Un théorème sur la valeur moyenne Θ dans la formule des accroissements finis

par S. Gołąb et S. Łojasiewicz (Kraków)

Nous allons considérer la valeur Θ du théorème des accroissements finis

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\big(a+\Theta(b-a)\big) \tag{1}$$

comme fonction des variables a et b

$$\Theta=\Theta(a,b). \tag{2}$$

Cette fonction est définie univoquement dans le cas où la fonction $f(x)$, est strictement convexe.

S. Gołąb a posé le problème de trouver les fonctions $f(x)$, la fonction $\Theta(a,b)$ satisfaisant aux inégalités

$$0<\Theta(a,b)<1 \tag{3}$$

étant donnée. La résolution, due au second des auteurs ci-dessus, sera publiée dans le tome prochain de ces „Annales".

Dans l'article présent nous donnons la résolution du problème suivant:

Trouver toutes les fonctions $f(x)$ (convenablement régulières) pour lesquelles la fonction (2) *est homogène (d'ordre zéro).*

Cette homogénéité a lieu par exemple si $f(x)$ est un monôme ainsi que dans le cas où $f(x)=\ln x$. Ceci indique que la classe des fonctions cherchées est assez riche.

Nous donnons la résolution du problème au moyen de deux méthodes différentes. La première (due au premier des auteurs) exigeant des hypothèses plus fortes de régularité de $f(x)$ sera appliquée dans un autre problème; ici, elle ne sera qu'esquissée. Elle se ramène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre. La deuxième conduit à un système de deux équations fonctionnelles linéaires. Elle s'appuie sur un lemme [2] qui sera publié séparément et nous omettons ici sa démonstration.

Le problème posé consiste, en effet, à resoudre une équation fonctionnelle aux deux fonctions inconnues Θ et f, la fonction Θ étant homogène et la fonction f convenablement régulière.

C'est sous une forme analytique que nous allons d'abord mettre ce problème.

Supposons que la dérivée f' est une fonction biunivoque et désignons par Φ son inverse. L'équation (1) s'écrit sous la forme

$$\Theta(a,b)=\left[\Phi\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)-a\right]\Big/(b-a). \tag{4}$$

En posant

$$s=b/a \tag{5}$$

le second membre de (4) devient

$$\left[\Phi\left(\frac{f(as)-f(a)}{a(s-1)}\right)-a\right]\Big/(s-1) \tag{6}$$

et nous en exigerons qu'il ne dépende que de s, ce qui équivaut au même avec l'expression

$$\frac{1}{a}\,\Phi\left(\frac{f(as)-f(a)}{a(s-1)}\right). \tag{7}$$

En désignant cette expression comme fonction d'une seule variable s par $g(s)$ nous en obtenons la relation

$$f(as)-f(a)=a(s-1)f'\big(ag(s)\big) \tag{8}$$

qui doit être satisfaite dans un voisinage à droite de $s=1$, si la fonction $f(x)$ n'est définie que dans un intervalle de nombres positifs et aussi dans un voisinage à gauche de $s=1$ dans le cas où l'ensemble des arguments de f contient des nombres négatifs.

La première méthode de résolution de l'équation fonctionnelle (8). Nous supposerons que la fonction f possède la troisième dérivée $f'''(x)$ continue et que la seconde est de signe constant

$$f''(x)\neq 0. \tag{9}$$

Soit $x_0\neq 0$ un point d'intérieur du domaine d'existence de f. En vertu de (7) nous pouvons écrire

$$g(s)=(1/x_0)\,\Phi\left(\frac{f(x_0 s)-f(x_0)}{x_0(s-1)}\right). \tag{10}$$

En tenant compte des hypothèses on voit que la fonction $g(s)$ est définie et deux fois différentiable au voisinage gauche et droit du point $s=1$. Dérivons deux fois l'égalité (10); il vient

$$g'(s)=\frac{1}{x_0^2}\,\Phi'\{\ldots\}\,\frac{x_0(s-1)f'(x_0s)-f(x_0s)+f(x_0)}{(s-1)^2},$$

$$g''(s)=\frac{1}{x_0^3}\,\Phi''\{\ldots\}\,\frac{[x_0(s-1)f'(x_0s)-f(x_0s)+f(x_0)]^2}{(s-1)^4}+ \tag{11}$$

$$+\frac{1}{x_0^2}\,\Phi'\{\ldots\}\,\frac{(s-1)^2x_0^2f''(x_0s)-2(s-1)x_0f'(x_0s)+2f(x_0s)-2f(x_0)}{(s-1)^3}.$$

Nous affirmons qu'il existent des limites

$$\lim_{s\to1}g'(s)\quad\text{et}\quad\lim_{s\to1}g''(s). \tag{12}$$

En effet, d'après la continuité de Φ'', il suffit de prouver l'existence des trois limites suivantes

$$\lim_{s\to1}\frac{f(x_0s)-f(x_0)}{x_0(s-1)}=\lim_{s\to1}F_1(s),$$

$$\lim_{s\to1}\frac{x_0(s-1)f'(x_0s)-f(x_0s)+f(x_0)}{(s-1)^2}=\lim_{s\to1}F_2(s), \tag{13}$$

$$\lim_{s\to1}\frac{(s-1)^2x_0^2f''(x_0s)-2(s-1)x_0f'(x_0s)+2f(x_0s)-2f(x_0)}{(s-1)^3}=\lim_{s\to1}F_3(s).$$

A cet effet nous écrivons les développements (qui subsistent selon nos hypothèses)

$$f(x_0s)=f[x_0+x_0(s-1)]$$

$$=f(x_0)+x_0(s-1)f'(x_0)+\frac{x_0^2(s-1)^2}{2}f''(x_0)+$$

$$+\frac{x_0^3(s-1)^3}{6}[f'''(x_0)+\varepsilon(s)], \tag{14}$$

$$f'(x_0s)=f'(x_0)+x_0(s-1)f''(x_0)+\frac{x_0^2(s-1)^2}{2}[f'''(x_0)+\eta(s)],$$

$$f''(x_0s)=f''(x_0)+x_0(s-1)[f'''(x_0)+\zeta(s)],$$

où

$$\lim_{s\to1}\varepsilon(s)=\lim_{s\to1}\eta(s)=\lim_{s\to1}\zeta(s)=0. \tag{15}$$

En comparant (13) avec (14) et (15) on calcule aisément

$$\lim_{s\to1}F_1(s)=f'(x_0),\qquad \lim_{s\to1}F_2(s)=\frac{x_0^2}{2}f''(x_0),\qquad \lim_{s\to1}F_3(s)=\frac{x_0^3}{3}f'''(x_0) \tag{16}$$

et par conséquent

$$\lim_{s\to1}g'(s)=\frac{1}{x_0^2}\,\Phi'[f'(x_0)]\frac{x_0^2}{2}f''(x_0)=\tfrac12 f''(x_0)\Phi'[f'(x_0)],$$

$$\lim_{s\to1}g''(s)=\frac{1}{x_0^3}\,\Phi''[f'(x_0)]\frac{x_0^4}{4}[f''(x_0)]^2+\frac{1}{x_0^2}\,\Phi'[f'(x_0)]\frac{x_0^3}{3}f'''(x_0) \tag{17}$$

$$=\frac{x_0}{4}\,\Phi''[f'(x_0)][f''(x_0)]^2+\frac{x_0}{3}\,\Phi'[f'(x_0)]f'''(x_0).$$

Rappelons que Φ est la fonction inverse de la fonction f', c'est-à-dire

$$\Phi[f'(x)]=x. \tag{18}$$

En dérivant, nous en obtenons

$$\Phi'[f'(x)]f''(x)=1 \tag{19}$$

d'où, selon (17),

$$\lim_{s\to1}g'(s)=\tfrac12. \tag{20}$$

Dérivons une fois encore la relation (19) (ce qui est possible selon nos hypothèses); il vient

$$\Phi''[f'(x)][f''(x)]^2+\Phi'[f'(x)]f'''(x)=0, \tag{21}$$

d'où, d'après (9) et (19)

$$\Phi''[f'(x)]=-\frac{\Phi'[f'(x)]f'''(x)}{[f''(x)]^2}=-\frac{f'''(x)}{[f''(x)]^3}. \tag{22}$$

On tire de (17), en vertu de (19) et (22)

$$\lim_{s\to1}g''(s)=-\frac{x_0}{4}\cdot\frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)}+\frac{x_0}{3}\cdot\frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)}=\frac{x_0}{12}\cdot\frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)}. \tag{23}$$

Remarquons maintenant que la fonction $g(s)$ ne dépend point de x_0, ce qui entraîne l'égalité

$$xf'''(x)/f''(x)=C \tag{24}$$

qui est satisfaite sauf, peut-être, pour $x=0$.

Nous avons obtenu ainsi une équation différentielle qu'on intégre sans peine.

En posant $z=f''$ nous obtenons $\int (z'/z)\,dz = \int (C/x)\,dx$, d'où $z=D|x|^C$ où D est une constante d'intégration. Pour trouver $f(x)$ par deux quadratures on doit distinguer les trois cas suivants:

$$C=1, \qquad C=-2, \qquad C\neq -1 \text{ et } C\neq -2.$$

Si $C=-1$, $f'=D\ln|x|+E$, d'où $f=Dx\ln|x|-Dx+Ex+F$.
Si $C=-2$, $f'=-D/x+E$, d'où $f=D\ln|x|+Ex+F$.
Enfin dans le troisième cas

$$f=\frac{D}{(C+1)(C+2)}|x|^{C+2}+Ex+F.$$

Ainsi nous obtenons trois familles de courbes (deux à trois paramètres et une à quatre paramètres) comme solution de notre problème

$$\text{(25)}\qquad \begin{aligned} &\text{(I)} && f(x)=ax\ln|x|+\beta x+\gamma,\\ &\text{(II)} && f(x)=a\ln|x|+\beta x+\gamma,\\ &\text{(III)} && f(x)=ax^{\delta}+\beta x+\gamma. \end{aligned}$$

On verifie facilement que pour chaque fonction $f(x)$ définie par des formules (25) le fonction $g(s)$ définie par (10) ne dépend pas de x_0. Notre problème est donc résolu.

La deuxième méthode de résolution d'équation fonctionnelle (8). Nous faisons maintenant des hypothèses plus faibles. À savoir, nous supposons que la dérivée $f'(x)$ existe et est strictement monotone (et par conséquent continue) dans un intervalle ouvert (a,b). Soit Φ la fonction inverse de $f'(x)$.

Évidemment le raisonnement sera plus compliqué; il consiste en réalité à l'application du lemme 3. La démonstration de ce lemme est basée sur les lemmes 1 et 2.

Nous dirons que pour une fonction $f(x)$ définie dans un ensemble Z la borne supérieure $\sup\limits_Z f$ (resp. inférieure $\inf\limits_Z f$) est réalisée dans un point x_0, lorsqu'il existe une suite $x_n \epsilon Z$ telle qu'on a $x_n\to x_0$ et $f(x_n)\to\sup\limits_Z f$ (resp. $f(x_n)\to\inf\limits_Z f$).

LEMME 1. *Supposons que l'ensemble de points de continuité d'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a,b) est dense. Si pour chaque intervalle partiel (c,d) les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans (c,d) ne sont réalisées que dans c ou dans d, alors la fonction $f(x)$ est strictement monotone.*

LEMME 2. *Si la dérivée $f'(x)$ existe dans tout l'intervalle (a,b) et si pour chaque intervalle partiel (c,d) les bornes supérieure et inférieure de f' dans (c,d) ne sont réalisées que dans c ou d, alors la dérivée $f'(x)$ est strictement monotone (et par conséquent continue) dans (a,b).*

LEMME 3. *Si la dérivée $f'(x)$ existe dans tout l'intervalle (a,b) et si*

$$\text{(26)}\qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'\big(h(x,y)\big) \quad \textit{pour} \quad a<x<y<b,$$

où $h(x,y)$ est une fonction continue par rapport à chaque variable séparément et telle que $x<h(x,y)<y$, alors la dérivée $f'(x)$ est constante soit strictement monotone.

Nous allons résoudre maintenant l'équation (8).

Supposons que la fonction $f(x)$ satisfait à l'équation (8). En vertu de (16) et (18) nous voyons que la fonction $g(s)$, définie séparément pour $s=1$ par

$$\text{(27)}\qquad g(1)=\frac{1}{x_0}\Phi\big(f'(x_0)\big)=\frac{x_0}{x_0}=1$$

est continue. D'après (10) nous avons

$$\text{(28)}\qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'\left(xg\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad \text{pour} \quad a<x<y<b, \quad x\neq 0$$

et (f' étant strictement monotone)

$$\text{(29)}\qquad x<xg\left(\frac{y}{x}\right)<y \quad \text{pour} \quad a<x<y<b, \quad x\neq 0.$$

Soit x_0 un point quelconque de l'intervalle (a,b) et soit $[a_0,b_0]$ un voisinage fermé, d'ailleurs quelconque, de x_0, contenu dans (a,b). Si u est un nombre d'un voisinage convenable du nombre 1, la fonction

$$\text{(30)}\qquad h(x)\overset{\text{df}}{=}f(ux)-pf(x)-qx-r,$$

où p,q,r sont des constantes quelconques, est définie dans (a_0,b_0) et on a d'après (28)

$$\text{(31)}\qquad \frac{h(y)-h(x)}{y-x}=h'\left(xg\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad \text{pour} \quad a_0<x,\ y<b_0, \quad x\neq y.$$

Il en résulte, selon le lemme 3 (la fonction $xg(y/x)$ étant continue et satisfaisant à l'inégalité (29)), que la fonction $h(x)$ est linéaire ou sa dérivée est strictement monotone. Fixons maintenant un u_0 du voisinage du nombre 1 et un c_0 de l'intervalle (a_0,b_0).

La fonction $f(x)$ étant strictement convexe (resp concave), on a, d'après $a_0 < c_0 < b_0$

$$\begin{vmatrix} f(a_0) & a_0 & 1 \\ f(b_0) & b_0 & 1 \\ f(c_0) & c_0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

d'où il résulte qu'on peut déterminer les constantes p, q, r de façon qu'on ait $h(a_0) = h(b_0) = h(c_0) = 0$ ce qui entraîne forcément que la fonction $h(x)$ est égale identiquement à zéro.

Ainsi nous avons montré que pour chaque u d'un voisinage du nombre 1 il existe des nombres (des fonctions) $p(u)$, $q(u)$, $r(u)$ tel que

$$(32) \qquad f(ux) = p(u)f(x) + q(u)x + r(u) \quad \text{pour} \quad a_0 < x < b_0,$$

d'où (en dérivant les deux membres de l'égalité (32) par rapport à x)

$$(33) \qquad f'(ux) = \frac{p(u)}{u} f'(x) + \frac{q(u)}{u} = A(u)f'(x) + B(u) \quad \text{pour} \quad a_0 < x < b_0$$

avec $A(u) = p(u)/u$, $B(u) = q(u)/u$. Soient x_1 et x_2 deux nombres de l'intervalle (a_0, b_0), $x_1 \neq x_2$. On a donc $f'(ux_1) = A(u)f'(x_1) + B(u)$, $f'(ux_2) = A(u)f'(x_2) + B(u)$, d'où il vient

$$A(u) = \frac{f'(ux_1) - f'(ux_2)}{f'(x_1) - f'(x_2)}$$

lorsque u parcourt un voisinage du nombre 1. Il en résulte que la fonction $A(u)$ est continue (dans un voisinage du nombre 1) et, d'après (33), qu'il en est de même avec $B(u)$.

On tire de la relation (33)

$$f'(uvx) = A(u)f'(vx) + B(u) = A(u)A(v)f'(x) + A(u)B(v) + B(u)$$

et en même temps

$$f'(uvx) = A(uv)f'(x) + B(uv)$$

pour u et v d'un voisinage du nombre 1 et pour x de l'intervalle (a_0, b_0), ce qui entraîne

$$(34) \qquad A(u)A(v) = A(uv)$$

pour u et v d'un voisinage de 1 et

$$(35) \qquad A(u)B(v) + B(u) = B(uv)$$

pour u et v d'un voisinage de 1, car la fonction $f'(x)$ n'est pas constante. Il vient, d'après (34) $A(u) = u^a$ dans un voisinage de 1, où a est une constante.

Si $a \neq 1$, on tire de l'égalité (35)

$$A(u)B(v) + B(u) = A(v)B(u) + B(v)$$

et en fixant un v_0 du voisinage de 1, $v_0 \neq 1$, on obtient

$$B(u) = \frac{A(u)B(v_0) - B(v_0)}{A(v_0) - 1} = Cu^a + B$$

dans un voisinage de 1 avec $C = B(v_0)/\big(A(v_0) - 1\big)$ et $D = -B(v_0)/\big(A(v_0) - 1\big)$.

Si $a = 1$, on a, d'après (35) $B(u) = C \ln u$ dans un voisinage de 1, où C est une constante.

Enfin, en vertu des formules précédentes nous obtenons de l'égalité (30) les formules

$$f'(x) = A|x|^a + B \quad \text{ou} \quad f'(x) = A \ln|x| + B$$

qui sont satisfaites dans un voisinage de x_0 et par conséquent (x_0 étant quelconque) dans tout l'intervalle (a, b). Mais ceci prouve, que la fonction $f(x)$ doit être de la forme (25), c. q. f. d.[1]).

Travaux cités

[1] V. Gonçalves, *Sur l'inconnue Θ du théorème des accroissements finis*, Portugaliae Mathematica 2 (1941), p. 121-138.

[2] S. Łojasiewicz, *Funkcje wypukłe a twierdzenie o przyrostach skończonych*, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell. Mat.-Fiz.-Chem. 1 (1955), p. 15-18.

[1]) Au moment où ce travail fut achevé nous avons appris que Viçente Gonçalves a obtenu une formule qui entraîne la formule (24). Cf. [1].