By means of theorem 3, one can easily obtain the epidermic theorem concerning the inequalities of the form (2.1). The idea is the same as in the case of theorem 2, it is based on the application of a suitable Mayer's transformation (see [3], proof of theorem 2.1). In this note we have discussed the case of the right-hand Haar's pyramids. Analogous theorems may be proved for left-hand pyramids the direction of the differential inequalities being changed.

References

[1] J. Szarski, *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), p. 7-25.

[2] — *Sur un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre complètement intégrable*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1953), p. 9-16.

[3] — *Systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre, et leurs applications*, Ann. Pol. Math. 1 (1954), p. 149-165.

[4] T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Pol. Math. 14 (1936), p. 149-177.

[5] — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951), p. 1-12.

Teilweise Lösung eines verallgemeinerten Problems von K. Zarankiewicz

von K. Čulík (Brno)

Das Problem von K. Zarankiewicz [1]) kann man im allgemeinen Falle auf folgende Weise formulieren: Mit $A_n^m(p)$ bezeichnen wir einen Matrix, die m Reihen und n Spalten hat und die aus p Elementen die gleich 0 und aus $mn-p$ Elementen die gleich 1 sind, gebildet ist. Wir sagen, daß eine solche Matrix die Eigenschaft $\xi(i,j)$ hat, wenn ihre Submatrix $P_j^i(ij)$, wobei $1\leqslant i,j$ und $i\leqslant m$, $j\leqslant n$ ist, existiert. Für gegebene i,j und m,n besteht das verallgemeinerte Problem in der Bestimmung der minimalen natürlichen Zahl p, für welche jede Matrix $A_n^m(p)$ die Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzt. Damit aber ist eine Funktion $Z_{ij}(m,n)$ für alle natürliche Zahlen $i,j\geqslant 1$, $m\geqslant i$, $n\geqslant j$ definiert.

Wir wollen noch bemerken, daß die Eigenschaft $\xi(i,j)$ einer Matrix gegenüber dem Austausch ihrer Reihen untereinander, sowie auch ihrer Spalten invariant ist. Wenn die x-te Reihe (y-te Spalte) der Matrix $A_n^m(p)$ gerade $r_x(s_y)$ Nullen enthält, so kann man sich in der folgenden Untersuchung nur auf solche Matrizen beschränken, die die Bedingungen $r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots\geqslant r_m$, $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant s_n$ erfüllen. Diese Tatsache, daß die Reihen oder Spalten in einem gewissen Sinne geordnet sind, wird in wesentlicher Weise ausgenützt.

Für beliebige natürliche Zahlen i,j,m, $(1\leqslant i,j,\ i\leqslant m)$, und jedes genügend große n beweisen wir ein ganz allgemeines Resultat:

Satz. $Z_{ij}(m,n)=(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1$ *für* $n\geqslant(j-1)\binom{m}{i}$.

Beweis. Nach Definition der Funktion $Z_{ij}(m,n)$ genügt es den Satz nur für alle $n\geqslant\max\left[j,(j-1)\binom{m}{i}\right]$ zu beweisen. Man sieht leicht ein, daß $j>(j-1)\binom{m}{i}$ dann und nur dann ist, wenn wenigstens eine der folgenden zwei Bedingungen $j=1$, $m=i$ erfüllt ist. Für $i=1$ ist es klar, daß jede Matrix $A_n^m\{(j-1)m+1\}$ die Eigenschaft $\xi(1,j)$ hat und die Matrix $A_n^m\{(j-1)m\}$, die in jeder von ihren m Reihen gerade $j-1$ Nullen

[1]) Colloquium Mathematicum 2 (1951), S. 301, Problem 101.

hat, die Eigenschaft $\xi(1,j)$ nicht besitzt. In analoger Weise läßt sich zeigen, daß der Satz auch für $j=1$ und alle zulässige i,m,n richtig ist. Für beliebige $i,j\geqslant 2$ beweisen wir den Satz durch eine zweifache vollständige Induktion bezüglich m und n.

1. Es sei $m=i$ und n beliebig, aber $n\geqslant \max\left[j,(j-1)\binom{m}{i}\right]=j$. Die Matrix $A_n^i\{(i-1)n+j-1\}$ konstruieren wir dann folgendermassen: alle ihre $n-j+1$ Einser seien in der ersten Reihe. Besitzt eine solche Matrix nicht die Eigenschaft $\xi(i,j)$, so ist $Z_{ij}(i,n)>(i-1)n+j-1$. Es sei jetzt $A_n^i\{(i-1)n+j\}$ eine beliebige Matrix. Sie enthalte $n-j$ Einser, die wieder in höchstens $n-j$ Spalten eingeteilt seien. Es bleiben also immer j Spalten ohne Einser übrig und sie bilden eine Submatrix $P_j^i(ij)$.

2. Wir machen jetzt die erste induktive Voraussetzung und zwar, daß der Satz für jedes $m', i\leqslant m'<m$, und jedes $n'\geqslant \max\left[j,(j-1)\binom{m'}{i}\right]$ richtig ist und wir wollen beweisen, daß dies auch für m und jedes

$$n\geqslant \max\left[j,(j-1)\binom{m}{i}\right]=(j-1)\binom{m}{i}$$

der Fall ist. Dies tun wir in zwei Schritten:

a. Es sei $n=(j-1)\binom{m}{i}$. Wir konstruieren eine Matrix $A_n^m\left\{(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}\right\}$ in folgender Weise: ihre $(j-1)\binom{m}{i}i$ Nullen teilen wir in die Spalten so ein, daß in jeder Spalte gerade i Nullen sind, wobei wir jede von den $\binom{m}{i}$ Möglichkeiten, wie die i Nullen in eine einzige Spalte der m-reihigen Matrix eingeteilt werden können, eben $(j-1)$-mal wählen. Man sieht leicht ein, daß eine auf diese Weise konstruierte Matrix die Eigenschaft $\xi(i,j)$ nicht besitzt, so daß also

$$Z_{ij}(m,n)>(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}$$

gelten muß. Es sei weiter $A_n^m\left\{(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1\right\}$ eine beliebige Matrix, wobei selbstverständlich stets $n=(j-1)\binom{m}{i}$ ist. In dieser Matrix gibt es also $(j-1)\binom{m}{i}i+1$ Nullen und es sind zwei Fälle möglich: entweder ist $r_m\leqslant (j-1)\binom{m-1}{i-1}$, so daß

$$\sum_{x=1}^{m-1} r_x = p\geqslant (j-1)\binom{m}{i}i+1-(j-1)\binom{m-1}{i-1}$$
$$=(j-1)\binom{m}{i}(i-1)+(j-1)\binom{m-1}{i}+1=Z_{ij}(m-1,n)$$

ist und da $m-1\geqslant i$, $n=(j-1)\binom{m}{i}>(j-1)\binom{m-1}{i}$ ist, muß die Submatrix $P_n^{m-1}(p)$, welche von den ersten $m-1$ Reihen gebildet ist, nach der ersten induktiven Voraussetzung die Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzen; oder es ist $r_m>(j-1)\binom{m-1}{i-1}$, so daß

$$(j-1)\binom{m}{i}i+1=\sum_{x=1}^{m} r_x\geqslant m\left[(j-1)\binom{m-1}{i-1}+1\right]$$

ist. Daraus folgt aber $0\geqslant m-1$ also muß $m=1$ sein, was ein Widerspruch ist (denn es ist $m>i>1$).

b. Endlich machen wir die zweite induktive Voraussetzung und zwar, daß der Satz auch für jedes n',

$$(j-1)\binom{m}{i}\leqslant n'<n,$$

gilt. Wir setzen also voraus, daß die Gleichung

$$Z_{ij}(m,n-1)=(i-1)(n-1)+(j-1)\binom{m}{i}+1$$

gilt. Dann gibt es aber eine Matrix $A_{n-1}^m(p)$, wobei $p=(i-1)(n-1)+(j-1)\binom{m}{i}$ ist, die die Eigenschaft $\xi(i,j)$ nicht besitzt. Rändern wir diese Matrix noch mit einer weiteren Spalte, die eben $(i-1)$ Nullen enthält, so entsteht eine neue Matrix $A_n^m(p')$, $p'=p+(i-1)$, die wieder die Eigenschaft $\xi(i,j)$ nicht besitzt. Es gilt also $Z_{ij}(m,n)>(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}$. Es sei nun $A_n^m\left\{(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1\right\}$ eine beliebige Matrix. Zwei Fälle sind möglich: entweder ist $s_n<i$, so daß

$$\sum_{y=1}^{n-1} s_y = p\geqslant (i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1-(i-1)=Z_{ij}(m,n-1)$$

ist, die Submatrix $P_{n-1}^m(p)$, welche von den ersten $(n-1)$ Spalten gebildet ist, muß also der zweiten induktiven Voraussetzung nach die

Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzen; oder aber es ist $s_n \geqslant i$, und dann gilt die Ungleichung

$$(i-1)n+(j-1)\binom{m}{i}+1 = \sum_{y=1}^{n} s_y \geqslant in.$$

Daraus und aus der zweiten induktiven Voraussetzung folgt $n=(j-1)\binom{m}{i}+1$. In diesem Falle enthalten die Matrizen $\left[(j-1)\binom{m}{i}+1\right] i$ Nullen und aus $s_n \geqslant i$ folgt $s_y = i$ für $y=1,2,\ldots,n$. Weil man nun i Nullen in jeder Spalte nur auf $\binom{m}{i}$ verschiedene Weisen einteilen kann, so müssen dort also, nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip, j Spalten mit gleich eingeteilten Nullen existieren, so daß die Submatrix, die von ihnen gebildet wird, die Eigenschaft $\xi(i,j)$ besitzt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Remarque sur le système dynamique dans le domaine doublement connexe

par A. Pliś (Kraków)

Dans la note présente nous allons démontrer un théorème concernant l'existence du point singulier du système dynamique

$$(1) \qquad dx/dt = X(x,y), \qquad dy/dt = Y(x,y)$$

dans un ensemble doublement connexe.

Hypothèse H. *Supposons que le système dynamique*[1]) *de la forme* (1) *est défini dans le plan* R^2. *Soient* C_1 *et* C_2 *deux courbes simples fermées situées dans* R^2, *dont* C_2 *est contenue à l'intérieur du domaine borné par le contour* C_1. *Désignons par* G *le domaine borné par les contours* C_1 *et* C_2. *Supposons, que l'ensemble* S *de points de sortie du domaine* G *coïncide avec l'ensemble de points de sortie stricte*[2]) *et que* $S \neq C_1$, $S \neq C_2$.

Dans l'hypothèse H, M. F. Albrecht a démontré l'existence d'une trajectoire fermée (pouvant se réduire au point singulier) du système (1) contenue dans le domaine fermé $\bar{G}$ (fermeture du domaine G; cf. [1], théorème 3).

Dans le travail présent, admettant supplémentairement $S \neq 0$, $S \neq C_1 + C_2$, on démontrera qu'il existe dans $\bar{G}$ un point singulier[3]) (c'est-à-dire un point (a,b), tel que $X(a,b) = Y(a,b) = 0$).

Théorème. *Admettons l'hypothèse* H *et supposons que* $S \neq 0$ *et* $S \neq C_1 + C_2$. *Dans ces hypothèses il existe dans* $\bar{G}$ *au moins un point singulier.*

Démonstration. Supposons pour la démonstration par l'impossible, qu'il n'existe pas dans $\bar{G}$ de points singuliers. En vertu du théorème de F. Albrecht il existe dans $\bar{G}$ au moins une trajectoire fermée du système (1). Cette trajectoire ne se réduit pas à un point en conséquence de l'hypothèse faite precédemment. Nous allons démontrer,

---

[1]) Cette notion comprend parmi les autres propriétés celle de l'unicité des solutions du système et celle de la continuité des fonctions $X(x,y)$ et $Y(x,y)$.

[2]) Les notions du *point de sortie* et du *point de sortie stricte* ont été introduites par M. T. Ważewski. On peut trouver leurs définitions par exemple dans [4].

[3]) Le problème d'existence du point singulier dans le cas considéré ci-dessus a été posé par M. T. Ważewski.