Sur le problème de Fourier généralisé

par W. Pogorzelski (Warszawa)

Soit un domaine borné Ω dans l'espace euclidien à n dimensions, limité par l'hypersurface fermée S. Dans cette note nous allons résoudre le problème de la recherche d'une fonction $u(A,t)$, qui en tout point intérieur $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ du domaine Ω et pour $t>0$ dans l'intervalle $(0,T)$ vérifie l'équation de conductibilité généralisée

$$\sum_{\nu=1}^{n}\partial^2 u/\partial x_\nu^2-\partial u/\partial t=F(A,t,u) \tag{1}$$

et en tout point P de la surface S vérifie la condition limite

$$\left(du/dn_P\right)_t=\Phi(P,t,u_P) \tag{2}$$

pour $0<t\leqslant T$. En outre on pose la condition initiale

$$u(A,t)\underset{t\to 0}{\to}0;\qquad A\in\Omega. \tag{3}$$

Le problème cité était traité par M. Czyżykowski [1] dans le cas $F=0$ selon la méthode classique des approximations successives, sous la supposition que la fonction $\Phi(P,t,u)$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la variable u.

Dans ce travail nous allons présenter la solution du problème, exprimé par les équations (1) et (2), sous les suppositions plus générales concernant les fonctions F et Φ. Nous admettons notamment les suppositions suivantes:

I. La fonction donnée $F(A,t,u)$ est déterminée dans la région fermée

$$A\in\Omega+S,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\qquad |u|\leqslant R, \tag{4}$$

elle vérifie la condition d'Hölder par rapport aux variables A,u:

$$|F(A,t,u)-F(A_1,t,u_1)|<k[r_{AA_1}^{\mu}+|u-u_1|^{\mu}]$$

$(0<\mu\leqslant 1)$ et est *continue* par rapport à la variable t.

II. La fonction donnée $\Phi(P,t,u)$ est déterminée dans la région fermée

$$P\in S,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\qquad |u|\leqslant R$$

et n'est que *continue* dans cette région.

III. La surface S vérifie les conditions connues de Liapounoff.

Le problème étant irrésoluble, sous ces suppositions, selon la méthode classique, nous allons le résoudre par l'application du théorème topologique de J. Schauder [4]:

„Toute transformation continue d'un ensemble convexe, borné, fermé et contenu dans un espace linéaire, normé et complet, en un sous-ensemble compact a, au moins un point invariant".

Considérons donc l'équation intégrale

$$u(A,t)=-\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\int_0^t\int\int_\Omega\int\frac{F[B,\tau,u(B,\tau)]}{(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[-\frac{r_{AB}^2}{4(t-\tau)}\right]d\Omega_B\,d\tau+ \tag{5}$$
$$+\int_0^t\int_S\int\frac{\varphi(Q,\tau)}{(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4(t-\tau)}\right]d\sigma_Q\,d\tau$$

où r_{AB} désigne la distance des points A, B, la première intégrale est analogue au potentiel de la charge spatiale et la seconde intégrale est analogue au potentiel de la couche simple; $\varphi(Q,\tau)$ désigne une fonction continue indéterminée. Dans l'équation (5) on a conservé les signes de l'intégrale de volume et de surface comme dans l'espace à trois dimensions.

Si la fonction $u(A,t)$ vérifie l'équation (5), alors elle admet les dérivées premières à l'intérieur de la région $[\Omega,(0,T)]$ et par conséquent la fonction $F_1(B)=F[B,\tau,u(B,\tau)]$ vérifie la condition d'Hölder dans tout domaine fermé Ω_1 situé à l'intérieur du domaine Ω. Il en résulte, d'après les propriétés connues des intégrales (5), que la fonction $u(A,t)$ qui vérifie l'équation (5), vérifie de même l'équation différentielle (1) en tout point A à l'intérieur du domaine Ω et pour t à l'intérieur de l'intervalle $(0,T)$. Cette fonction vérifie aussi la condition initiale (3).

Nous profiterons maintenant de l'indétermination de la fonction $\varphi(P,t)$ sur la surface S et nous déterminerons cette fonction de façon que la condition limite (2) soit satisfaite.

En demandant que la somme des intégrales (4) satisfasse à la condition (2) en tout point P de la surface S et en s'appuyant sur la propriété de la dérivée suivant la normale intérieur de l'intégrale de surface (5), on arrive à une seconde équation intégrale suivante:

$$(6)\quad \left(\frac{du}{dn_P}\right)_t = -\frac{\lambda}{2}\int_0^t\iiint_{\Omega}\frac{r_{PB}\cos\nu_{PB}}{(t-\tau)^{n/2+1}}\exp\left[-\frac{r_{PB}^2}{4(t-\tau)}\right]F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\varphi(P,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\iint_S\frac{r_{PQ}\cos\nu_{PQ}}{(t-\tau)^{n/2+1}}\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}\right]\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau$$

$$=\Phi\left[P,t,\lambda\int_0^t\iiint_{\Omega}\frac{F[B,\tau,u(B,\tau)]}{(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[-\frac{r_{PB}^2}{4(t-\tau)}\right]d\Omega_B\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\iint_S\frac{\varphi(Q,t)}{(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}\right]d\sigma_Q\,d\tau\right]$$

où l'on a posé $\lambda=1/(2\sqrt{\pi})^n$; ν_{PB} désigne l'angle que fait le vecteur PB avec la normale intérieure au point P. Notre problème est donc amené à la résolution du système de deux équations intégrales (5) et (6) à deux fonctions inconnues $u(A,t)$ et $\varphi(P,t)$, la première dans la région $[\Omega,(0,T)]$ et la seconde dans la région $[S,(0,T)]$.

Écrivons les équations (5) et (6) sous la forme

$$(7)\qquad u(A,t) = -\lambda\int_0^t\iiint_{\Omega}N(A,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\iint_S N(A,Q,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau,$$

$$\varphi(P,t) = \lambda\int_0^t\iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau-$$

$$-\lambda^2\int_0^t\iiint_{\Omega}N^*(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau-$$

$$-2\lambda\Phi\Big\{P,t,\lambda\int_0^t\iiint_{\Omega}N(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\iint_S N(P,Q,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau\Big\}$$

où l'on a posé pour abréger

$$(8)\qquad \begin{aligned} N(A,B,t) &= (1/t^{n/2})\exp[-r_{AB}^2/4t],\\ N^*(P,B,t) &= (r_{PB}\cos\nu_{PB}/t^{n/2+1})\exp[-r_{PB}^2/4t]. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'existence d'une solution du système (7), considérons l'espace fonctionel Λ composé de tous les couples $[u(A,t),\varphi(P,t)]$ de fonctions réelles *continues*: $u(A,t)$ définie dans la région *fermée* $[\Omega+S,(0,T)]$ et $\varphi(P,t)$ définie dans la région fermée $[S,(0,T)]$. Cet espace sera *complet*, *linéaire* et *normé*, si nous adoptons la définition connue suivante de la distance

$$(9)\qquad \delta(U,V)=\sup|u(A,t)-u^*(A,t)|+\sup|\varphi(P,t)-\varphi^*(P,t)|$$

de deux points

$$U[u(A,t);\ \varphi(P,t)],\qquad V[u^*(A,t);\ \varphi^*(P,t)]$$

et des opérations linéaires

$$(10)\qquad [u,\varphi]+[u^*,\varphi^*]=[u+u^*,\ \varphi+\varphi^*],\qquad \gamma[u,\varphi]=[\gamma u,\gamma\varphi],$$

γ étant réel.

Remarquons maintenant qu'on a $(n\geqslant 3)$

$$(11)\qquad \lambda\int_0^t\iiint_{\Omega}N(A,B,t-\tau)\,d\Omega_B\,d\tau=\lambda\iiint_{\Omega}\frac{d\Omega_B}{r_{AB}^{n-2}}\int_{r_{AB}^2/4t}^{\infty}2^{n-2}q^{n/2-2}e^{-q}\,dq$$

$$\leqslant 2^{n-2}\lambda\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\iiint_{\Omega}\frac{d\Omega_B}{r_{AB}^{n-2}}\leqslant 2^{n-2}\lambda\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\int_0^L\frac{\omega_n r^{n-1}dr}{r^{n-2}}$$

$$=2^{n-3}\lambda\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\omega_nL^2=L^2/2(n-2)$$

pour tout point $A\epsilon\Omega+S$, L désignant le diamètre du domaine Ω; nous supposons qu'on a

$$(12)\qquad M_FL^2/2(n-2)<R,$$

M_F désignant la borne supérieure de la fonction $|F(A,t,u)|$ dans la région (4).

Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble E, composé de tous les points $U[u(A,t);\varphi(P,t)]$ qui satisfont aux inégalités

$$(13)\qquad |u(A,t)|\leqslant R,\qquad |\varphi(P,t)|\leqslant R/s-M_FL^2/2s(n-2),$$

s désignant la borne supérieure de l'intégrale

$$(14)\qquad \int_0^t\iint_S N(P,Q,t-\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau=2^{n-2}\iint_S\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-2}}\left[\int_{r_{PQ}^2/4t}^{\infty}q^{n/2-2}e^{-q}\,dq\right]\leqslant s$$

dans la région $[S;(0,T)]$, cette borne tend vers zéro si le diamètre L tend vers zéro.

L'ensemble E est évidemment *convexe*; en effet, si deux points $U(u,\varphi)$ et $U^*(u^*,\varphi^*)$ appartiennent à l'ensemble E, alors tous les points $(1-\gamma)U+\gamma U^*$ $(0\leqslant\gamma\leqslant 1)$ du segment rectiligne, joignant ces points, appartiennent aussi à l'ensemble E.

En tenant compte des équations intégrales (7), transformons l'ensemble E à l'aide des relations

$$(15)\qquad v(A,t) = -\lambda\int_0^t\iiint_{\Omega} N(A,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau + \int_0^t\iint_S N(A,Q,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau,$$

$$\psi(P,t) = \lambda\int_0^t\iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau - \lambda^2\int_0^t\iiint_{\Omega} N^*(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau - 2\lambda\,\Phi\Big\{P,t,\lambda\int_0^t\iiint_{\Omega}N(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau + \int_0^t\iint_S N(P,Q,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau\Big\}.$$

Nous démontrerons, que les relations (15) font correspondre à tout point (u,φ) de l'ensemble E un point déterminé (v,ψ) de l'espace Λ.

Dans ce but rappelons d'abord quelques propriétés concernant l'équation intégrale linéaire

$$(16)\qquad \psi(P,t) = \lambda\int_0^t\iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau + f(P,t)$$

où $f(P,t)$ est une fonction continue déterminée dans la région $[S,(0,T)]$. L'équation intégrale (16), concernant le problème linéaire de Fourier, était étudiée par l'auteur dans le travail [2].

Remarquons donc que l'équation (16) est équivalente à l'équation itérée

$$(17)\qquad \psi(P,t) = \lambda^2\int_0^t\iint_S M(P,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau + f_1(P,t)$$

où l'on a désigné

$$(17')\qquad \begin{aligned} M(P,t;Q,\tau) &= \int_\tau^t\iint_{S\,(\Pi)} N^*(P,\Pi,t-\zeta)N^*(\Pi,Q,\zeta-\tau)\,d\sigma_\Pi\,d\zeta,\\ f_1(P,t) &= f(P,t)+\lambda\int_0^t\iint_S N^*(P,Q,t-\tau)f(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau. \end{aligned}$$

Par la méthode, exposée dans le travail [2], on obtient une limitation suivante aux faibles singularités *séparées* du noyau M:

$$(18)\qquad |M(P,t;Q,\tau)| < \frac{C}{(t-\tau)^{1-\theta h}}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{n-(1-2\theta)h-2}}$$

où $h\leqslant 1$ est l'exposant positif d'Hölder dans la condition de Liapounoff, θ est une constante positive, inférieure à l'unité, arbitrairement fixée, C est une constante positive dépendant de la surface S et de la constante θ choisie.

La solution unique de l'équation intégrale (17) a la forme

$$(19)\qquad \psi(P,t) = \lambda^2\int_0^t\iint_S \mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)f_1(Q,\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau + f_1(P,t)$$

où le noyau résolvant $\mathfrak{M}$ du noyau M est la somme d'une série

$$(20)\qquad \mathfrak{M}(P,t;Q,\tau) = \sum_{a=0}^{\infty}\lambda^{2a}M_a(P,t;Q,\tau)\qquad (M_0=M).$$

D'après la limitation (18) et la relation de récurrence

$$(21)\qquad M_a(P,t;Q,\tau) = \int_0^t\iint_S M(P,t;\Pi,\beta)M_{a-1}(\Pi,\beta;Q,\tau)\,d\sigma_\Pi\,d\beta$$

les termes de la série (20) sont *bornés* à partir d'un certain indice a_0 et ils vérifient les inégalités suivantes [3]:

$$(22)\qquad |M_{a_0+\nu}(P,t;Q,\tau)| < \frac{1}{\theta h}\,g\,\frac{[g_1\Gamma(\theta h)(t-\tau)^{\theta h}]^\nu}{\nu\Gamma(\nu\theta h)}$$

$(\nu=1,2,\ldots)$, g et g_1 étant les bornes supérieures des expressions

$$(23)\qquad M_{a_0}\leqslant g,\qquad \iint_S\frac{C\,d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-(1-2\theta)h-2}}\leqslant g_1.$$

La présence du facteur $\Gamma(\nu\theta h)$ au dénominateur de la limitation (22) assure la convergence absolue et uniforme de la série (20), à partir de l'indice a_0, *quel que soit λ et quelque grand que soit l'intervalle* $(0, T)$ *de la variable* t.

D'après la formule (17'), nous pouvons écrire la solution unique (19) de l'équation intégrale (17) sous la forme

$$\psi(P,t) = \lambda \int_0^t \underset{(Q)}{\iint_S} \mathfrak{N}(P,t;Q,\tau) f(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau + f(P,t) \tag{24}$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau) = \lambda \mathfrak{M}(P,t;Q,\tau) + N^*(P,Q;t-\tau) + \\ + \lambda \int_\tau^t \underset{(\Pi)}{\iint_S} \mathfrak{M}(P,t;\Pi,\zeta) N^*(\Pi,Q,\zeta-\tau)\, d\sigma_\Pi\, d\zeta. \tag{25}$$

En nous basant sur les propriétés citées de l'équation (16), nous pouvons affirmer que la seconde relation intégrale (15) est équivalente à la relation

$$\psi(P,t) = \lambda \int_0^t \underset{(Q)}{\iint_S} \mathfrak{N}(P,t;Q,\tau) \hat{H}(Q,\tau;u,\varphi)\, d\sigma_Q\, d\tau + \hat{H}(P,\tau;u,\varphi) \tag{26}$$

ou $\hat{H}$ est le résultat d'une opération fonctionelle sur les fonctions u et φ, déterminée par la formule

$$\hat{H}(P,t;u,\varphi) = -\lambda^2 \int_0^t \iiint_\Omega N^*(P,B,t-\zeta) F[B,\zeta,u(B,\zeta)]\, d\Omega_B\, d\zeta - \\ -2\lambda \Phi\Big\{P,t,\lambda \int_0^t \iiint_\Omega N(P,B,t-\zeta) F[B,\zeta,u(B,\zeta)]\, d\Omega_B\, d\zeta + \\ + \int_0 \iint_S N(P,\Pi,t-\zeta)\varphi(\Pi,\zeta)\, d\sigma_\Pi\, d\zeta\Big\}. \tag{27}$$

Nous en concluons, remarque faite des inégalités (13), que les relations (15) font correspondre à tout point (u,φ) de l'ensemble E un point déterminé (v,ψ) de l'espace Λ. Cherchons la condition pour que l'ensemble E' de tous les points (v,ψ), correspondant aux points de l'ensemble E, fasse partie de cet ensemble. Pour trouver la limitation de la fonction $|\psi|$, remarquons qu'on a

$$\left|\lambda \int_0^t \iiint_\Omega N^*(P,B,t-\tau)\, d\Omega_B\, d\tau\right| \leqslant 2^{n+2}\lambda \iiint_\Omega \frac{d\Omega_B}{r_{PB}^{n-1}} \left[\int_{r_{BP}^2/4t}^\infty q^{n/2} e^{-q}\, dq\right] \\ \leqslant 2^{n+2}\lambda \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \int_0^L \omega_n\, dr = 4nL \tag{28}$$

et ensuite désignons par s^* la borne supérieure de l'intégrale à la droite dans l'inégalité

$$\left|\lambda \int_0^t \iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau\right| < 2^{n+2}\varkappa\lambda \iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-h-1}} \left[\int_{r_{PQ}^2/4t}^\infty q^{n/2} e^{-q}\, dq\right] \leqslant s^* \tag{29}$$

où $\varkappa$ désigne le coefficient dans l'inégalité

$$|\cos \nu_{PQ}| < \varkappa r_{PQ}^h \qquad (0 < h \leqslant 1) \tag{29'}$$

résultant de la condition de Liapounoff. La borne s^*, de même que s tend vers zéro avec L.

Les limitations (14), (28), (29) nous apprennent que les intégrales correspondant restent bornées si $t \to \infty$. Pour les cas où t tend vers zéro, on peut obtenir une autre limitation, qui montre que ces intégrales tendent vers zéro avec t. Nous obtenons notamment

$$\left|\lambda \int_0^t \iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau\right| \leqslant \lambda t^a \int_0^t \iint_S \frac{\varkappa r_{PQ}^{h+1}}{(t-\tau)^{n/2+1+a}} \exp\left[\frac{-r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}\right] d\sigma_Q\, d\tau \\ = 2^{n+2a}\varkappa\lambda t^a \iint_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1+2a-h}} \int_{r_{PQ}^2/4t}^\infty q^{n/2+a-1} e^{-q}\, dq.$$

En choisissant $a = \theta \cdot \frac{1}{2}h$, où θ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité, nous aurons une autre limitation

$$\left|\lambda \int_0^t \iint_S N^*(P,Q,t-\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau\right| \leqslant \text{const}\, t^{\theta h/2}. \tag{29''}$$

D'après l'inégalité (28), le résultat de l'opération (27) sur les points (u,φ) de l'ensemble E, vérifie l'inégalité

$$|\hat{H}(P,t;u,\varphi)| \leqslant 4\lambda^2 nLM_F + 2\lambda M_\Phi, \tag{30}$$

M_F et M_Φ désignant les bornes supérieures des fonctions $|F|$ et $|\Phi|$. Cherchons maintenant la limitation de l'intégrale dans la relation (26). D'après les égalités (20), (21) et les inégalités (18), (22), nous avons

$$|\mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)| < \sum_{a=1}^{a_0-1} \frac{c_a}{(t-\tau)^{1-a\theta h}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{n-1-a[(1-2\theta)h+1]}} + \\ + g\lambda^{2a_0} + \frac{1}{\theta h} g\lambda^{2a_0} \sum_{\nu=1}^\infty \frac{[g_1 \Gamma(\theta h)(t-\tau)^{\theta h}]^\nu}{\nu \Gamma(\nu\theta h)} \lambda^{2\nu} \tag{31}$$

d'où résulte la limitation

$$(32)\qquad \lambda \int_0^t \iint_{\substack{S\\(Q)}} |\mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)|\, d\sigma_Q\, d\tau \leqslant K \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[g_1\lambda^2\Gamma(\theta h)]^\nu}{\nu\Gamma(\nu\theta h)(\nu\theta h+1)}\, t^{\nu\theta h+1} + K' t^{\theta h}$$

quel que soit t; K, K' désignent les constantes positives déterminées, qui ne dépendent que de la surface S. Pour trouver la limitation de l'intégrale qui figure dans l'expression (25) nous appliquerons la méthode indiquée dans notre travail [2], en décomposant l'intervalle d'intégration (τ,t) en deux intervalles $\big(\tau,(\tau+t)/2\big)$, $\big((\tau+t)/2,t\big)$ et nous aurons la limitation

$$(33)\qquad \left|\int_\tau^t \frac{1}{(t-\zeta)^p}\cdot\frac{1}{r_{P\Pi}^q}\cdot\frac{r_{PQ}^{h+1}}{(\zeta-\tau)^{n/2+1}} \exp\left[-\frac{r_{\Pi Q}^2}{4(\zeta-\tau)}\right] d\zeta\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^p}\cdot\frac{1}{r_{P\Pi}^q r_{\Pi Q}^{n-1-h}}$$

où p, q sont les constantes positives vérifiant les inégalités $p<1$, $q<n-1$.

En s'appuyant sur l'inégalité (33) nous aurons pour l'intégrale dans l'expression (25) une limitation de la même forme que (32) et nous en déduirons la limitation suivante:

$$(34)\qquad \lambda \int_0^t \iint_S |\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)|\, d\sigma_Q\, d\tau$$
$$< K_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[g_1\lambda^2\Gamma(\theta h)]^\nu}{\nu(\nu\theta h+1)\Gamma(\nu\theta h)}\, t^{\nu\theta h+2} + K_1' t^{\theta h/2} = \Psi(t)$$

K_1, K_1', étant les constantes positives déterminées, ne dépendant que de la surface S. Nous en concluons que les résultats de l'opération (26) vérifient l'inégalité

$$(35)\qquad |\psi(P,t)| \leqslant (4\lambda^2 nLM_F + 2\lambda M_\Phi)[1+\Psi(t)].$$

En remarquant encore, d'après la supposition (12) et (13) que la fonction $v(A,t)$ vérifie la condition

$$(36)\qquad |v(A,t)| \leqslant R$$

nous pouvons affirmer que tout point (v,ψ), transformé du point (u,φ) appartiendra à l'ensemble E, si les bornes supérieures M_F et M_Φ des fonctions F et Φ vérifient la condition suivante:

$$(37)\qquad (4\lambda^2 nLM_F + 2\lambda M_\Phi)[1+\Psi(T)] \leqslant R/s - M_F L^2/2s(n-2).$$

Nous démontrerons que la transformation fonctionelle, définie par les relations (15) et (26), est *continue* dans l'ensemble E. Soit donc une

suite de points $\{U_m(u_m,\varphi_m)\}$ de l'ensemble E tendant vers le point $U(u,\varphi)$ de cet ensemble, on a donc

$$\delta(U_m, U) \to 0$$

si $m\to\infty$, par conséquent d'après la définition (9) de la distance, les suites de fonctions $\{u_m(A,t)\}$ et $\{\varphi_m(P,t)\}$ convergent uniformément resp. vers les fonctions $u(A,t)$ et $\varphi(P,t)$. Nous démontrerons que la suite $\{V_m(v_m,\psi_m)\}$ de points transformés des points $U_m(u_m,\varphi_m)$ tend vers le point $V(v,\psi)$ qui correspond au point limite $U(u,\varphi)$ par les relations (15) et (26).

Étudions donc les différences v_m-v et $\psi_m-\psi$. Nous avons, d'après les limitations (11) et (14),

$$|v_m - v| \leqslant \frac{L^2}{2(n-2)} \sup|F(B,\tau,u_m) - F(B,\tau,u)| + s\cdot\sup|\varphi_m-\varphi|;$$

il en résulte immédiatement que la différence v_m-v tend uniformément vers zéro, si $m\to\infty$. D'après la relation (26) et la limitation (34) nous avons ensuite

$$(39)\qquad |\psi_m - \psi| \leqslant [\Psi(T)+1] \sup|\hat{H}(P,t,u_m,\varphi_m) - \hat{H}(P,t,u,\varphi)|.$$

Nous en concluons, en tenant compte de l'expression (27) et de la limitation (28), que la différence (39) tend aussi uniformément vers zéro et par conséquent la transformation (15) de l'ensemble E en ensemble E' est *continue*.

Il reste à étudier une question plus difficile si l'ensemble transformé E' est *compact*. Remarquons d'abord que les fonctions $v(A,t)$, $\psi(P,t)$, composantes des points de l'ensemble E', sont *équibornées*, puisque $E'\subset E$. Nous allons démontrer que ces fonctions sont *équicontinues*. Dans ce but nous démontrerons que toutes les intégrales dans les relations (15) sont des fonctions équicontinues. Il suffit de prouver cette propriété pour les trois intégrales

$$J_1(P,t) = \lambda \int_0^t \iiint_\Omega N^*(P,B,t-\tau) F[B,\tau,u(B,\tau)]\, d\Omega_B\, d\tau,$$

$$(40)\qquad J_2(A,t) = \lambda \int_0^t \iint_S N(A,B,t-\tau)\varphi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau,$$

$$J_3(P,t) = \lambda \int_0^t \iint_S N^*(P,B,t-\tau)\psi(Q,\tau)\, d\sigma_Q\, d\tau,$$

sachant que $u(B,\tau)$, $\varphi(Q,\tau)$, $\psi(Q,\tau)$ forment les familles de fonctions *continues*, vérifiant les inégalités

$$(41)\qquad |u| \leqslant R; \qquad |\varphi| \leqslant R/s - M_F L^2/2s(n-2) = M_\varphi; \qquad |\psi| \leqslant M_\Psi.$$

Considérons l'intégrale $J_1(A,t)$ et étudions d'abord sa continuité par rapport à la variable t. Écrivons donc

$$(42)\quad J_1(P,t)-J_1(P,t_1)=\lambda\int_{t_1}^{t}\iiint_{\Omega} N^*(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau+$$

$$+\lambda\iiint_{\Omega}\int_{0}^{t_1}[N^*(P,B,t-\tau)-N^*(P,B,t_1-\tau)]F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau$$

($t_1<t$). En faisant le changement de la variable d'intégration, nous obtenons pour la première intégrale (42) la limitation suivante:

$$(43)\quad \left|\lambda\int_{t_1}^{t}\iiint_{\Omega} N^*(P,B,t-\tau)F\cdot d\Omega_B\,d\tau\right|$$

$$<2^{n+2\alpha}|\lambda|\,(t-t_1)^{\alpha}M_F\iiint_{\Omega}\frac{d\Omega_B}{r_{PB}^{n-1+2\alpha}}\left[\int_{r_{PB}^2/4(t-t_1)}^{\infty} q^{n/2-1+\alpha}e^{-q}\,dq\right].$$

En demandant qu'on ait $n-1+2\alpha\leqslant n$, on pose $\alpha=\theta/2$, où θ est une valeur positive choisie quelconque, inférieure à l'unité, et on arrive à l'inégalité

$$(44)\quad \left|\lambda\int_{t_1}^{t}\iiint_{\Omega} N(P,B,t-\tau)F\,d\Omega_B\,d\tau\right|$$

$$<(t-t_1)^{\theta/2}M_F 2^{n+\theta}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\lambda\int_0^L\frac{\omega_n r^{n-1}dr}{r^{n-1+\theta}}$$

$$<\frac{2n}{1-\theta}L^{1-\theta}M_F(t-t_1)^{\theta/2}.$$

Nous aurons donc pour ε positif arbitraire l'inégalité

$$(45)\quad \left|\lambda\int_{t_1}^{t}\iiint_{\Omega} N^*(P,B,t-\tau)F[B,\tau,u(B,\tau)]\,d\Omega_B\,d\tau\right|<\varepsilon/4$$

$$\text{si}\quad t-t_1<\eta_1=\left[\frac{\varepsilon(1-\theta)}{8nL^{1-\theta}M_F}\right]^{2/\theta}$$

vraie en tout point $A\in\Omega+S$, pour deux valeurs t_1,t quelconques dans l'intervalle $(0,T)$ et pour toute fonction continue $u(B,\tau)$, dont la valeur absolue ne dépasse pas R.

Soit maintenant une sphère K_ε de centre P et de rayon r_ε; on aura alors, d'après la limitation (28),

$$(46)\quad \left|\lambda\iiint_{K'_\varepsilon}\int_0^{t_1}[N^*(P,B,t-\tau)-N^*(P,B,t_1-\tau)]F\,d\Omega_B\,d\tau\right|$$

$$<2^{n+3}M_F\lambda\Gamma(n/2+1)\int_0^{r_\varepsilon}\omega_n\,dr=8nM_F r_\varepsilon=\varepsilon/8$$

si nous adoptons la valeur

$$(46')\quad r_\varepsilon=\varepsilon/64nM_F.$$

K'_ε désigne l'ensemble de tous les points communs au domaine Ω et à la sphère K_ε. Le rayon r_ε de la sphère K_ε étant fixé, remarquons que, d'après l'expression (8), on a ($t>0$)

$$(47)\quad |N_t^{*\prime}(P,B,t)|$$

$$=\left|-\frac{(n+2)r_{PB}\cos\nu_{PB}}{2t^{n/2+2}}\exp\left[-\frac{r_{PB}^2}{4t}\right]+\frac{r_{PB}^3\cos\nu_{PB}}{4t^{n/2}+3}\exp\left[-\frac{r_{PB}^2}{4t}\right]\right|$$

$$\leqslant\left[\frac{(n+2)L}{2t^{n/2+2}}+\frac{L^3}{4t^{n/2+3}}\right]\exp\left[-\frac{r_\varepsilon^2}{4t}\right]$$

$$\leqslant 2^{n/2+1}[2(n+2)LT+L^3](n+6)^{n/2+3}\cdot e^{-n/2-3}\cdot r_\varepsilon^{-n-6}=\varkappa_\varepsilon$$

si le point B est situé à l'extérieur de la sphère K_ε. Nous voyons donc que la valeur absolue de la dérivée $N_t^{*\prime}$ admet une limite supérieure déterminée $\varkappa_\varepsilon$, ne dépendant que de ε et de M_F

$$|N_t^{*\prime}(P,B,t)|<\varkappa_\varepsilon$$

si $B\in\Omega-K'_1$, P est un point quelconque de la surface S, t est une valeur positive quelconque. Nous constatons donc que la fonction N^* vérifie l'inégalité

$$(48)\quad |N^*(P,B,t-\tau)-N^*(P,B,t_1-\tau)|\leqslant\varkappa_\varepsilon|t_1-t|$$

si $P\in S$, $B\in\Omega-K'_\varepsilon$. Nous en concluons pour l'intégrale étendue à la partie extérieure $\Omega-K'_\varepsilon$ l'inégalité

$$(49)\quad \left|\lambda\iiint_{\Omega-K'_1}\int_0^{t_1}[N^*(P,B,t-\tau)-N^*(P,B,t_1-\tau)]F\,d\Omega_B\,d\tau\right|$$

$$<\lambda TV_\Omega\varkappa_\varepsilon M_F|t-t_1|<\varepsilon/8$$

si $t-t_1<\eta_2=\varepsilon/8\lambda TV_\Omega\varkappa_\varepsilon M_F$, V_Ω désignant le volume du domaine Ω.

En réunissant les résultats (45), (46), (49), nous pouvons affirmer que la différence des intégrales (43) vérifie l'inégalité

$$(50)\qquad |J_1(A,t)-J_1(A,t_1)|<\varepsilon/2$$

si $t-t_1<\eta_\varepsilon$, où η_ε est le plus petit des deux nombres η_1,η_2 et ne dépend que du nombre ε et de M_F.

Pour étudier la continuité de la fonction $J_1(P,t)$ par rapport au point P de la surface S, décomposons cette intégrale en deux parties

$$J_1(P,t)=J_1^{K_\varepsilon'}(P,t)+J_1^{\Omega-K_\varepsilon'}(P,t)$$

étendues au domaine K_ε' et au domaine extérieur $\Omega-K_\varepsilon'$. Si P_1 est un point arbitraire de la surface S, dont la distance du point P ne dépasse pas $r_\varepsilon/2$ nous pouvons écrire, d'après l'inégalité (28),

$$(51)\qquad |J_1^{K_\varepsilon'}(P,t)|<4nM_Fr_\varepsilon;\qquad |J_1^{K_\varepsilon'}(P_1,t)|<6nM_Fr_\varepsilon.$$

Nous aurons donc

$$(52)\qquad |J_1^{K_\varepsilon'}(P,t)-J_1^{K_\varepsilon'}(P_1,t)|<5\varepsilon/32$$

en choisissant la même valeur (46') du rayon r_ε. La sphère K étant fixée, posons $s=1/(t-\tau)$ et écrivons la différence des valeurs de l'intégrale $J_1^{\Omega-K_\varepsilon'}$ aux points P et P_1 de la façon suivante:

$$(53)\qquad J_1^{\Omega-K_\varepsilon'}(P,t)-J_1^{\Omega-K_\varepsilon'}(P_1,t)$$

$$=\lambda\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon'}(r_{PB}\cos\nu_{PB}-r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B})\Big[\int\limits_{1/t}^{\infty}s^{n/2-1}\exp(-sr_{PB}^2/4)F\,ds\Big]d\Omega_B+$$

$$+\lambda\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon}r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B}\Big\{\int\limits_{1/t}^{\infty}s^{n/2-1}[\exp(-sr_{PB}^2/4)-\exp(-sr_{P_1B}^2/4)]F\,ds\Big\}d\Omega_B.$$

Considérons un système d'axes des coordonnées rectangulaires avec l'axe Px_1 normale intérieure à la surface S et les axes $Px_2,\dots,Px_n$ dans le plan tangent. Désignons par $(x_1^B,\dots,x_n^B)$ les coordonnées du point B, par $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ les coordonnées du point P_1, par $(a_1,\dots,a_n)$ les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point P_1; on a alors

$$r_{PB}\cos\nu_{PB}-r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B}=x_1^B-\sum_{j=1}^{n}(x_j^B-\xi_j)a_j$$

$$=x_1^B(1-a_1)+\xi_1a_1-\sum_{j=2}^{n}(x_j^B-\xi_j)a_j$$

d'où

$$|r_{PB}\cos\nu_{PB}-r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B}|<L|1-a_1|+|r_{PP_1}|+L\sum_{\nu=2}^{n}|a_\nu|.$$

Donc, d'après les conditions de Liapounoff (voir mon travail [3]), il existe une constante positive k_1, ne dépendant que de la surface S, telle qu'on a

$$(54)\qquad |r_{PB}\cos\nu_{PB}-r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B}|<k_1r_{PP_1}^h$$

quel que soit $B\in\Omega$. Nous avons ensuite la limitation

$$\Big|\int\limits_{1/t}^{\infty}s^{n/2-1}\exp(-r_{PB}^2s/4)F\,ds\Big|\leqslant 2^nM_F\Gamma(n/2)/r_{PB}^n;$$

par conséquent la première intégrale dans la somme (53) vérifie l'inégalité

$$(55)\qquad \Big|\lambda\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon'}(r_{PB}\cos\nu_{PB}-r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B})\Big[\int\limits_{1/t}^{\infty}s^{n/2-1}\exp(-r_{PB}^2s/4)F\,ds\Big]d\Omega_B\Big|$$

$$<2^nk_1\lambda M_F\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)r_{PP_1}^h\iiint\limits_{\Omega-K'}\frac{d\Omega_B}{r_{PB}^n}$$

$$<2k_1M_F\log(L/r_\varepsilon)\cdot r_{PP_1}^h<\varepsilon/8$$

si

$$(56)\qquad r_{PP_1}<\Big(\frac{\varepsilon}{16k_1M_F\log(L/r_\varepsilon)}\Big)^{1/h}=\eta_3.$$

Pour étudier la seconde intégrale dans la somme (53), remarquons que pour toute valeur positive s est vraie une inégalité évidente

$$(57)\qquad s^{n/2-1}|e^{-r_{PB}^2s/4}-e^{-r_{P_1B}^2s/4}|\leqslant\tfrac{1}{2}Ls^{n/2}e^{-r_0^2s/4}|r_{PB}-r_{P_1B}|\leqslant\tfrac{1}{2}Ls^{n/2}e^{-r_{PB}^2s/16}r_{PP_1}$$

où r_0 est une valeur comprise entre r_{PB} et $2r_{P_1B}$, donc $r_0>\frac{1}{2}r_{PB}$ si $B\in\Omega-K'$.

Il en résulte la limitation

$$(58)\qquad \Big|\lambda\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon'}r_{P_1B}\cos\nu_{P_1B}\Big[\int\limits_{1/t}^{\infty}s^{n/2-1}\big(\exp(-r_{PB}^2s/4)-\exp(-r_{P_1B}^2s/4)\big)F\,ds\Big]d\Omega_B\Big|$$

$$\leqslant\tfrac{3}{4}\lambda Lr_{PP_1}M_F\iiint\limits_{\Omega-K'}r_{PB}\Big[\int\limits_{0}^{\infty}s^{n/2}\exp(-r_{PB}^2s/16)\,ds\Big]d\Omega_B$$

$$=3\cdot4^{n+1}\lambda LM_Fr_{PP_1}\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\iiint\limits_{\Omega-K'}\frac{d\Omega_B}{r_{PB}^{n+1}}$$

$$\leqslant 3\cdot2^{n+2}nLM_F\Big(\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{1}{L}\Big)r_{PP_1}<\frac{\varepsilon}{8}$$

si

(59) $$r_{PP_1} < \varepsilon/3\cdot 2^{n+5} nLM_F(1/r_\varepsilon - 1/L) = \eta_4.$$

En réunissant les résultats (52), (55) et (58), nous aurons

(60) $$|J_1(P,t) - J_1(P_1,t)| < \varepsilon/2$$

si $r_{PP_1} < \eta'_\varepsilon$, où η'_ε est le plus petit des nombres $\eta_3, \eta_4, r_\varepsilon/2$, ne dépendant que de ε et M_F.

D'après les inégalités (50) et (60) nous concluons enfin que pour tout point $A \in \Omega$ et pour toute valeur $t > 0$ sera vraie l'inégalité

(61) $$|J_1(P,t) - J_1(P_1,t_1)| < \varepsilon$$

si $r_{PP_1} < \eta^*_\varepsilon$, $|t-t_1| < \eta^*_\varepsilon$, où η^*_ε est le plus petit des nombres $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, r_\varepsilon/2$, et ne dépend que de ε et de M_F. L'inégalité (61) exprime que les intégrales $J_1(A,t)$, correspondant à tous les points de l'ensemble E, forment une famille de fonctions *équicontinues*. On peut étudier d'une façon tout à fait analogue l'intégrale $J_2(A,t)$ donnée par les formules (40). Il y a seulement à remarquer que si l'on considère la sphère K_ε de centre au point intérieur A du domaine Ω, alors l'ensemble K''_ε de points de la surface S intérieur à la sphère K_ε peut être un ensemble *vide*, mais cela n'augmente pas de difficulté.

Quant à l'intégrale $J_3(P,t)$, nous remarquons que, d'après la propriété (29′), cette intégrale admet une faible singularité et est absolument convergente. Nous constaterons de même que les intégrales $J_2(A,t)$ et $J_3(P,t)$, correspondant aux points de l'ensemble E, forment des familles de fonctions équicontinues.

Nous en concluons, d'après les relations (15) et les suppositions concernant les fonctions F et Φ que les fonctions $v(A,t), \psi(P,t)$, correspondant aux points (u,φ) de l'ensemble E, forment deux familles de fonctions *équicontinues*.

Il en résulte, d'après un théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble E' de tous les points transformés (v,ψ) est *compact*.

Toutes les conditions du théorème de Schauder sont donc satisfaites, par conséquent nous pouvons conclure l'existence dans l'ensemble E d'un point $U[u^*(A,t), \varphi^*(P,t)]$ invariant relativement à la transformation (15), c'est-à-dire l'existence d'une solution u^*, φ^* du système de deux équations intégrales (7). La fonction obtenue $u^*(A,t)$ dans la région $[\Omega, (0,T)]$ est la solution du problème proposé, puisque nous avons déjà montré qu'elle vérifie alors l'équation différentielle (1) en tout point intérieur A du domaine Ω, en tout moment $t > 0$ dans l'intervalle $(0,T)$ et en outre elle satisfait à la condition limite (2) en tout point P de la surface S.

La condition initiale (3) est aussi satisfaite. Nous exprimerons le résultat obtenu dans le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions données $F(A,t,u)$, $\Phi(P,t,u)$ et la surface fermée S, limitant le domaine borné Ω, vérifient les conditions* I, II, III, *si en outre les inégalités* (12), (37) *sont satisfaites, il existe alors au moins une fonction $u(A,t)$ dans la région $[\Omega,(0,T)]$, qui vérifie à l'intérieur de cette région l'équation différentielle* (1) *et au bord de cette région les conditions* (2), (3).

Travaux cités

[1] M. Czyżykowski, *Zagadnienie nieliniowe Fouriera*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej 6 (1953), p. 13-34.

[2] W. Pogorzelski, *Sur la solution de l'équation intégrale dans le problème de Fourier*, Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951), p. 56-74.

[3] — *Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques*, ce volume, p. 46-75.

[4] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES