) *de la forme* (1) *est défini dans le plan* R^2. *Soient* C_1 *et* C_2 *deux courbes simples fermées situées dans* R^2, *dont* C_2 *est contenue à l'intérieur du domaine borné par le contour* C_1. *Désignons par* G *le domaine borné par les contours* C_1 *et* C_2. *Supposons, que l'ensemble* S *de points de sortie du domaine* G *coïncide avec l'ensemble de points de sortie stricte*[2]) *et que* $S \neq C_1$, $S \neq C_2$.

Dans l'hypothèse H, M. F. Albrecht a démontré l'existence d'une trajectoire fermée (pouvant se réduire au point singulier) du système (1) contenue dans le domaine fermé $\bar{G}$ (fermeture du domaine G; cf. [1], théorème 3).

Dans le travail présent, admettant supplémentairement $S \neq 0$, $S \neq C_1+C_2$, on démontrera qu'il existe dans $\bar{G}$ un point singulier[3]) (c'est-à-dire un point (a,b), tel que $X(a,b)=Y(a,b)=0$).

Théorème. *Admettons l'hypothèse* H *et supposons que* $S \neq 0$ *et* $S \neq C_1+C_2$. *Dans ces hypothèses il existe dans* $\bar{G}$ *au moins un point singulier.*

Démonstration. Supposons pour la démonstration par l'impossible, qu'il n'existe pas dans $\bar{G}$ de points singuliers. En vertu du théorème de F. Albrecht il existe dans $\bar{G}$ au moins une trajectoire fermée du système (1). Cette trajectoire ne se réduit pas à un point en conséquence de l'hypothèse faite precédemment. Nous allons démontrer,

---

[1]) Cette notion comprend parmi les autres propriétés celle de l'unicité des solutions du système et celle de la continuité des fonctions $X(x,y)$ et $Y(x,y)$.

[2]) Les notions du *point de sortie* et du *point de sortie stricte* ont été introduites par M. T. Ważewski. On peut trouver leurs définitions par exemple dans [4].

[3]) Le problème d'existence du point singulier dans le cas considéré ci-dessus a été posé par M. T. Ważewski.

icm©

que la courbe C_2 est contenue dans chacun des ensembles fermés ayant pour contour une trajectoire fermée quelconque, située dans $\bar{G}$. En effet, dans le cas contraire il existerait une trajectoire fermée contenue dans l'ensemble $\bar{G}$ avec le domaine J qu'elle renferme. Donc, en vertu d'un théorème bien connu, il existerait dans J au moins un point singulier (cf. [2], p. 220, théorème 10) ce qui contredit l'hypothèse introduite au commencement de la démonstration.

Il résulte des propriétés $S \neq C_1$, $S \neq C_2$, $S \neq 0$, $S \neq C_1 + C_2$ que nous avons ou bien $SC_1 \neq 0$ et $SC_1 \neq C_1$, ou bien $SC_2 \neq 0$ et $SC_2 \neq C_2$. Nous n'allons considérer que la prémière alternative $SC_1 \neq 0$ et $SC_1 \neq C_1$, car la seconde ne fournit pas de difficultés nouvelles.

Nous affirmons qu'il existe dans le domaine $\bar{G}$ une trajectoire fermée T telle, que toute autre trajectoire fermée contenue dans $\bar{G}$ est située dans le domaine limité par T. En effet une des deux trajectoires quelconques fermées et disjointes est toujours contenue dans le domaine limité par l'autre, car, comme nous venons de le démontrer, la courbe C_2 est située dans chaque domaine limité par une trajectoire fermée contenue dans $\bar{G}$. Vu cette propriété, et en vertu de ce qu'il n'y a pas dans $\bar{G}$ de points singuliers, il résulte l'existence de la trajectoire T.

La trajectoire T n'a pas de points communs avec la courbe C_1. En effet, on aurait dans le cas contraire $T = C_1$ (en raison de ce que les points de sortie de G sont des points de sortie stricte), ce qui est impossible car $SC_1 \neq 0$. Désignons par A le domaine ouvert limité par les contours T et C_1. L'ensemble de points de sortie du domaine A étant identique avec SC_1 est identique de même avec l'ensemble de points de sortie stricte de A.

Soit Z une courbe fermée contenue dans A et telle, que la courbe C_2 est contenue dans le domaine limité par Z. Désignons par $L^+(P)$ l'ensemble de tous les points $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, où $x = x(t)$, $y = y(t)$ est une solution du système (1) remplissant la condition initiale $(x(0), y(0)) = P$. En vertu de ce que $SC_1 \neq C_1$ il existe sur la courbe Z un point $P^{\sim}$ tel que $L^+(P^{\sim}) \subset \bar{A}$ (cf. [4], exemple 2). L'ensemble B de points de A tels que $L^+(P) \subset \bar{A}$ n'est donc pas vide. Il est fermé dans A, car, comme on le sait bien, la demi-trajectoire limite des demi-trajectoires situées dans un ensemble fermé appartient aussi à cet ensemble. L'ensemble B est en outre ouvert. En effet, soit P^* un point arbitraire de l'ensemble B. Il résulte de la définition de B, que $P^* \epsilon A$ et $L^+(P^*) \subset \bar{A}$. Tenant compte de ce qu'il n'existe pas dans l'ensemble A de points singuliers et qu'il n'y a pas d'autres trajectoires fermées que la trajectoire T, on conclut, que $L^+(P^*)$ est une spirale qui se condense sur T (cf. [3], p. 52, théorème 4). En conséquence de cette propriété toutes les demi-trajectoires $L^+(P)$, issues d'un certain voisinage du point P^* se condensent aussi sur T comme

des spirales. Il est facile de remarquer, que $L^+(P^*) \subset A$ car tous les points de sortie de l'ensemble A sont des points de sortie stricte. Il en résulte, que $L^+(P) \subset \bar{A}$ pour tout P d'un voisinage suffisamment petit de P^*. L'ensemble B est donc ouvert, fermé dans A et en outre $B \neq 0$, $B \subset A$. L'ensemble A étant connexe, il en résulte, que les ensembles A et B sont identiques.

Soit P_0 un point quelconque de l'ensemble SC_1. En vertu de l'hypothèse H le point P_0 est un point de sortie stricte. Il en résulte, que la relation $L^+(P) \subset \bar{A}$ ne subsiste pour aucun point appartenant à un voisinage suffisamment petit du point P_0 ce qui est en contradiction avec $A = B$.

La contradiction obtenue achève la démonstration de notre théorème.

Remarque. Si l'hypothèse H est remplie, mais $S = 0$, ou $S = C_1 + C_2$, il peut ne pas exister dans l'ensemble G de points singuliers. Au cas $S = 0$ on peut prendre comme exemple le système

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -x$$

envisagé dans l'ensemble G défini par les inégalités $1 < x^2 + y^2 < 4$.

Travaux cités

[1] F. Albrecht, *Remarque sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 315-318.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория диффеоренциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1949.

[4] A. Pliś, *On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 415-418.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES